

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1991

DEUXIEME EPREUVE

OPTION M

MATHEMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS

- $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n de termes réels ; n est un entier, $n \geq 1$.
- L'espace vectoriel \mathbb{R}^n sera supposé muni de la norme euclidienne ; c'est-à-dire, en désignant les vecteurs de \mathbb{R}^n par des matrices-colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \|X\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ sera muni de la norme d'opérateur associée ; pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

- Il sera admis que pour tout couple de matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, l'inégalité $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$ a lieu.

PARTIE I

Quelques propriétés de l'exponentielle de matrices

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

I.1.a. Etablir que la série de matrices de terme général U_k défini par :

$$U_0 = I_n ; \quad U_k = \frac{1}{k!} A^k, \quad k = 1, 2, \dots \text{ est convergente.}$$

Soit $\exp A$ la somme de cette série : $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

b. Démontrer l'inégalité : $\|\exp A\| \leq \exp \|A\|$.

c. Etablir la relation : $B \cdot \exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B A^k$.

Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer sur les matrices $\exp A_1$ et $\exp A_2$, lorsque A_1 et A_2 sont deux matrices semblables ?

I.2. Il sera admis que si deux matrices A et B commutent, alors :

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B.$$

Soient les trois matrices de $M_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\exp D$, $\exp E$ et $\exp F$; comparer $\exp E$ et le produit $\exp D \cdot \exp F$.

A SUIVRE

I.3. Soit f_A la fonction de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $f_A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$.

a. Etablir que f_A est continue de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Exprimer, en fonction de $f_A(x)$ et de I_n , l'expression $A \cdot \int_0^x f_A(t) dt$ où x est un réel ; en déduire que la fonction f_A est dérivable et calculer sa dérivée. Montrer que f_A est indéfiniment dérivable.

I.4.a. Soit θ un réel donné et soit C_θ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\exp(C_\theta)$. Est-ce que l'application $A \mapsto \exp A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est injective ?

b. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer que la matrice $\exp(A) - I_n$ peut s'écrire $A(I_n + S_A)$. Etablir qu'il existe un réel α ($\alpha > 0$) tel que $\|A\| < \alpha$ implique $\|S_A\| < 1$.

c. Soit T une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; établir que si $\|T\| < 1$, la matrice $I_n + T$ est inversible (démontrer par exemple que le seul vecteur X de \mathbb{R}^n tel que $(I_n + T)X$ est nul, est le vecteur nul).

d. Soit M une matrice appartenant à la boule ouverte $B(0, \alpha)$ de centre la matrice nulle 0 et de rayon α ; α est le réel défini à l'alinéa b ; établir que l'égalité entre les matrices $\exp M$ et I_n est équivalente à la nullité de M .

I.5. Soient B et H deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit k un entier, $k \geq 1$; soit g_k l'application de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$g_k(x) = (B + xH)^k.$$

Les deux matrices B et H ne sont pas supposées commutables.

a. Etablir que la fonction g_k est continûment dérivable ; calculer les dérivées des fonctions g_1, g_2, g_3 puis de la fonction g_k .

b. En déduire l'inégalité : $\|(B + H)^k - B^k\| \leq k \|H\| \cdot (\|B\| + \|H\|)^{k-1}$.

I.6. Soit x un réel, $x > 0$; soit $T(A, x)$ la matrice définie par la relation :

$$T(A, x) = \frac{1}{x^2} (\exp(xA) - I_n - xA).$$

a. Démontrer que la fonction $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge par continuité en 0 . Donner un majorant simple de sa norme en utilisant l'expression de $T(A, x)$ au moyen d'une intégrale (par exemple).

b. Soit k un entier, $k \geq 1$; en remarquant la relation

$$\left(I_n + \frac{1}{k} A\right)^k - \exp(A) = \left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right) - \frac{1}{k^2} T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right)^k - \left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right)\right)^k$$

et en utilisant l'inégalité établie en I.5., déterminer la limite de la suite de matrices de terme

$$\text{général : } \left(I_n + \frac{1}{k} A\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

c. Démontrer que l'application $A \mapsto \det A$ ($\det A$ est le déterminant de A) est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

Déterminer le développement limité (en $\frac{1}{k}$) de $\det\left(I_n + \frac{1}{k} A\right)$, contenant les deux premiers termes.

En déduire la valeur du déterminant de la matrice $\exp(A)$.

I.7. Soit x un réel, $x > 0$. Soit $U(A, B; x)$ la matrice définie par la relation :

$$U(A, B; x) = \frac{1}{x^2} (\exp(xA) \cdot \exp(xB) - I_n - x(A+B)) .$$

- a. Démontrer que la fonction $x \mapsto U(A, B; x)$ se prolonge par continuité en 0 ; donner un majorant de sa norme.
- b. Soit k un entier, $k \geq 1$; déterminer, lorsque k croît indéfiniment, la limite de l'expression :

$$P_k = \left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{k} B\right) \right)^k - \left(I_n + \frac{1}{k}(A+B) \right)^k .$$

- c. En déduire, lorsque k croît indéfiniment, la limite de la suite des matrices :

$$Q_k = \left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{k} B\right) \right)^k .$$

PARTIE II

Groupes à un paramètre

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$; G est dit groupe à un paramètre s'il existe un homomorphisme continu et surjectif du groupe additif \mathbb{R} dans G ; G est muni de la distance induite par la norme de $M_n(\mathbb{R})$.

Le but de cette partie est de montrer, après avoir donné l'exemple du sous-groupe $f_A(\mathbb{R})$, que tout sous-groupe à un paramètre est de ce type.

II.1. Démontrer que, pour une matrice A donnée de $M_n(\mathbb{R})$, l'application f_A est un homomorphisme continu du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$; en déduire que $f_A(\mathbb{R})$ est un groupe à un paramètre.

II.2. Démontrer que le groupe $O^+(2)$ des matrices orthogonales de déterminant égal à +1 est un groupe à un paramètre. Déterminer une matrice A telle que $f_A(\mathbb{R})$ soit $O^+(2)$.

II.3. Soit α un réel strictement positif ; donner un exemple de fonction g_α positive continûment dérivable, définie sur \mathbb{R} , nulle en dehors de l'intervalle $[-\alpha, +\alpha]$ et

telle que :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} g_\alpha(u) du = 1 .$$

Vérifier brièvement que les fonctions g_α et g'_α sont uniformément continues sur toute la droite réelle.

Soit Φ un homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} dans $GL_n(\mathbb{R})$, continu pour la distance induite dans $GL_n(\mathbb{R})$ par la norme de $M_n(\mathbb{R})$. Soient M_α , et, pour un réel t , $\psi(t)$ les matrices définies par les relations :

$$M_\alpha = \int_{-\alpha}^{+\alpha} g_\alpha(u) \Phi(-u) du \quad , \quad \psi(t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t-u) \Phi(u) du .$$

II.4.a. Soit t_0 un réel donné ($t_0 > 0$) ; démontrer que si $t \in [-t_0, t_0]$, on a :

$$\psi(t) = \int_{-t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} g_\alpha(t-u) \Phi(u) du .$$

b. Démontrer que la fonction $\psi : t \mapsto \psi(t)$, définie dans \mathbb{R} , est continûment dérivable.

c. Etablir les relations : $\psi(t) = M_\alpha \cdot \Phi(t) = \Phi(t) \cdot M_\alpha$.

- II.5.a. Démontrer que la matrice M_α admet une limite, lorsque le réel α tend vers 0 .
- b. Montrer qu'il est possible de choisir α de façon que M_α soit inversible.
- c. En déduire que l'homomorphisme Φ , de \mathbb{R} dans $GL_n(\mathbb{R})$, est continûment dérivable.

- II.6.a. Désignons par A la matrice $\Phi'(0)$. Calculer $\Phi'(t)$.
- b. En déduire $\Phi(t)$. Justifier le résultat.

PARTIE III

Algèbres de Lie

Une algèbre de Lie sur \mathbb{R} est un espace vectoriel \mathcal{A} réel muni de la loi de composition interne, notée $[,]$, de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A} : (X,Y) \mapsto [X,Y]$ possédant les propriétés P :

$P_1 : (X,Y) \mapsto [X,Y]$ est une application bilinéaire

$P_2 : \forall (X,Y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, [X,Y] = -[Y,X]$

$P_3 : \forall (X,Y,Z) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}, [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

Le but de cette partie est de donner des exemples d'algèbres de Lie et de montrer qu'une algèbre de Lie peut être construite à partir d'un groupe.

- III.1. Démontrer que l'espace vectoriel de toutes les matrices $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie lorsque la loi de composition interne $[,]$ est l'application :

$$(A,B) \mapsto AB - BA .$$

- III.2. Démontrer que l'espace vectoriel E des matrices de trace nulle et l'espace vectoriel F des matrices antisymétriques sont des algèbres de Lie pour cette même loi de composition $[,]$.

- III.3. Soit G un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$, fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit g l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que l'espace image $f_A(\mathbb{R})$ soit contenu dans G :

$$g = \{ A \mid A \in M_n(\mathbb{R}), f_A(\mathbb{R}) \subset G \} .$$

- a. Démontrer que l'ensemble g n'est pas vide.
- b. Démontrer que g est un espace vectoriel réel.
- c. En admettant la propriété : pour tout couple de matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, $\exp(AB - BA)$ est la limite lorsque l'entier k croît indéfiniment de la suite des matrices :

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k} A\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{k} B\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{k} A\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{k} B\right) \right)^{k^2} ,$$

établir que g est une algèbre de Lie .

- III.4. Soit G l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de déterminant égal à 1 .
(c'est-à-dire $SL_n(\mathbb{R})$) .

Démontrer que G est un sous-groupe fermé ; déterminer l'algèbre de Lie g .

- III.5. Soit g l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques (question III.2.) , montrer que pour toute matrice antisymétrique A, il existe une relation simple entre la matrice $\exp A$ et sa matrice transposée ${}^t(\exp A)$. En déduire un sous-groupe G fermé qui peut servir à construire g comme dans la question III.3. .