**ENS 2008, DEUXIÈME COMPOSITION**

# Partie I

**I.1.** Soit $x$ une solution de (1) au sens 1, si $x(t_i) \neq 0$, comme $x$ est continue alors $x'$ admet une limite en $t_i$ donc, grâce au théorème du prolongement dérivable, $x$ est $\mathcal{C}^1$, non nulle et vérifie (1) en $t_i$. Conclusion : si $x$ est une solution au sens 1 alors on peut ne considérer que les valeurs des $t_i$ où $x$ s'annule et alors $x$ est une solution au sens 2. En effet la différence entre le sens 1 et le sens 2 tient au fait que dans le cas 1, une solution $x(t)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois alors que dans le cas 2, une solution peut s'annuler une infinité de fois.

**I.2.** D'après le cours, $\psi_0(x) = (\phi(x)|\frac{x}{|x|}) = \dfrac{(x'|x)}{|x|}$ et $\chi_0(x) = \det(\phi(x), \frac{x}{|x|}) = \dfrac{\det(x', x)}{|x|}$.

Soit $y = \lambda x$ avec $\lambda > 0$ on sait que $\phi(y) = \phi(x)$ d'où $\phi(y)\dfrac{y}{|y|} = \phi(x)\dfrac{x}{|x|}$. De cette égalité, on en déduit l'homogénéité de $\psi_0$ et $\chi_0$, $\psi_0$ et $\chi_0$ sont $\mathcal{C}^\infty$.

**I.3.** Compte tenu de l'interprétation géométrique, en posant $\dfrac{x}{|x|} = e^{i\theta}$ alors

$$\phi(x) = (\psi_0(x) + i\chi_0(x)).\frac{x}{|x|} = (\psi_0(e^{i\theta}) + i\chi_0(e^{i\theta})).\, e^{i\theta} = (\psi(\theta) + i\chi(\theta))\, e^{i\theta}.$$

**I.4.** On a $x' = \rho' e^{i\theta} + i\rho\theta' e^{i\theta} = (\rho' + i\rho\theta') e^{i\theta} = \phi(x)$. En utilisant la question précédente, on obtient $\rho' + i\rho\theta' = \psi(\theta) + i\chi(\theta)$ soit

$$\rho' = \psi(\theta), \quad \rho\theta' = \chi(\theta).$$

**I.5.** Un petit calcul de dérivées composées donne

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}'(t) &= \theta'(\tau(t))\tau'(t) = \theta'(\tau(t))\rho(\tau(t)) = \chi(\theta(\tau(t))) \\ &= \chi(\tilde{\theta}(t)) \\ \tilde{\rho}'(t) &= \rho'(\tau(t))\tau'(t) = \rho'(\tau(t))\tilde{\rho}(t) \\ &= \psi(\tilde{\theta}(t))\tilde{\rho}(t).\end{aligned}$$

**I.6.** – (3,4) est un système différentiel autonome ($\tilde{\theta} = \chi(\tilde{\theta})$, $\rho' = \psi(\tilde{\theta})\rho$), $\psi$ et $\chi$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ comme composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les système autonomes s'applique i.e. pour toute condition initiale il existe une unique solution maximale.

*Remarque* : si $(I, \tilde{\theta})$ est une solution maximale de l'équation $\tilde{\theta} = \chi(\tilde{\theta})$ et $\Psi$ une primitive de $\psi(\tilde{\theta}(t))$ alors $\tilde{\rho}(t) = \rho_0 \exp(\Psi(t))$ est alors solution maximale sur $I$. Si $\rho_0 > 0$ alors $\forall t \in I$, $\tilde{\rho}(t) > 0$.

Conclusion : $\tilde{\rho}$ ne s'annule pas sur son intervalle de définition.

– Les fonctions $\psi$ et $\chi$ sont bornées (elles sont continues et $2\pi$-périodiques).

Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle maximal sur lequel sont définies les fonctions $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\theta}$.

Supposons, par l'absurde que $\beta < +\infty$.

– $\tilde{\theta}'$ est bornée au voisinage de $\beta$ donc $\tilde{\theta}$ admet une limite en $\beta$ (critère de Cauchy pour les fonctions assisté de l'inégalité des accroissements finis). $\tilde{\theta}'$ admet aussi une limite car $\tilde{\theta}' = \chi(\tilde{\theta})$. On peut donc prolonger $\tilde{\theta}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à gauche de $\beta$.

– $\dfrac{\tilde{\rho}'}{\tilde{\rho}} = \psi(\tilde{\theta})$ est elle aussi bornée au voisinage de $\beta$ donc $\ln\tilde{\rho}$ admet aussi une limite. On en déduit que $\tilde{\rho}$ admet une limite ainsi que $\tilde{\rho}'$.

On a pu ainsi prolonger $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\rho}$ en $\beta$ ce qui contredit la maximalité de l'intervalle. On a donc $\beta = +\infty$. On montre de même que $\alpha = -\infty$.

**I.7.** **a.** $\phi(\lambda x) = \dfrac{\lambda x}{\|\lambda x\|} = \dfrac{\lambda x}{\lambda\|x\|} = \phi(x)$ donc $\phi$ est bien homogène de degré 0. Le champ de vecteur est constitué de vecteurs unitaires portés par des demi-droites passant par l'origine.

**b.** Ici on a $\psi_0(x) = 1$ et $\chi_0(x) = 0$ i.e. $\rho' = 1$ et $\rho\theta' = 0$.
– Si $x(t_i) \neq 0$ alors $\rho(t) = \rho(t_i) + t - t_i$ et $\theta(t) = \theta(t_i) = \theta$ (constante) d'où

$$x(t) = \mathrm{e}^{i\theta}(\rho(t_i) + t - t_i) = x(t_i) + (t - t_i)\,\mathrm{e}^{i\theta} = x(t_i) + (t - t_i)\frac{x(t_i)}{\|x(t_i)\|}.$$

– Si $x(t_i) = 0$ alors $x(t) = (t - t_i)\,\mathrm{e}^{i\theta}$ où $\theta$ est arbitraire.

**c.** L'origine est un point répulsif. Si $x(a) \neq 0$ alors $\forall t \geqslant a$, $x(t) \neq 0$. Les solutions maximales au sens 1 sont donc de la forme $x(t) = (t - a)\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $t > a$ (et $x(t)$ ne peut être défini pour $t \leqslant a$).

**d.** On a les mêmes solutions maximales qui se prolongent par 0 si $t \leqslant a$.

**I.8.** $\psi(x)\dfrac{\bar{x}}{x} = \sin(\cos\theta)$ donc $\psi_0(x) = \sin(\cos\theta)$ et $\chi_0(x) = 0$ (pour $x = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$. On en déduit que $\psi(\alpha) = \sin(\cos\alpha)$ et $\chi(\alpha) = 0$ soit $\rho' = \sin(\cos\theta)$, $\rho\theta' = 0$ (là aussi $\theta$ est constant).

**a.** On distingue plusieurs cas :
∗ $\theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors $\rho$ est constant, $x(t) = (0, \pm\rho)$ est solution sur $\mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^*$.
∗ $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (modulo $2\pi$), $\sin(\cos\theta) > 0$, on est dans le cas du **7.c** : $x(t) = (t - a)\sin(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $t \geqslant a$.
∗ $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ (modulo $2\pi$), $\sin(\cos\theta) < 0$, alors : $x(t) = (t - b)\sin(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $t \leqslant b$.
On aura les solutions maximales sur $\mathbb{R}$ en choisissant $\theta_1 \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $\theta_2 \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $a \in \mathbb{R}$ et en définissant $x(t) = \begin{cases} (t-a)\sin(\cos\theta_1)\,\mathrm{e}^{i\theta_1} & \text{si } t \leqslant a \\ (t-a)\sin(\cos\theta_2)\,\mathrm{e}^{i\theta_2} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$

**b.** On a les solutions maximales suivantes ($a \leqslant b$ et $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$$x(t) = \begin{cases} (t-a)\sin(\cos\theta_1)\,\mathrm{e}^{i\theta_1} & \text{si } t \leqslant a \\ (t-b)\sin(\cos\theta_2)\,\mathrm{e}^{i\theta_2} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

**I.9.** Posons $y(t) = \lambda x(t/\lambda)$ alors

$$y'(t) = x'(t/\lambda) = \phi(x(t/\lambda)) = \phi(\lambda x(t/\lambda)) = \phi(y(t))$$

donc $y$ est solution de (1). Puis, si $x$ est solution sur $]a, b[$, $y$ est solution sur $]\lambda a, \lambda b[$ et $y(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ non nulle sur les intervalles $]\lambda a, \lambda t_1[, ]\lambda t_1, \lambda t_2[, \ldots, ]\lambda t_N, \lambda b[$.
Les familles de courbes intégrales se déduisent les une des autres par homothétie.

## Partie II

**II.1.** **a.** Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle maximal, $\tilde{\theta}(]a, b[)$ est un intervalle $I$ (T.V.I.). Comme $\chi$ ne s'annule pas sur $I$, $\chi$ garde un signe constant sur $I$, il en est de même pour $\tilde{\theta}'$ par conséquent $\tilde{\theta}$ est strictement monotone.

**b.** Supposons que $\tilde{\theta}$ soit croissante (et, ce qui va avec, $\chi > 0$).
Si $\tilde{\theta}$ est bornée par $A$ alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{\theta} \in [\tilde{\theta}(0), A]$. Soit $m = \inf\limits_{u \in [\tilde{\theta}(0), A]} \chi(u) > 0$ alors

$$\tilde{\theta}(t) = \int_0^t \chi(\tilde{\theta}(u))\,\mathrm{d}u + \tilde{\theta}(0) \geqslant tm + \tilde{\theta}(0)$$

et comme $\tilde{\theta}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\tilde{\theta}(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ ce qui est contradictoire.
On peut donc conclure que $\tilde{\theta}$ n'est pas bornée et comme elle est croissante, $\tilde{\theta}(t) \to +\infty$.
Grâce au T.V.I. on sait qu'il existe $T_0$ tel que $\tilde{\theta}(T_0) = \tilde{\theta}(0) + 2\pi$ (le cas $\chi < 0$ est similaire).
Soit $\tilde{\theta}_1(t) = \tilde{\theta}(t) + 2\pi$ : $\tilde{\theta}_1'(t) = \tilde{\theta}'(t) = \chi(\tilde{\theta}(t)) = \chi(\tilde{\theta}(t) + 2\pi) = \chi(\tilde{\theta}_1(t))$. $\tilde{\theta}(T_0 + t)$ vérifie la même équation différentielle que $\tilde{\theta}_1$ avec la même condition initiale donc, par unicité, $\tilde{\theta}(T_0 + t) = \tilde{\theta}_1(t) = \tilde{\theta}(t) + 2\pi$. On a alors $\mathrm{e}^{i\tilde{\theta}(t+T_0)} = \mathrm{e}^{i\tilde{\theta}(t)+i2\pi} = \mathrm{e}^{i\tilde{\theta}(t)}$ c.q.f.d.

**c.** Vu que $\psi$ est aussi $2\pi$-périodique on a

$$\psi(\tilde\theta(t+T_0)) = \psi(\tilde\theta(t)+2\pi) = \psi(\tilde\theta(t)$$

et comme $\dfrac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \psi(\tilde\theta(t))$ alors $\dfrac{\rho'}{\rho}$ est $T_0$-périodique.

$$\ln\frac{\rho(t+T_0)}{\rho(t)} = \int_t^{t+T_0}\frac{\rho'(u)}{\rho(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{T_0}\frac{\rho'(u)}{\rho(u)}\,\mathrm{d}u$$

car l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas des bornes.
On peut alors conclure que $\dfrac{\rho(t+T_0)}{\rho(t)} = \gamma$ est indépendant de $t$.

**II.2.** **a.** Comme $x$ ne s'annule pas, $\rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (théorème du relèvement) donc il existe des solutions à l'équation différentielle $\tau' = \rho(\tau)$.

**b.** – Si $\gamma < 1$ alors $\max\limits_{t\in[0,T_0]}\tilde\rho(t+T_0) = \gamma\max\limits_{t\in[0,T_0]}\tilde\rho(t) = \gamma M$ en posant $M = \max\limits_{t\in[0,T_0]}\tilde\rho(t)$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\max\limits_{t\in[0,T_0]}\tilde\rho(t+nT_0) = \gamma^n M$ d'abord pour $n\in\mathbb{N}$ puis on étend cette égalité à $\mathbb{Z}$.
On a alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\tilde\rho(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}\tilde\rho(t) = +\infty$. On en déduit tout d'abord que $\lim\limits_{t\to-\infty}\tau(t) = -\infty$ puis que $\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t) = b$. Donc $x$ est défini sur $]-\infty, b[$.

– Si $\gamma > 1$, la situation est inversée, $x$ est défini sur $]a,+\infty[$.

– Si $\gamma = 1$ alors $\tilde\theta$ et $\tilde\rho$ sont $T_0$-périodiques, $\tilde\rho$ est bornée donc $\tau$ est définie sur $\mathbb{R}$, $x$ est défini sur un intervalle $]a,b[$.

**c.** Pour $\gamma > 1$ ou $\gamma < 1$ on obtient des courbes semblables à celles ci

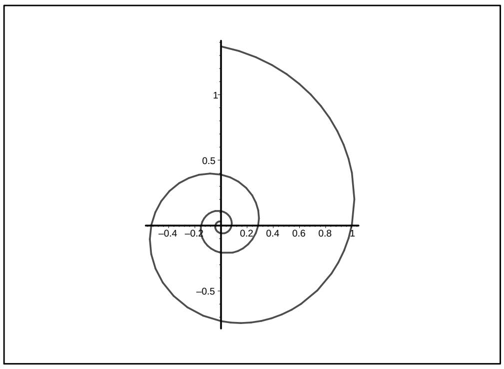



FIG. 1. $\gamma > 1$

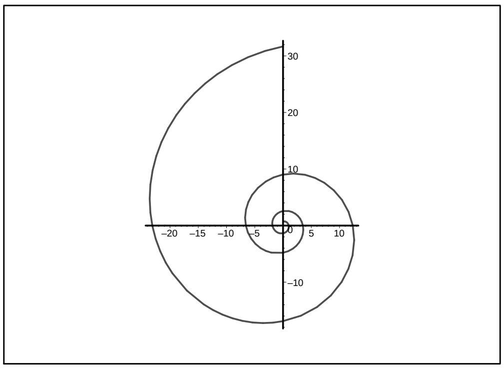
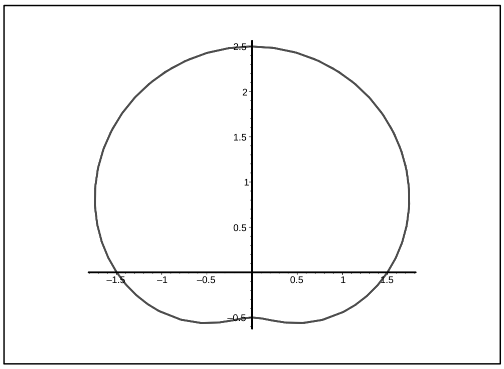



FIG. 2. $\gamma < 1$




et pour $\gamma = 1$, si $\tau(\mathbb{R})$ contient un intervalle fermé de longueur supérieure ou égale à $T_0$, on obtient une courbe fermée.

FIG. 3. $\gamma = 1$

**d.** Ici, on suppose que $a > -\infty$.
Sur $]a, b[$, $\rho > 0$ donc $\tau' > 0$ i.e. $\tau$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]-\infty, +\infty[$ sur $]a, +\infty[$ donc $\tau^{-1}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]a, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $\theta$ une détermination de l'angle de la demi-droite $\Delta$, on s'intéresse aux solutions de l'équation $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t)) = \theta[2\pi]$.

- On suppose qu'il existe $t_0 > a$, plus petite des solutions de cette équation, on a donc $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t_0)) = \theta$ et $t_j$ vérifie $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t_j)) = \theta + 2j\pi$ soit $\tau^{-1}(t_j) = \tau^{-1}(t_0) + jT_0$, si on pose $u_0 = \tau^{-1}(t_0)$, ceci s'écrit $t_j = \tau(u_0 + jT_0)$. On a $\dfrac{\rho(t_{j+1})}{\rho(t_j)} = \dfrac{\tilde{\rho}(u_0 + (j+1)T_0)}{\tilde{\rho}(u_0 + jT_0)} = \gamma$ (ce qui permet d'affirmer que les $x(t_j)$ sont effectivement distincts).
- Si l'équation $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t)) = \theta[2\pi]$ n'a pas de plus petite solution alors les solutions seront indicées par $\mathbb{Z}$.

Finalement

$$\begin{aligned}\tau(u_0 + (j+1)T_0) - \tau(u_0 + jT_0) &= \int_{u_0+jT_0}^{u_0+(j+1)T_0} \tilde{\rho}(v)\,\mathrm{d}v = \int_{u_0+(j-1)T_0}^{u_0+jT_0} \tilde{\rho}(v + T_0)\,\mathrm{d}v \\ &= \gamma \int_{u_0+(j-1)T_0}^{u_0+jT_0} \tilde{\rho}(v)\,\mathrm{d}v = \gamma(\tau(u_0 + jT_0) - \tau(u_0 + (j-1)T_0))\end{aligned}$$

donc $\dfrac{t_{j+1} - t_j}{t_j - t_{j-1}} = \gamma$.

# Partie III

**III.1.** **a.** C'est toujours la même histoire : posons $\tilde{\theta}(t_0) \in ]\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2k\pi[$. On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\theta}(t) \notin ]\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2k\pi[ (\mod 2\pi)$, par exemple $\tilde{\theta}(t) \leqslant \theta_1 + 2k\pi$. Grâce au T.V.I., on en déduit l'existence de $t_1 \in [t_0, t]$ tel que $\tilde{\theta}(t_1) = \theta_1 + 2k\pi$. La fonction $\tilde{\theta}_1$ constante égale à $\theta_1 + 2k\pi$ est solution de l'équation différentielle (3) et par unicité, on a $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}$ d'où $\tilde{\theta}_1(t_0) \neq \theta_1 + 2k\pi$ ce qui est contradictoire.
Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{\theta}(t) \in ]\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2k\pi[$ (ce qui est plus précis que le résultat demandé).
Compte tenu des hypothèses, $\chi'$ est positive à droite de $\theta_1$ et à gauche de $\theta_2$ et comme $\chi$ ne s'annule pas sur $]\theta_1, \theta_2[$, elle garde un signe constant qui est $> 0$. On suppose par la suite que $k = 0$ pour simplifier l'écriture.
Supposons encore par l'absurde que $\lim\limits_{t \to +\infty} \tilde{\theta}(t) = A < \theta_2$, on procède comme au **II.1.b** : sur $[\tilde{\theta}(0), A]$, $\chi$ est une fonction continue strictement positive donc elle est minorée par $m > 0$, dans ce cas

$$\tilde{\theta}(t) = \int_0^t \chi(\tilde{\theta}(u))\,\mathrm{d}u + \tilde{\theta}(0) \geqslant tm + \tilde{\theta}(0)$$

et donc $\tilde{\theta}(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ ce qui est contradictoire. Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_2$, de même $\lim\limits_{t \to -\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_1$.
Ensuite $\dfrac{\tilde{\rho}'(t)}{\tilde{\rho}(t)} \to \psi(\theta_2)$ quand $t \to +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^t \frac{\tilde{\rho}'(u)}{\tilde{\rho}(u)}\,\mathrm{d}u \to \varepsilon\infty$ où $\varepsilon$ est le signe de $\psi(\theta_2)$.
On en déduit que $\ln \dfrac{\tilde{\rho}(t)}{\tilde{\rho}(0)} \to \varepsilon\infty$.
En $-\infty$ on aura $\ln \dfrac{\tilde{\rho}(t)}{\tilde{\rho}(0)} \to -\varepsilon'\infty$ où $\varepsilon'$ est du signe de $\psi(\theta_1)$.
Conclusion : on a ainsi 4 cas

| | $\psi(\theta_1) > 0$ | $\psi(\theta_1) < 0$ |
|---|---|---|
| $\psi(\theta_2) > 0$ | $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\rho(t) = +\infty$<br>$\lim\limits_{t\to-\infty} \tilde\rho(t) = 0$ | $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\rho(t) = +\infty$<br>$\lim\limits_{t\to-\infty} \tilde\rho(t) = +\infty$ |
| $\psi(\theta_2) > 0$ | $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\rho(t) = 0$<br>$\lim\limits_{t\to-\infty} \tilde\rho(t) = 0$ | $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\rho(t) = 0$<br>$\lim\limits_{t\to-\infty} \tilde\rho(t) = +\infty$ |

**b.** Si $\tilde\theta(0) = \theta_1$ alors, compte tenu du raisonnement fait ci-dessus, $\tilde\theta(t) = \theta_1$ (fonction constante) et $\dfrac{\tilde\rho'(t)}{\tilde\rho(t)} = \psi(\theta_1)$ soit $\tilde\rho(t) = \exp[t\psi(\theta_1)]$. C'est pareil avec $\tilde\theta(0) = \theta_2$.

Si $\tilde\theta(0) \notin [\theta_1, \theta_2]( \mod 2\pi)$ alors on peut reprendre l'étude du **1.a** avec $]\theta_2, 2\pi + \theta_1[$ et on aura les mêmes conclusions en prenant $\theta_1' = \theta_2$ et $\theta_2' = 2\pi + \theta_1$ mais comme $\tilde\theta$ est décroissante alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\theta(t) = \theta_2$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \tilde\theta(t) = \theta_1 + 2\pi$.

**III.2.** – En fait, il s'agit de 2 demi-droites d'angle $\theta_1$ et $\theta_2$. Si $x_0$ est sur l'une de ces demi-droites, alors on se retrouve dans les cas traités à la question précédente, $\tilde\theta$ est constante et vaut $\theta_1$ ou $\theta_2$.

– Si $\tilde\theta(0)$ ne prend pas l'une de ces 2 valeurs (modulo $2\pi$) alors $\tilde\rho(t) \to +\infty$ quand $t \to \pm\infty$ vu le tableau fait au **1.a**. Comme $\tau'(t) = \tilde\rho(t)$ et que $\rho > 0$ et continue, il existe $m > 0$ tel que $\tau' \geqslant m$ ce qui entraîne que $\tau$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On peut donc affirmer que $x(t)$ ne passe jamais par l'origine et et définie sur $\mathbb{R}$ en entier.

– Pour déterminer les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$, il suffit d'étudier les limites de $\tilde\rho(t)\sin(\tilde\theta(t) - \theta_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

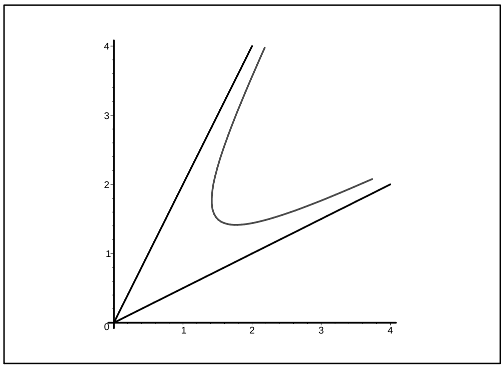
$\dfrac{\tilde\rho'(t)}{\tilde\rho(t)} \to \psi(\theta_i)$ donc, par intégration, on obtient $\ln\tilde\rho(t) \sim t\psi(\theta_i)$ (déjà vu au **1.a**). Ensuite $\tilde\theta'(t) = \chi(\tilde\theta(t)) = (\tilde\theta(t) - \theta_i)\chi'(\theta_i) + o(\tilde\theta(t) - \theta_i)$ soit $\dfrac{\tilde\theta'(t)}{\tilde\theta(t) - \theta_i} = \chi'(\theta_i) + o(1)$. Alors, en intégrant, on obtient

$$\int_0^t \frac{\tilde\theta'(t)\,\mathrm{d}t}{\tilde\theta(t) - \theta_i} = t\chi'(\theta_i) + o(t)$$

d'où $|\tilde\theta(t) - \theta_i| = C\,\mathrm{e}^{t\chi'(\theta_i) + o(t)}$.

Finalement $\tilde\rho(t)\sin(|\tilde\theta(t) - \theta_i|) = \mathrm{e}^{t(\psi(\theta_i) + \chi'(\theta_i) + o(1))}\,C$ et on admettra que cette quantité tend vers 0 (...).

Les asymptotes seraient alors les demi-droites d'angle $\theta_1$ et $\theta_2$. On obtient alors les courbes suivantes



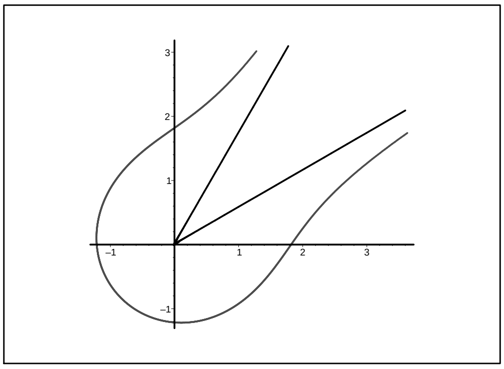




Fig. 4

Fig. 5

**III.3.** On suppose toujours que $x_0$ n'est pas sur les demi-droites d'angle $\theta_1$ ou $\theta_2$, on obtient alors les courbes

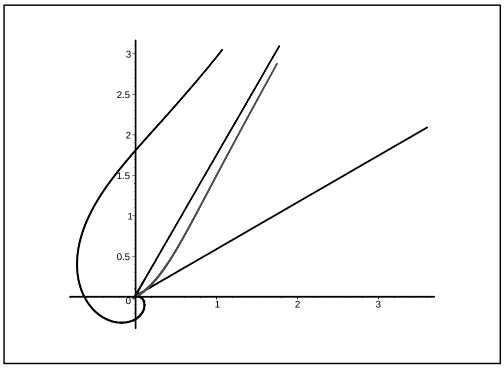



FIG. 6

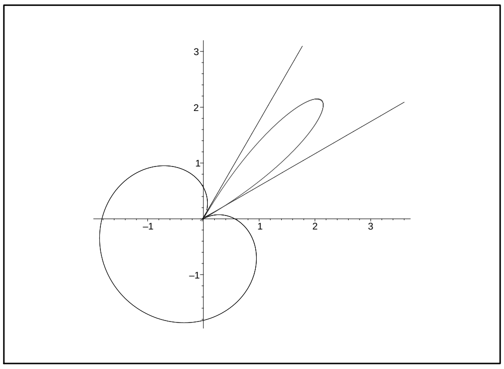



FIG. 7

La figure 6 correspond au cas où $\psi(\theta_1).\psi(\theta_2) > 0$ : les deux valeurs sont de même signe et les cas $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta_2 < \theta < \theta_1 + 2\pi$ sont tout à fait semblables. Il n'y a qu'une seule asymptote et les intervalles de définition des solutions maximales sont de la forme $[a, +\infty[$ où $]-\infty, b]$.
La figure 7 traite le cas où $\psi(\theta_1) > 0$ et $\psi(\theta_2) < 0$ : il n'y a pas d'asymptote et les intervalles de définition des solutions maximales sont de la forme $[a, b]$.

**III.4.** **a.** Avec $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, on prend $\chi(\theta) = \sin\theta$ et $\psi(\theta) = \cos\theta$ ce qui donne $\phi(x) = \dfrac{x^2}{|x|^2}$ en complexes.

**b.** On résout alors les équations $\tilde{\theta}' = \sin\tilde{\theta}$ et $\tilde{\rho}' = \cos\tilde{\theta}.\tilde{\rho}$ :

– Sur $]0, \pi[$ on peut écrire $\dfrac{\tilde{\theta}'}{\sin\tilde{\theta}} = 1$ équation différentielle à variables séparables ce qui donne par intégration $\tilde{\theta} = 2\operatorname{Arctan} \mathrm{e}^t$, $t \in \mathbb{R}$ (à une translation du paramétre près).

– On résout maintenant $\dfrac{\tilde{\rho}'}{\tilde{\rho}} = \cos(2\operatorname{Arctan}\mathrm{e}^t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^t} = -\operatorname{th} t$ ce qui donne $\tilde{\rho}(t) = \dfrac{C}{\operatorname{ch} t}$, $C > 0$.

– On intègre alors $\tau'(t) = \tilde{\rho}(t) = \dfrac{C}{\operatorname{ch} t}$ d'où $\tau(t) = C2\operatorname{Arctan}\mathrm{e}^t = C\tilde{\theta}$.

– On pose $u = \tau(t)$ soit $\tilde{\theta}(t) = \dfrac{u}{C}$ et $\theta(u) = \tilde{\theta}(t)$ ce qui donne $\rho(\theta) = 2C\sin\theta$ soit encore

$$x(u) = 2C\sin\frac{u}{C}\,\mathrm{e}^{iu/C},\ \ u \in [0, C\pi]$$

On revient alors à la variable $t$ ($u \to t$), les solutions de (1) au sens 1 seront données par

$$x(t) = 2\frac{t_{i+1} - t_i}{\pi}\sin\frac{\pi(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i}\,\mathrm{e}^{i\pi(t-t_i)/(t_{i+1}-t_i)},\ \ t \in ]t_i, t_{i+1}[$$

avec $t_0 = a,\ t_N = b$.

**c.** Dans ce cas, les solutions au sens 2 se distinguent des solutions au sens 1 par le fait qu'il peut y avoir une infinité de $t_i$.

# Partie IV

**IV.1.** On utilise ici la formule intégrale de Taylor :

$$\chi(\theta_2 + \alpha) - \underbrace{\chi(\theta_2)}_{=0} - \alpha\chi'(\theta_2) = \int_{\theta_2}^{\theta_2+\alpha} (\alpha + \theta_2 - t)\chi''(t)\,\mathrm{d}t = \alpha^2\int_0^1 (1 - u)\chi''(\alpha u + \theta_2)\,\mathrm{d}u$$

en posant $t - \theta_2 = \alpha u$.
Ainsi $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)\chi''(\alpha u+\theta_2)\,\mathrm{d}u$. On utilise alors le théorème de continuité et de dérivabilité sous le signe intégral :
– $u \in [0, 1] \mapsto (1 - u)\chi''(\alpha u + \theta_2)$ est continue (pour la continuité),
– $u \in [0, 1] \mapsto u(1 - u)\chi'''(\alpha u + \theta_2)$ est continue (pour la dérivée),
– $\alpha \in [0, 1] \mapsto (1 - u)\chi''(\alpha u + \theta_2)$ est continue (pour la continuité),

– $\alpha \in [0,1] \mapsto u(1-u)\chi'''(\alpha u+\theta_2)$ est continue (pour la dérivée),
– $|(1-u)\chi''(\alpha u+\theta_2)|$ est borné (fonction continue sur un compact), hypothèse de domination (pour la continuité),
– $|u(1-u)\chi'''(\alpha u+\theta_2)|$ est borné (fonction continue sur un compact), hypothèse de domination (pour la dérivée).

Alors, $f$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ (et vu que $\chi$ est $\mathcal{C}^\infty$, il en sera de même de $f$...).

**IV.2.** $u'(t) = \tilde\theta'(t) = \chi(\tilde\theta(t)) = \chi(u(t)+\theta_2)$ qui donne l'équation différentielle vérifiée par $u$, mais on peut aussi faire intervenir $f$ et le résultat précédent ce qui donne

$$u'(t) = u(t)\chi'(\theta_2) + u(t)^2 f(u(t))$$

qui est peut-être l'équation attendue...

On a vu au **III.1.a** que, s'il existe $t_0$ tel que $\tilde\theta(t_0) \in ]\theta_1,\theta_2[$ alors $\tilde\theta(t) \in ]\theta_1,\theta_2[$ pour tout $t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\theta(t) = \theta_2$ soit $u(t)\to 0$ et $u(t)<0$.

De même, s'il existe $t_0$ tel que $\tilde\theta(t_0) \in ]\theta_2,\theta_1+2\pi[$ alors $\tilde\theta(t) \in ]\theta_2,\theta_1+2\pi[$ pour tout $t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\theta(t) = \theta_2$ soit $u(t)\to 0$ et $u(t)>0$.

**IV.3.** On réécrit l'équation vérifiée par $u$ : $u' = u.[\chi'(\theta_2)+uf(u)]$ or $\lim\limits_{t\to+\infty}(\chi'(\theta_2)+uf(u)) = \chi'(\theta_2)$ donc, pour $t \geqslant t_0$ assez grand, on aura $\chi'(\theta_2)+uf(u) < \dfrac{3}{4}\chi'(\theta_2)$ (ne pas oublier que $\chi'(\theta_2)<0$).

Posons provisoirement $\gamma = \dfrac{3}{4}\chi'(\theta_2)$ alors $\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} u\right)' = \mathrm{e}^{-\gamma t}(u'-\gamma u) < 0$ donc, en intégrant, $\mathrm{e}^{-\gamma t} u(t) \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma t_0} u(t_0)$ soit $u(t) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{3(t-t_0)\chi'(\theta_2)}{4}} u(t_0) = K\,\mathrm{e}^{\frac{3t}{4}\chi'(\theta_2)}$.

**IV.4.** On déduit de ceci que $0 < u(t)\,\mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)t} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac14\chi'(\theta_2)t}\,\mathrm{e}^{-\frac34 t_0\chi'(\theta_2)}\,u(t_0)$ mais cela ne permet pas de conclure car la dernière quantité tend vers $+\infty$. Il faut faire encore un petit effort : en effet, si on note $M$ un majorant de $f$ (fonction continue définie sur un segment)

$$\begin{aligned}
u(t)\,\mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)t} - u(t_0) &= \int_{t_0}^{t} \left(\mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,u(v)\right)' \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}[u'(v)-\chi'(\theta_2)u(v)]\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,u^2(v)f(u(v))\,\mathrm{d}v \qquad \text{en utilisant l'équation du } \textbf{IV.2} \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,u^2(v)M\,\mathrm{d}v \qquad \text{car } f(u(v)) \leqslant M
\end{aligned}$$

or $0 < \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,u^2(v)M \leqslant \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,K^2\,\mathrm{e}^{\frac{3t}{2}\chi'(\theta_2)}\,M = MK^2\,\mathrm{e}^{\frac12\chi'(\theta_2)}$ qui est intégrable donc il existe $C_0$ tel que $u(t)\,\mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)t} \to C_0$.

**IV.5.** Si on majore $u^2(v)M$ par $C_3\,\mathrm{e}^{2\chi'(\theta_2)v}$ pour $v \geqslant t_0$, en vertu de la question **IV.4**, alors, en reprenant l'étude faite ci-dessus,

$$\begin{aligned}
C_0 - u(t)\,\mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)t} &= \int_{t}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,u(v)\right)' \mathrm{d}v = \int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}[u'(v)-\chi'(\theta_2)u(v)]\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,u^2(v)f(u(v))\,\mathrm{d}v \leqslant \int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,u^2(v)M\,\mathrm{d}v \\
&\leqslant C_3 \int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\chi'(\theta_2)v}\,\mathrm{e}^{2\chi'(\theta_2)v}\,\mathrm{d}v = \frac{-C_3}{\chi'(\theta_2)}\,\mathrm{e}^{\chi'(\theta_2)t} \qquad \text{en majorant } u^2(v)M.
\end{aligned}$$

Fort de ce résultat remarquable, on peut continuer notre petit bonhomme de chemin vers la “solution”, il suffit de remplacer $u(t)$ par $\tilde\theta(t)-\theta_2$ et de multiplier par $\mathrm{e}^{\chi'(\theta_2)t}$.

**IV.6.** **a.** On écrit le développement de $\psi$ au voisinage de $\theta_2$ :

$$\psi(\tilde\theta(t)) = \psi\left(\theta_2 + C_0\,\mathrm{e}^{\chi'(\theta_2)t} + O\left(\mathrm{e}^{2\chi'(\theta_2)t}\right)\right) = \psi(\theta_2) + C_0\psi'(\theta_2)\,\mathrm{e}^{\chi'(\theta_2)t} + O\left(\mathrm{e}^{2\chi'(\theta_2)t}\right)$$

puis on exprime la dérivée de $\tilde{\rho}(t)\,\mathrm{e}^{-t\psi(\theta_2)}$ :

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\rho}(t)\,\mathrm{e}^{-t\psi(\theta_2)}\right)' &= \tilde{\rho}'(t)\,\mathrm{e}^{-t\psi(\theta_2)} - \tilde{\rho}(t)\psi(\theta_2)\,\mathrm{e}^{-t\psi(\theta_2)}\\ &= \mathrm{e}^{-t\psi(\theta_2)}\left[C_0\psi'(\theta_2)\tilde{\rho}(t) + O\left(\tilde{\rho}(t)\,\mathrm{e}^{2\chi'(\theta_2)t}\right)\right] \to C_0\psi'(\theta_2).\end{aligned}$$

Si $\psi'(\theta_2) \neq 0$ alors, par intégration, on obtient $\tilde{\rho}(t) \sim C_0\psi'(\theta_2)t\,\mathrm{e}^{t\psi(\theta_2)}$,
sinon $\left(\tilde{\rho}(t)\,\mathrm{e}^{-t\psi(\theta_2)}\right)' = O\left(\tilde{\rho}(t)\,\mathrm{e}^{2\chi'(\theta_2)t}\right)$ qui est intégrable d'où l'existence d'une constante $C_4$ telle que $\tilde{\rho}(t) \sim C_4\,\mathrm{e}^{t\psi(\theta_2)}$.
*Remarque* : ici $\tilde{\rho}(t)\sin(\tilde{\theta}(t)-\theta_2) \sim C_0C_4\,\mathrm{e}^{t(\psi(\theta_2)+\chi'(\theta_2))}$ ce qui permet de préciser le résultat du **III.2**. En particulier, si $\psi(\theta_2)+\chi'(\theta_2) > 0$, on n'a pas d'asymptote...

**b.** Si $\psi'(\theta_2) \neq 0$, comme $\tau'(u) = \tilde{\rho}(u)$ alors

$$\begin{aligned}\tau(t) = \tau(0) + \int_0^t \tau'(u)\,\mathrm{d}u &\sim C_0\psi'(\theta_2)\int_0^t u\,\mathrm{e}^{u\psi(\theta_2)}\,\mathrm{d}u\\ &\sim \frac{C_0\psi'(\theta_2)}{\psi(\theta_2)}t\,\mathrm{e}^{t\psi(\theta_2)}.\end{aligned}$$

Si $\psi'(\theta_2) = 0$ alors, toujours par intégration des relations de comparaison (qui est hors programme), $\tau(t) \sim \dfrac{C_4}{\psi(\theta_2)}\,\mathrm{e}^{t\psi(\theta_2)}$.

**c.** On distingue toujours les 2 mêmes cas :

– Si $\psi'(\theta_2) \neq 0$ alors, comme $\tau(t) \sim \dfrac{C_0\psi'(\theta_2)}{\psi(\theta_2)}t\,\mathrm{e}^{t\psi(\theta_2)}$,

$$\tilde{\rho}(t) = \rho(\tau(t)) \sim C_0\psi'(\theta_2)t\,\mathrm{e}^{t\psi(\theta_2)} \sim K\tau(t)$$

soit $\rho(u) \sim \psi(\theta_2)u$ en posant $u = \tau(t)$ puis

$$\begin{aligned}x(t) = \rho(t)\,\mathrm{e}^{i\theta(t)} &\sim \psi(\theta_2)t\,\mathrm{e}^{i\theta_2}\,\mathrm{e}^{i(\theta(t)-\theta_2)}\\ &\sim \psi(\theta_2)t\,\mathrm{e}^{i\theta_2}.\end{aligned}$$

– Si $\psi'(\theta_2) = 0$ on trouve en fait le même résultat.