Mines - Ponts - PSI - II - 2021

Opérateurs à noyaux de type positif

I. Préliminaires

1. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X^\top \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et la « règle des dominos » assure que le produit $X^\top AX$ est bien défini et donne un résultat réel $(1,n) \times (n,n) \times (n,1) \to (1,1)$, $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ étant identifié à $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la formule du produit matriciel donne

$$X^\top AX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} X^\top|_{1,i} \times A|_{i,j} \times X|_{j,1} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i a_{i,j} x_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, le théorème spectral indique que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Soient alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A) \subset \mathbb{R}^n$. Alors, $X^\top AX = X^\top(\lambda X) = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2$. Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (à ne pas confondre avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$), alors $X^\top AX \geqslant 0$, donc $\lambda \geqslant 0$.

3. Soient $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,t) = \displaystyle\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u$. L'application partielle $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue sur son domaine de définition $[c,d]$ par une application immédiate du théorème de continuité des intégrales à paramètre :

i) pour tout $t \in [c,d]$, la fonction $u \longmapsto f(u,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[a,x]$;

ii) pour tout $u \in [a,x] \subset [a,b]$, la fonction $t \longmapsto f(u,t)$ est continue sur $[c,d]$;

iii) f est une fonction continue sur le fermé-borné $[a,b] \times [c,d]$ donc bornée et dominée par la fonction constante $\|f\|_\infty$, intégrable sur le segment $[a,x]$.

4. Pour $x \in [a,b]$, on pose $\psi(x) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

i) pour tout $x \in [a,b]$, l'application $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue sur le segment $[c,d]$ d'après la question précédente, donc intégrable sur ce segment ;

ii) pour tout $t \in [c,d]$, la fonction $x \longmapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ par continuité de $u \longmapsto f(u,t)$ (primitive d'une fonction continue) ;

iii) pour tout $x \in [a,b]$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux et dominée par la constante $\|f\|_\infty$, intégrable sur le segment $[c,d]$.

La fonction ψ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\psi'(x) = \displaystyle\int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

5. Notons que $\varphi(a,t) = 0$ pour tout $t \in [c,d]$, d'où $\psi(a) = \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t = 0$. En utilisant la question 4, il vient

$$\int_c^d \left[\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t = \int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t = \psi(x) = \psi(x) - \psi(a) = \int_a^x \psi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^x \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u.$$

6. Notons $I = \displaystyle\int_a^b \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$. Alors,

$$\begin{aligned} I - S_n(f) &= \int_a^b \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u - S_n(f) \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left[\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u - S_n(f) \\ &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \left[\sum_{\ell=0}^{n-1} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u - S_n(f) \overset{(2)}{=} \sum_{0 \leqslant k,\ell < n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u - S_n(f) \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{0 \leqslant k,\ell < n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \left[f(u,t) - f(x_k,u_\ell)\right]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

par (1) : relation de Chasles, (2) : linéarité de l'intégrale et (3) : $\displaystyle\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$. On majore maintenant la différence (en valeur absolue) en utilisant l'hypothèse $\mathcal{L}$, qui exprime que f est lipschitzienne.

$$\begin{aligned}|I - S_n(f)| &\leqslant \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \big|f(u,t) - f(x_k, u_\ell)\big| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \overset{(\mathcal{L})}{\leqslant} M \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \big[(u-u_k) + (t-t_\ell)\big] \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant M \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} \left[\frac{b-a}{n} + \frac{d-c}{n}\right] \mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \overset{(3)}{\leqslant} M \sum_{0\leqslant k,\ell<n} \frac{b+d-a-c}{n} \times \frac{b-a}{n} \times \frac{d-c}{n} \\ &\leqslant \frac{M(b+d-a-b)(b-a)(d-c)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

II. Noyaux de type positif

Soit Ω un ensemble quelconque. Une application $K\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ est un NTP (noyau de type positif) si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega^n : \operatorname{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \big(K(x_i, x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Notons que l'hypothèse (i) donnée dans l'énoncé est redondante, puisque trivialement contenue dans (ii).

7. Soient $\big(H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien réel et $K\colon H^2 \to \mathbb{R}$ donné par $K(x,y) = \langle x \mid y\rangle_H$. La matrice $\operatorname{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est symétrique par symétrie du produit scalaire. Si $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, par bilinéarité de K, puis par sa positivité,

$$T^\top \operatorname{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n) T \overset{(Q1)}{=} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} K(x_i, x_j) t_i t_j = K\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i, \sum_{j=1}^n t_j x_j\right) \geqslant 0.$$

8. Suposons qu'une application K définie sur Ω^2 vérifie la propriété $(\mathcal{R})$. Soient $\big(H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien réel et $\varphi\colon \Omega \to H$ tels que $K(x,y) = \langle\varphi(x) \mid \varphi(y)\rangle_H$ pour tout $(x,y) \in \Omega^2$. Alors, $K = K_7 \circ \varphi$, où K_7 est l'application définie à la question 7. Le fait que K_7 soit un NTP entraîne immédiatement que c'est également le cas de K.

9. Soient $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $K\colon \Omega^2 \to \mathbb{R}$ un NTP. Par hypothèse, la matrice $\operatorname{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est symétrique positive, donc, d'après le théorème spectral et la question 2, il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que

$$\operatorname{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P^\top \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) P = P^\top \Delta^2 P = (\Delta P)^\top \Delta P,$$

où $\Delta = \operatorname{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big)$. Considérons l'espace euclidien $H = \mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique et $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x_i) = C_i(\Delta P)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ($C_i(\Delta P)$ désignant la $i$ème colonne de ΔP). Alors,

$$\langle\varphi(x_i) \mid \varphi(x_j)\rangle = C_i(\Delta P)^\top C_j(\Delta P) = (\Delta P)^\top \Delta P|_{i,j} = \operatorname{Cov}_K(x_1, x_2, \ldots, x_n)|_{i,j} = K(x_i, x_j),$$

ce qui montre que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$. En d'autres termes (un peu hors programme), on a montré que toute matrice symétrique positive est une matrice de Gram.

10. Ici, H est l'ensemble des fonctions s'annulant en 0, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$. La notion étant hors programme, « rappelons » qu'une fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ si elle est continue (bon, logique) et s'il existe une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $f_{|[x_i, x_{i+1}]}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. Autrement dit, f est continue, dérivable partout sauf éventuellement en un nombre fini de points, où elle admet toutefois des dérivées à droite et à gauche (quand cela a un sens, donc uniquement à droite en 0, et uniquement à gauche en 1).

Puisque f' et g' ne sont pas définies en tout point de l'intervalle où on les intègre, il faut, pour montrer qu'elle définit un produit scalaire, donner d'abord un sens à l'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$... Ce n'est pas très difficile : on prend une subdivision $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ adaptée au produit $f'g'$ (par exemple, l'ensemble des points où f ou g n'est pas dérivable). Sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, la fonction $f'g'$ est continue et bien définie et elle est prolongeable par continuité à $[x_i, x_{i+1}]$ par les valeurs $f_d'(x_i)g_d'(x_i)$ et $f_g'(x_{i+1})g_g'(x_{i+1})$ respectivement. On pose alors $\displaystyle\int_0^1 f'g' = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'g'$. De manière presque identique, on peut affecter des valeurs arbitraires à f' aux points où elle n'existe pas, par exemple 0. On a alors une fonction $\tilde{f'}$, définie en tout point de $[0,1]$, qui coïncide avec la fonction dérivée de f aux points où f est dérivable et qui est continue par morceaux sur $[0,1]$. On a alors $\widetilde{f'g'} = \tilde{f}'\tilde{g}$. L'avantage de cette variante est que l'on peut alors utiliser la théorie de l'intégration des fonctions continues par morceaux et ses propriétés. Montrons maintenant que l'application ci-dessus définit un produit scalaire sur H.

i) L'application $(f,g) \longmapsto \langle f \mid g \rangle$ est *symétrique* par commutativité de la multiplication réelle.

ii) Elle est *bilinéaire* par linéarité de l'intégrale.

iii) Elle est *positive* : $\displaystyle\int_0^1 f'^2 \geqslant 0$.

iv) Elle est enfin *définie* : si $\displaystyle\int_0^1 f'^2 = 0$, alors, pour une subdivision $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ adaptée à f', on a $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'^2 = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, les restrictions $f_{]x_i,x_{i+1}[}$ sont constantes, donc f est en escalier, donc f est constante puisqu'elle est continue et enfin nulle car $f(0) = 0$.

11. On utilise l'indication. L'espace préhilibertien est bien sûr celui introduit à la question 10. La fonction K_x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $K_x(y) = \min(x,y) = y\mathbb{1}_{[0,x]}(y) + x\mathbb{1}_{]x,1]}(y)$ est clairement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec K_x non dérivable en x et $K'_x = \mathbb{1}_{[0,x[}$ sur $[0,1] \setminus \{x\}$. Alors,

$$\langle K_x \mid K_y \rangle = \int_0^1 K'_x(t)K'_y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,x[}(t) \times \mathbb{1}_{[0,y[}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,\min(x,y)[}(t)\,\mathrm{d}t = \min(x,y) = K(x,y).$$

III. Opérateurs à noyau

On note $I = [a,b]$ et $E = \mathcal{C}\big(I, \mathbb{R}\big)$, sur lequel on définit le produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_I fg$ et la norme associée $\|\cdot\|_2$ (norme de la *convergence en moyenne quadratique*. À $K\colon I^2 \to \mathbb{R}$ symétrique, on associe les applications partielles $K_x(t) = K(x,t) = K(t,x)$ et l'opérateur u_K défini par

$$\forall f \in E,\, \forall x \in I\colon u_K(f)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t = \langle K_x \mid f \rangle.$$

12. Si $u_K = u_{K'}$, alors, pour tout $x \in I$, on a $\langle K_x - K'_x \mid f \rangle = \langle K_x \mid f \rangle - \langle K'_x \mid f \rangle = u_K(f)(x) - u_{K'}(f)(x) = 0$ pour tout $f \in E$. Ainsi, $K_x - K'_x \in E^\perp = \{0\}$, donc $K_x = K'_x$ pour tout x, soit $K = K'$.

13. La linéarité de u_K procède directement de celle de l'intégrale. Pour montrer que $u_K \in \mathcal{L}(E)$, il faut donc vérifier que, pour tout $f \in E$, $u_K(f) \in E$. Il est évident que $u_K(f)$ est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et il suffit donc de montrer que $u_K(f)$ est continue, ce qui se fait par application du théorème de continuité des intégrales à paramètre, dont les hypothèses sont vérifiées ci-dessous :

i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto K(x,t)f(t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur I par continuité de K et de f ;

ii) pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto K(x,t)f(t)$ est continue sur I par continuité de K ;

iii) la fonction $(x,t) \longmapsto K(x,t)f(t)$ est continue sur le fermé-borné I^2, donc majorée en valeur absolue par une constante C, trivialement intégrable sur le segment I.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|u_K(f)\|_2^2 = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\right]^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \|K_x\|_2^2\,\|f\|_2^2\,\mathrm{d}x = \|f\|_2^2 \iint_{[a,b]^2} K(x,t)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

ce qui montre, en prenant la racine carrée de l'inégalité, que u_k est lipschitzienne, donc continue.

14. En utilisant le théorème de Fubini (question 5) et la symétrie de K, il vient

$$\langle u_K(f) \mid g\rangle = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\right] g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\left[\int_a^b K(t,x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}t = \langle f \mid u_K(g)\rangle,$$

ce qui montre que u_K est symétrique. *La notion d'endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint) n'est au programme qu'en dimension finie, où elle admet une traduction matricielle. En dimension infinie, la seule caractérisation qui reste est celle utilisée ici.*

L'orthogonalité des sous-espaces propres est elle aussi connue uniquement en dimension finie. Comme sa démonstration ne fait pas usage de la dimension, les correcteurs accepteront peut-être avec magnanimité les solutions rapides ne faisant pas mention de dimension. Deux solutions sont inattaquables : 1) redémontrer cette propriété en écrivant

$$\langle u_K(f_\lambda) \mid f_\mu\rangle = \begin{cases}\langle \lambda f_\lambda, f_\mu\rangle = \lambda\langle f_\lambda, f_\mu\rangle \\ \langle f_\lambda \mid u_K(f_\mu)\rangle = \mu\langle f_\lambda, f_\mu\rangle\end{cases} \qquad \therefore \qquad \langle f_\lambda, f_\mu\rangle = 0,$$

ou 2) noter que $P = \mathrm{Vect}(f_\lambda, f_\mu)$ est un plan de E stable par u_K, espace euclidien sur lequel u_K induit trivialement un endomorphisme auto-adjoint dont f_λ et f_μ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc orthogonaux.

15. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, formons la subdivision régulière $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b$, *i.e.* $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Notons $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})^\top$. Pour $f \in E$, notons à la `numpy` $f(X) = \big(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\big)^\top$. Alors,

$$\Lambda_n(K,f) = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} K(x_i,x_j)f(x_i)f(x_j) \overset{(Q1)}{=} f(X)^\top \mathrm{Cov}_K\big(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\big)f(X) \geqslant 0 \quad \text{car } K \text{ est un NTP} \qquad \therefore$$

$$\langle u_K(f) \mid f\rangle = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\right] f(x)\,\mathrm{d}x = \iint_{[a,b]^2} K(x,t)f(t)f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \overset{(Q6)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^2}{n^2}\Lambda_n(K,f) \geqslant 0.$$

Si $u_K(f) = \lambda f$ avec $f \neq 0_E$, alors $\langle u_K(f) \mid f\rangle = \langle \lambda f \mid f\rangle = \lambda \|f\|_2$, d'où $\lambda \geqslant 0$.

16. On revient au cas $I = [0,1]$ et $K(x,t) = \min(x,t)$. On a montré à la question 11 que K vérifie la propriété $(\mathcal{R})$, ce qui entraîne, grâce à la question 8, que K est un NTP (il n'était pas explicitement demandé de le vérifier). Soient f une fonction continue sur $[0,1]$ et $g = u_K(f)$. Alors,

$$g(x) = u_K(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \therefore$$

$$g'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \& \qquad g''(x) = -f(x),$$

l'expression de g montrant que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et celle de g' que g est de classe $\mathcal{C}^2$. Il est par ailleurs immédiat au vu des expressions explicites de g et de g' que $g(0) = g'(1) = 0$. Ainsi, g est solution du problème $(\mathcal{P})$. Si g_1 et g_2 sont solutions de $(\mathcal{P})$, alors $h = g_1 - g_2$ vérifie par différence $h'' = 0_E$, ce qui entraîne que h est une fonction affine et $h(0) = h'(1) = 0$. En reportant dans $h(x) = ax + b = h'(1)x + h(0)$, il vient $h = 0_E$, d'où l'unicité de la solution.

17. D'après la question précédente, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, $u_K(f) = \lambda f$ si, et seulement si, $\begin{cases}\lambda f'' + f = 0 \\ \lambda f(0) = \lambda f'(1) = 0.\end{cases}$

Le cas $\lambda < 0$ est exclu par la question 15 (on pourrait aussi procéder directement et vérifier que seule la fonction nulle vérifie l'équation différentielle avec les conditions aux bornes). Pour $\lambda = 0$, il vient $f = 0_E$, donc 0 n'est pas valeur propre de u_K. Enfin, pour $\lambda > 0$, les solutions de l'équation différentielle $\lambda f'' + f = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x) = a\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + b\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. La condition $f(0) = 0$ donne $a = 0$, puis la condition $f'(1) = 0$ donne $\dfrac{b}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$. Ainsi, $\lambda > 0$ est valeur propre de u_K si, et seulement si, $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$, donc pour $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, soit la suite spectrale décroissante $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2}$. D'après le calcul précédent,

$$E_{\lambda_k}(u_K) = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_k}}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right]\right) = \mathrm{Vect}(\mathfrak{e}_k).$$

La formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ et le fait que $x \mapsto \cos\big((\pi + 2k\pi)x\big)$ soit 1-périodique montrent que $\displaystyle\int_0^1 \mathfrak{e}_k^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Ainsi, $e_k = \sqrt{2}\,\mathfrak{e}_k$ est un vecteur directeur unitaire de la droite propre associée à la valeur propre λ_k.

Ainsi, d'après la question 14, $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale. On note F_n le s.e.v. de E qu'elle engendre.

18. La somme admise $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(k + \frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{\pi^4}{6}$ s'obtient facilement à partir de $\displaystyle\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ en séparant termes pairs et impairs. Cette dernière somme se calcule classiquement en utilisant les séries de Fourier (formule de Parseval appliquée à la fonction 2π-périodique coïncidant avec la valeur absolue sur $[-\pi, \pi]$), mais tout cela est hors programme. Pour revenir au sujet, on calcule séparément l'intégrale double et la somme de la série pour constater que leurs valeurs sont égales :

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2} K(x,t)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \int_0^1\left[\int_0^1 \min(x,t)^2\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \int_0^1\left[\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t + \int_x^1 x^2\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\left(\frac{x^3}{3} + x^2(1-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \qquad \& \\ \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2 &\overset{(Q17)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-4} = \frac{1}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(k + \frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

19. Comme F_n est de dimension finie, on a $E = F_n \oplus F_n^{\perp}$ et l'on peut définir p_n le projecteur orthogonal sur F_n. En utilisant l'expression d'une projection orthogonale sur une BON, il vient

$$p_n(K_x) = \sum_{k=0}^{n}\langle K_x \mid e_k\rangle\, e_k = \sum_{k=0}^{n} u_K(K_x)\, e_k = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k e_k(x)\, e_k.$$

Le théorème de Pythagore, puis l'intégration par rapport à x de l'égalité, donnent

$$\|K_x - p_n(K_x)\|_2^2 = \|K_x\|_2^2 - \|p_n(K_x)\|_2^2 = \int_0^1 K(x,t)^2\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 e_k^2(x) \qquad \therefore$$

$$\int_0^1 \|K_x - p_n(K_x)\|_2^2\,\mathrm{d}x = \iint_{[0,1]^2} K(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2\int_0^1 e_k^2(x)\,\mathrm{d}x = \iint_{[0,1]^2} K(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{(Q18)} 0.$$

20. L'expression de $p_n(K_x)$ établie à la question 19, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donnent :

$$u_K(f) - \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\langle e_k \mid f\rangle e_k = \langle K_x \mid f\rangle - \big\langle p_n(K_x) \mid f\big\rangle = \big\langle K_x - p_n(K_x) \mid f\big\rangle \qquad \therefore$$

$$\left\|u_K(f) - \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\langle e_k \mid f\rangle e_k\right\|_2 \leqslant \|K_x - p_n(K_x)\|_2 \times \|f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{(Q19)} 0.$$

On dit que $(e_k)_{k\geqslant 0}$ est une *base hilbertienne* de E.

21. Le résultat n'est pas immédiat car, sur un segment, la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique, mais la réciproque est fausse. Revenons à l'expression du terme général de la série :

$$\lambda_k\langle e_k \mid f\rangle\, e_k(x) = \lambda_k\int_0^1 \sqrt{2}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right] f(x)\,\mathrm{d}x \times \sqrt{2}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right] \qquad \therefore$$

$$\big|\lambda_k\langle e_k \mid f\rangle\, e_k(x)\big| \leqslant 2\lambda_k\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 2\,\|f\|_1\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2} \leqslant \frac{2\,\|f\|_1}{\pi^2} \times \frac{1}{k^2}.$$

Ainsi, la série de fonctions de terme général $\lambda_k\langle e_k \mid f\rangle\, e_k$ converge normalement par comparaison avec la série de Riemann d'exposant 2, donc uniformément, sur $[0,1]$. Notons S sa somme. La convergence uniforme sur le segment

$[0,1]$ permet de passer à la limite sous l'intégrale et l'on a

$$0 = \lim_{n \to \infty} \left\| u_K(f) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle \, e_k \right\|_2 = \|u_K(f) - S\|_2 \qquad \therefore \qquad S = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle \, e_k = u_K(f).$$

22. Comme suggéré, posons $K'(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k(x) e_k(y)$. La série converge normalement sur $[0,1]^2$, donc simplement, puisque $\left|\lambda_k e_k(x) e_k(y)\right| \leqslant 2\lambda_k$ et que $\sum \lambda_k$ converge (utilisé à la question 21). Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a

$$u_{K'}(f)(x) = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k(x) e_k \,\middle|\, f \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle e_k \mid f \rangle \, e_k(x) = u_K(f)(x),$$

la permutation série-intégrale de l'égalité centrale étant assurée par la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $y \longmapsto \lambda_k e_k(x) e_k(y) f(y)$. La question 12 permet de conclure : $K = K'$.

23. Comme $\left\|\lambda_k e_k^2\right\|_\infty = 2\lambda_k$, la série de fonctions de terme général $\lambda_k e_k^2$ converge normalement, donc uniformément sur le segment $[0,1]$ et l'on a, par interversion série-intégrale,

$$\int_0^1 K(x,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k(x)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \int_0^1 e_k^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \,\|e_k\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \qquad \therefore$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-2} = \pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \pi^2 \int_0^1 K(x,x)\,\mathrm{d}x = \pi^2 \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$