

**Partie 1**  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$

**I-1)** La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^*$  et la fonction exponentielle est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Par composition,  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ . On vérifie de même que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^-$ .

Par suite,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ .

**I-2)**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{\substack{X \rightarrow -\infty \\ (X = 1/x)}} e^X = 0 = f(0)$  donc  $f$  est continue à gauche en 0.

**I.3)**  $\rightarrow f$  est continue sur  $]-\infty, 0]$  et de classe  $C^1$  sur  $]-\infty, 0[$ .  
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{X \rightarrow -\infty \\ (X = 1/x)}} X^2 \cdot e^X = 0$  et c'est un réel fini.  
 D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe  $C^1$ ,  
 $f$  est dérivable à gauche en 0 avec  $f'_g(0) = 0$ .

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  donc  $f$  n'est pas continue à droite en 0.  
 L'axe des ordonnées est asymptôte verticale pour la courbe représentative de  $f$ .  
 Par suite,  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0.

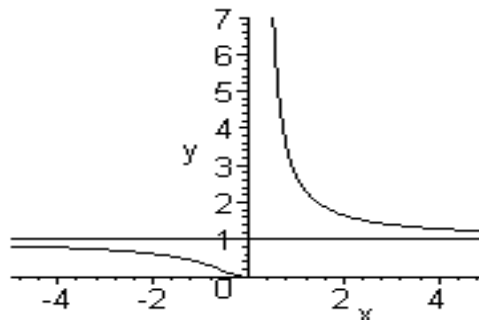
**I.4)**  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 0$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  donc la droite d'équation  $y = 1$  est asymptôte horizontale pour la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$0$	-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Le trait pointillé indique que la courbe est discontinue en 0.

**I-5)** `> plot( {exp(1/x), 1}, x=-5..5, y=0..7, discontin=true, color=black);`



**Partie 2**     $(\mathcal{E}) : x^2 \cdot y' + y = 0$

**II-1)** Sur  $]0, +\infty[$ ,  $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x^2}y = 0$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène résolue en  $y'$ .

Si on pose  $a(x) = \frac{1}{x^2}$  alors  $A(x) = -\frac{1}{x}$  est une primitive de  $a(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

La solution générale de  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est donc  $y = \lambda e^{1/x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**II-2)** Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $\psi_x : t \mapsto \frac{e^{-t/x}}{1+t}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et est positive.

L'intégrale proposée est donc simplement impropre en  $+\infty$ .

$t^2 \psi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} t \times e^{-t/x}$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \psi_x(t) = 0$ .

Pour  $\varepsilon = 1$ ,  $\exists A \geq 1$ ,  $\forall t \geq A$ ,  $t^2 \psi_x(t) \leq 1$  donc  $\forall t \geq A$ ,  $0 \leq \psi_x(t) \leq \frac{1}{t^2}$

Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge, alors  $\int_1^{+\infty} \psi_x(t) dt$  converge.

Par suite,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$  est convergente. On note  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

Note: la positivité de  $\psi_x$  et la convergence de  $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$  donnent l'intégrabilité de  $\psi_x$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**II-3)** On utilise le théorème de Leibniz (théorème de dérivation sous le signe intégral).

On pose  $g(x, t) = \frac{e^{-t/x}}{1+t}$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$  et on note  $I$  le segment  $[a, b]$ .

$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{e^{-t/x}}{1+t} \times \frac{t}{x^2}$  pour tout couple  $(x, t)$  de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ .

$\rightarrow \forall x \in I$ ,  $t \mapsto g(x, t)$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ ,

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = 0$ .

$\rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $I$ .

$\rightarrow \forall (x, t) \in I \times \mathbb{R}_+$ ,  $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{a^2} \frac{te^{-t/b}}{1+t} = \Phi_{a,b}(t)$

La fonction  $\Phi_{a,b}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  car elle est positive et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \Phi_{a,b}(t) = 0$ .

Ce qui donne l'hypothèse de domination de la dérivée partielle par rapport au paramètre.

Par suite,  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $I = [a, b]$  et  $\forall x \in I$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{1+t} dt$ .

**II-4)**  $\rightarrow$  Dans la question précédente, on a vérifié l'hypothèse de domination de la dérivée partielle première par rapport au paramètre sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par suite,  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t/x}}{1+t} dt$ .

$$\rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 \varphi'(x) + \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{te^{-t/x}}{1+t} + \frac{e^{-t/x}}{1+t} \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t/x} dt = [-x.e^{-t/x}]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = x.$$

Donc  $\varphi$  est solution de  $(\mathcal{E}_1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**II-5)**  $(\mathcal{E}_1)$  est une équation différentielle linéaire du premier ordre et  $(\mathcal{E})$  est l'équation homogène associée. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , le coefficient de  $y'$  ne s'annule pas.

On obtient la solution générale de  $(\mathcal{E}_1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  en ajoutant à une solution particulière de  $(\mathcal{E}_1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  la solution générale de  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

La solution générale de  $(\mathcal{E}_1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est donc  $y = \lambda f(x) + \varphi(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Partie 3

**III-1)**  $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$

Donc  $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$

Par suite,  $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{e^{-t/x}}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k e^{-t/x} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-t/x}$ .

**III-2)** Pour tous naturels  $k$  et  $n$  et pour tout réel  $x$  strictement positif,

les fonctions  $\theta_k: t \mapsto t^k e^{-t/x}$  et  $\Psi_n: t \mapsto \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-t/x}$  sont continues et positives sur  $\mathbb{R}_+$ .

Les intégrales à étudier sont donc simplement impropres en  $+\infty$ .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \theta_k(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \Psi_n(t) = 0$  donc, d'après la règle de Riemann,

$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$ , les intégrales  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t/x} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-t/x} dt$  sont convergentes.

Par linéarité des intégrales convergentes, on déduit de la question précédente que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t/x} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-t/x} dt$$

soit  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t/x} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-t/x} dt$ .

**III-3.1)**  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t/x} dt = [-x.e^{-t/x}]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = x$ .  $I_0 = x$ .

**III-3.2)** Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on effectue une intégration par parties dans  $I_{k+1}$ .

On pose  $u(t) = t^{k+1}$  et  $v'(t) = e^{-t/x}$   
d'où  $u'(t) = (k+1)t^k$  et on choisit  $v(t) = -x e^{-t/x}$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ .

Donc  $I_{k+1} = [u(t).v(t)]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + (k+1)xI_k$ .

Ce qui donne:  $\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} = (k+1)xI_k$ .

**III-3.3)** On raisonne par récurrence sur  $k$ .

→ Pour  $k = 0$ ,  $I_0 = x$  et  $0!x^{0+1} = x$  donc l'égalité est vraie.

→ Si, pour un naturel  $k$  donné ( $k \geq 0$ ),  $I_k = k! x^{k+1}$

alors  $I_{k+1} = (k+1)xI_k = (k+1)x.k!.x^{k+1} = (k+1)! x^{k+2}$  d'où l'hérédité.

Par suite:  $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, I_k = k! x^{k+1}}$ .

$$\text{III-4.1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| = \left| \varphi(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k k! x^{k+1} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-t/x} dt.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{1+t} \leq 1 \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t/x} dt = I_{n+1} = (n+1)! x^{n+2}.$$

Donc  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| \leq (n+1)! x^{n+2}}$ .

$$\text{III-4.2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)! x^{n+2} = \frac{(n+1)!}{10^{n+2}} > 0.$$

Donc on obtiendra les variations de la suite en comparant  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!}{10^{n+3}} \times \frac{10^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{n+2}{10}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow n+2 \leq 10 \Leftrightarrow n \leq 8 \text{ donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroît de } u_0 \text{ à } u_8.$$

Ensuite,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  donc la suite devient croissante.

On en déduit que:  $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est minimale pour } n = 8}$ .

La calculatrice donne  $\boxed{u_8 = \frac{9!}{10^{10}} \approx 0.00003629}$ .

$$\text{III-4.3)} \quad R_8\left(\frac{1}{10}\right) = \varphi\left(\frac{1}{10}\right) - \sum_{k=0}^8 (-1)^k \frac{k!}{10^{k+1}} \text{ et } \left| R_8\left(\frac{1}{10}\right) \right| \leq u_8 < 10^{-4}.$$

Par suite,  $\boxed{\sum_{k=0}^8 (-1)^k \frac{k!}{10^{k+1}} \text{ est une valeur approchée de } \varphi\left(\frac{1}{10}\right) \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$ .

Il vient:  $\varphi\left(\frac{1}{10}\right) \approx 0,0916$ .

**III-5)** Pour la série entière  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k k! t^{k+1} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} (k-1)! t^k$   $a_k = (-1)^{k-1} (k-1)! \neq 0$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On peut donc utiliser la règle de d'Alembert pour les séries entières.

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k!}{(k-1)!} = k \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = +\infty \text{ et } \boxed{R = 0}.$$

La série ne converge que pour  $t = 0$ .

En particulier,  $\boxed{\text{elle diverge pour } t = \frac{1}{10}}$ .

**III-6)** La série  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k k! x^{k+1}$  n'est convergente pour aucune valeur de  $x$  non nulle donc on ne peut pas utiliser sa fonction somme pour approcher  $\varphi(x)$ .

Par contre, la suite des sommes partielles se rapproche de  $\varphi(x)$  et on a pu déterminer, pour une valeur fixée de  $x$ , la meilleure approximation de  $\varphi(x)$  par une de ces sommes.

Dans le texte proposé, la somme des premiers termes correspond bien à la notion de somme partielle, notion qui a un sens que la série converge ou pas.

**Partie 4**

**IV-1)** On dresse un tableau des valeurs prises par  $k$  et  $u$  lors de l'exécution du programme.

$k$	$u$
	0.1
1	- 0.01
2	0.002
3	- 0.0006
4	0.00024
5	- 0.00012
6	0.000072
7	- 0.0000504
8	0.0000432

La valeur affichée pour  $u$  à la dernière ligne est 0,0000432.

**IV-2)** En langage Maple;

```
> u:=0.1:
  for k from 1 to 8 do u:=-k*u/10 od:
  print(u):
                                0.00004032000000
```

**IV-3)** > u:=0.1:  
 S:=u:  
 for k from 1 to 8  
 do u:=-k\*u/10:  
 S:=S+u  
 od:  
 print(S):

```
                                0.09158192000
```