

Mines PSI 1

Un corrigé

1 La lemniscate de Bernoulli.

Q.1. Soit $M = (x, y)$ avec $x \geq 0$ et $y \leq 0$ un point de la lemniscate. Il existe donc $\theta \in [-\pi/2, 0]$ et $\rho \geq 0$ tel que $M = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ (appartenance au quart de plan) et $r^4 = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta)$ (appartenance à la lemniscate). On en déduit que $r = 0$ ou $r^2 = \cos(2\theta)$. Dans le second cas, $\cos(\theta) \geq 0$ et donc $\theta \in [-\pi/4, 0]$ (sachant que $\theta \in [-\pi/2, 0]$) et $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$. Comme $\cos(2\theta)$ s'annule pour $\theta = \pi/4$, cette dernière condition inclut le premier cas (de nullité de r). On vient donc de montrer que

$$((x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \text{ vérifie (1)}) \Rightarrow (\exists \theta \in [-\pi/4, 0] / M = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \text{ avec } r = \sqrt{\cos(2\theta)})$$

La réciproque est une vérification immédiate. Ainsi une équation polaire de l'intersection de la lemniscate et du quart de plan inférieur droit est

$$\rho = g(\theta) \text{ avec } g : \theta \in [-\pi/4, 0] \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$$

On montre immédiatement que

- (x, y) vérifie (1) ssi $(-x, y)$ vérifie (1)
- (x, y) vérifie (1) ssi $(x, -y)$ vérifie (1)

Comme $(x, y) \mapsto (-x, y)$ envoie le quart de plan inférieur droit sur le quart de plan inférieur gauche et que $(x, y) \mapsto (x, -y)$ envoie le demi-plan inférieur sur le demi plan supérieur, on obtient donc la lemniscate en entier en partant de son intersection avec le le quart de plan inférieur droit puis

- en réalisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (ce qui donne la partie inférieure de la lemniscate)
- en réalisant alors une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (ce qui donne la lemniscate en entier).

Q.2. On a les trois résultats suivants.

- $\theta \mapsto 2\theta$ est une bijection de $[-\pi/4, 0]$ dans $[-\pi/2, 0]$.
- $t \mapsto \cos(t)$ est une bijection de $[-\pi/2, 0]$ dans $[0, 1]$.
- $u \mapsto \sqrt{u}$ est une bijection de $[0, 1]$ dans lui même.

Par résultat de composition, g est donc une bijection de $[-\pi/4, 0]$ dans $[0, 1]$.

Q.3. En notant u_θ le vecteur polaire d'angle θ (i.e. $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$), le quart de lemniscate est paramétré par $\theta \in [-\pi/4, 0] \mapsto g(\theta)u_\theta = M(\theta)$. On passe par l'origine pour $\theta = -\pi/4$ mais g n'est pas dérivable en $-\pi/4$ et on ne peut *a priori* utiliser les méthodes classiques de dérivation pour obtenir la tangente à la courbe en $M(-\pi/4)$ (on ne peut même *a priori* affirmer qu'il en existe une). On revient à la définition de la tangente et on cherche à savoir si $T(\theta) = \frac{\overrightarrow{M(-\pi/4)M(\theta)}}{\|M(-\pi/4)M(\theta)\|}$ admet une limite quand $\theta \rightarrow -\pi/4^+$. Comme $T(\theta) = u_\theta$, on a donc effectivement une tangente portée par la droite polaire d'équation $\theta = -\pi/4$.

D'après les symétrie données plus haut, on a deux tangentes à la lemniscate en l'origine qui sont les droites polaires d'équations $\theta = -\pi/4$ et $\theta = \pi/4$.

Q.4. Dans le demi plan $x \geq 0$, il est clair (au vu du dessin) qu'il existe deux point de la lemniscate correspondant au même ρ . Il ne va donc pas être possible de paramétrer la demi-lemniscate par ρ comme demandé (on ne peut parler DU point de paramètre ρ . Dans ce qui suit, je garde donc la quart de lemniscate inférieur droit.

Soit M un point du quart de lemniscate; il existe $\theta \in [-\pi/4, 0]$ tel que $\overrightarrow{OM(\theta)} = \sqrt{\cos(2\theta)}u_\theta$.

Si on pose $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ on a alors $\rho \in [0, 1]$ et $\cos(2\theta) = \rho^2$. Compte-tenu de la position de θ , on obtient $2\theta = -\arccos(\rho^2)$. Le point est donc aussi sur la courbe paramétrée par $\rho \in [0, 1] \mapsto \rho u_{-\arccos(\rho^2)/2} = P(\rho)$.

Réciproquement, un point $P(\rho)$ avec $\rho \in [0, 1]$ est bien sur le quart de lemniscate et ce quart de lemniscate est bien paramétré par $\rho \in [0, 1] \mapsto P(\rho)$.

Dans la suite, je note $\theta : \rho \mapsto -\arccos(\rho^2)/2$ et on a donc $P(\theta) = \rho u_{\theta(\rho)}$.

Sur $[0, 1[$, $\rho \mapsto P(\rho)$ est dérivable de dérivée $\rho \mapsto u_{\theta(\rho)} + \rho\theta'(\rho)u_{\theta(\rho)+\pi/2}$ et la dérivée de l'abscisse curviligne, norme de cette dérivée (et donc vitesse numérique) vérifie

$$\forall \rho \in [0, 1[, s'(\rho) = \sqrt{1 + \rho^2 \theta'(\rho)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^4}}$$

où on a utilisé la dérivée sur $[0, 1[$ de $\arccos$ qui est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{1-x^2}$.

On remarque que l'équation n'est vérifiée que sur $[0, 1[$ et n'a pas de sens en 1.

2 Le sinus lemniscatique.

Q.5. $f : r \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ est continue sur $[0, 1[$ et le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de 1. Or, $1 - r^4 = (1 - r)(1 + r + r^2 + r^3)$ et donc $f(r) \sim_1 \frac{1}{2\sqrt{1-r}}$ est intégrable au voisinage de 1. f est donc intégrable sur $[0, 1[$ et la quantité σ existe a fortiori.

Q.6. Pour $a \in [0, 1[$, $\int_0^a s'(r) dr$ est la longueur de l'arc de lemniscate entre le point de paramètre $\rho = 0$ (l'origine) et celui de paramètre a . σ , limite de la quantité précédente quand $a \rightarrow 1$, est donc la longueur du quart de lemniscate.

Q.7. $f : r \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$ étant continue sur l'intervalle $] - 1, 1[$ et comme $0 \in] - 1, 1[$, le théorème fondamental nous apprend que F est une primitive de f sur $] - 1, 1[$. Comme f est en réalité de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - 1, 1[$ (par théorème d'opérations), on a donc

$$F \in \mathcal{C}^\infty(] - 1, 1[)$$

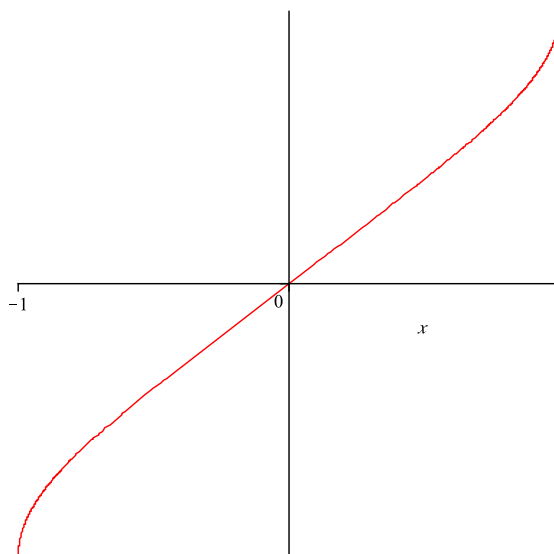
Enfin, c'est par définition de l'intégrale que $F(x) \rightarrow F(1)$ quand $x \rightarrow 1$ et que F est donc continue en 1. La continuité en -1 se prouve de la même façon après avoir prouvé que f est intégrable sur $] - 1, 0]$ (ce qui découle du résultat sur $[0, 1[$ et de la parité de f). Ainsi

$$F \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$$

Q.8. On a vu à la question précédente que

$$\forall x \in] - 1, 1[, F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

F est ainsi strictement croissante sur $] - 1, 1[$ et, étant continue en -1 et 1 , l'est aussi sur $[-1, 1]$. Comme $F'(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow \pm 1$, le théorème de limite de la dérivée (utilisable car $F \in \mathcal{C}^1(] - 1, 1[) \cap \mathcal{C}^0([-1, 1])$ indique que F n'est pas dérivable en ± 1 mais que son graphe admet, en ces points, une demi-tangente verticale. Enfin, la parité de f donne l'imparité de F . L'allure du graphe de F est la suivante



Q.9. Le cours nous indique que $r \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-r}}$ est DSE de rayon de convergence égal à 1 avec

$$\forall r \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-r}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} r^n$$

C'est un cas particulier du développement connu de $r \mapsto (1+r)^\alpha$.

On en déduit que

$$\forall r \in]-1, 1[, F'(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} r^{4n}$$

Par théorème de primitivation, F est DSE (de rayon de convergence égal à celui de F' et donc égal à 1).

Q.10. Comme $F(0)$ et comme on peut primitiver terme à terme les DSE, la question précédente donne

$$\forall r \in]-1, 1[, F(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (4n+1)} r^{4n+1}$$

Q.11. Avec la formule de Stirling, on a

$$b_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (4n+1)} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{4^n 2\pi n n^{2n} e^{-2n} (4n+1)} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi} n^{3/2}}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Si on note $F(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$, on a $a_n = 0$ si $n \neq 1[4]$ et $a_{4n} = b_n$. Les sommes partielles de $\sum(a_n)$ sont majorées par la somme de $\sum(b_n)$ car les termes omis sont nuls et ceux ajoutés sont positifs. La suite de ces sommes partielles étant croissante, elle converge et donc $\sum(a_n)$ converge. Comme

$$\forall r \in]-1, 1[, |a_n r^n| \leq a_n$$

la série entière définissant F est normalement convergente sur $] -1, 1[$. Par théorème de double limite et continuité de F en 1, on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (4n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1) = \sigma$$

Q.12. on a vu en question 8 que F est strictement croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$. Comme elle est aussi continue, le théorème de la bijection réciproque indique que F réalise une bijection de $[-1, 1]$ dans $[F(-1), F(1)] = [-\sigma, \sigma]$. Cette bijection réciproque est continue et impaire car F possède ces propriétés.

Q.13. F étant dérivable à dérivée ne s'annulant pas sur $] -1, 1[$, le cours nous indique que F^{-1} est dérivable sur $] -\sigma, \sigma[$ avec

$$\forall x \in] -\sigma, \sigma[, (F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \sqrt{1 - F^{-1}(x)^4}$$

On remarque que

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} (F^{-1})'(x) = \lim_{x \rightarrow -\sigma} (F^{-1})'(x) = 0$$

Le théorème de limite de la dérivée (déjà cité en question 8) indique que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma, \sigma]$ avec

$$(F^{-1})'(\sigma) = (F^{-1})'(-\sigma) = 0$$

Q.14. Pour montrer qu'une fonction T -périodique est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il suffit que l'on montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, a + T]$ avec la même dérivée à droite en a et à gauche en $a + T$.

Ici, $\mathbf{sl}$ est, par construction, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma, \sigma]$ avec une dérivée à droite en $-\sigma$ et une dérivée à gauche en σ qui sont nulles. Le premier prolongement donne alors une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\sigma, 3\sigma]$ avec une dérivée à droite en σ et une dérivée à gauche en 3σ qui sont nulles. Le raccord se faisant bien en σ , la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\sigma, 3\sigma]$ (avec une dérivée nulle en σ). Et comme les dérivées à droite en $-\sigma$ et gauche en 3σ sont égales, la remarque initiale indique que

$$\mathbf{sl} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

En outre, la formule vue plus haut donne

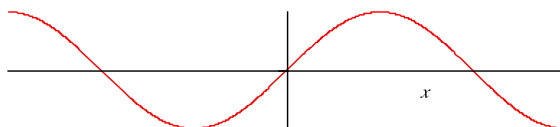
$$\forall x \in [-\sigma, \sigma], \mathbf{sl}'(x) = \sqrt{1 - \mathbf{sl}(x)^4}$$

Comme $\forall y \in [\sigma, 3\sigma]$, $\mathbf{sl}(y) = \mathbf{sl}(2\sigma - y)$, on a aussi

$$\forall x \in [\sigma, 3\sigma], \mathbf{sl}'(x) = -\mathbf{sl}'(2\sigma - x) = -\sqrt{1 - \mathbf{sl}(2\sigma - x)^4} = -\sqrt{1 - \mathbf{sl}(x)^4}$$

$\mathbf{sl}'$ étant périodique, les formules précédentes suffisent pour l'obtenir en tout point.

Q.15. On symétrise le graphe de F par rapport à la première bissectrice, on opère une symétrie par rapport à la droite verticale $x = \sigma$ et on complète par périodicité. On obtient une courbe qui ressemble à une sinusoïde.



3 Equation différentielle.

Q.16. Avec les expressions obtenues en question 14, on obtient que $\mathbf{sl}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\sigma, \sigma]$ avec

$$\forall x \in [-\sigma, \sigma], \mathbf{sl}''(x) = -2\mathbf{sl}'(x)\mathbf{sl}(x)^3(1 - \mathbf{sl}(x)^4)^{-1/2} = -2\mathbf{sl}(x)^3$$

ATTENTION : en σ (resp. $-\sigma$), on n'obtient qu'une dérivée seconde à gauche (resp. à droite) et l'écriture précédente est un peu abusive.

De même, $\mathbf{sl}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\sigma, 3\sigma]$ avec

$$\forall x \in [\sigma, 3\sigma], \mathbf{sl}''(x) = 2\mathbf{sl}'(x)\mathbf{sl}(x)^3(1 - \mathbf{sl}(x)^4)^{-1/2} = -2\mathbf{sl}(x)^3$$

Cette fois on n'obtient qu'une dérivée seconde à gauche (resp. à droite) en 3σ (resp. σ).

Comme les dérivée seconde "directionnelles" sont les mêmes en σ , $\mathbf{sl}$ est en fait deux fois dérivable en ce point (et même à dérivée seconde continue). De même, la dérivée seconde à gauche en 3σ vaut celle à droite en $-\sigma$ (car $\mathbf{sl}$ est 4σ -périodique) et le prolongement par périodicité effectué, c'est à dire $\mathbf{sl}$ est deux fois continument dérivable en $-\sigma$ (et donc 3σ). Finalement,

$$\mathbf{sl} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

De plus, on a vu la formule (5) sur $[-\sigma, 3\sigma]$ et elle reste vraie sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Q.17. Par théorèmes d'opérations, H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = 2f'(x)f''(x) + 4f'(x)f(x)^3 = 0$$

car f est solution de (5) sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ étant un intervalle, H est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Q.18. Remarquons que $(H^{-1/4}f(x))^4 = \frac{f(x)^4}{H} = \frac{f(x)^4}{f'(x)^2 + f(x)^4} \in [0, 1]$ et donc $H^{-1/4}f(x) \in [-1, 1]$. φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. F étant dérivable sur $] -1, 1[$, φ sera dérivable (à dérivée continue) en un point x quand $H^{-1/4}f(x) \in] -1, 1[$ et donc dès que $f'(x)^2 > 0$ d'après le calcul qui précède.

Soit $] \alpha, \beta[$ un intervalle où f' ne s'annule pas. On vient de justifier que $\varphi \in \mathcal{C}^1(] \alpha, \beta[)$ et les théorèmes d'opérations donnent, après calcul,

$$\forall x \in] \alpha, \beta[, \varphi'(x) = H^{1/4} \frac{f'(x)}{|f'(x)|}$$

Par théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $] \alpha, \beta[$. On distingue deux cas

- Si $\forall x \in] \alpha, \beta[, f'(x) > 0$ alors $\forall x \in] \alpha, \beta[, \varphi'(x) = H^{1/4}$. Il existe donc une constante b telle que $\forall x \in] \alpha, \beta[, F(H^{-1/4}f(x)) = \varphi(x) = H^{1/4}x + b$. En particulier, $H^{1/4}x + b$ est dans $[-\sigma, \sigma]$ et en composant par F^{-1} on obtient

$$\forall x \in] \alpha, \beta[, f(x) = H^{1/4}F^{-1}(H^{1/4}x + b) = H^{1/4}\mathbf{sl}(H^{1/4}x + b)$$

- Si $\forall x \in] \alpha, \beta[, f'(x) < 0$ alors $\forall x \in] \alpha, \beta[, \varphi'(x) = -H^{1/4}$. Il existe donc une constante c telle que $\forall x \in] \alpha, \beta[, F(H^{-1/4}f(x)) = \varphi(x) = -H^{1/4}x + c$. En particulier, $-H^{1/4}x + c$ est dans $[-\sigma, \sigma]$ et en composant par F^{-1} on obtient

$$\forall x \in] \alpha, \beta[, f(x) = H^{1/4}F^{-1}(-H^{1/4}x + c) = H^{1/4}\mathbf{sl}(-H^{1/4}x + c)$$

Pour $y \in [-\sigma, \sigma]$, on a $\mathbf{sl}(2\sigma - y) = \mathbf{sl}(y)$. En posant $b = 2\sigma - c$, on obtient alors

$$\forall x \in] \alpha, \beta[, f(x) = H^{1/4}\mathbf{sl}(H^{1/4}x + b)$$

Q.19. Soit $I =]\alpha, \beta[$ tel que $\beta - \alpha > 2\sigma H^{-1/4}$. Si, par l'absurde, f' ne s'annulait pas sur I , la question précédente donnerait l'existence d'une constante b telle que

$$\forall x \in I, f(x) = H^{1/4} \mathbf{sl}(H^{1/4}x + b)$$

Quand x décrit I , $H^{1/4}x + b$ décrit un intervalle ouvert de longueur $H^{1/4}(\beta - \alpha) > 2\sigma$. Sur un tel intervalle, $\mathbf{sl}$ prend au moins l'une des valeurs 1 ou -1 (puisque l'intervalle contient une valeur du type $(2k + 1)\sigma$ avec $k \in \mathbb{Z}$). f prend alors au moins une fois la valeur $H^{1/4}$ ou $-H^{1/4}$ ce qui, avec (6) nie la non annulation de f' sur I . On a donc montré que

$$f' \text{ ne s'annule sur tout intervalle ouvert de longueur } > 2\sigma H^{-1/4}$$

Q.20. Si $f'(x_0) = 0$ alors $f(x_0)^4 = H > 0$ et donc $f''(x_0) = -2f(x_0)^3 \neq 0$. f'' étant continue et non nulle en x_0 , il existe $u_1 < x_0 < u_2$ tels que f'' ne s'annule pas sur $]u_1, u_2[$ (restant en module par exemple plus grande que $|f''(x_0)|/2$ en utilisant la continuité avec $\varepsilon = \frac{|f''(x_0)|}{2}$). f'' garde alors un signe constant (non nul) sur $]u_1, u_2[$ et f' est donc strictement monotone sur cet intervalle et donc injective. Comme elle s'annule en x_0 , elle ne s'annule pas sur $]u_1, x_0[\cup]x_0, u_2[$.

Q.21. L'ensemble $A = \{x > x_0 / f'(x) = 0\}$ est non vide d'après 19 ($]x_0, +\infty[$ contient un intervalle ouvert de longueur $> 2\sigma H^{-1/4}$). Il est minoré par u_2 et possède donc une borne inférieure $x_1 \geq u_2 > x_0$.

Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite (c_n) d'éléments de A qui converge vers x_1 . Par continuité de f' , on a $f'(x_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(c_n) = 0$.

Ainsi, x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de f' . Sur $]x_0, x_1[$, f' ne s'annule pas et il existe donc (question 18) un réel b tel que

$$\forall x \in]x_0, x_1[, f(x) = H^{1/4} \mathbf{sl}(H^{1/4}x + b)$$

$H^{1/4}x_0 + b$ et $H^{1/4}x_1 + b$ doivent annuler $\mathbf{sl}'$ et il existe des entiers k_0, k_1 tels que $H^{1/4}x_0 + b = (2k_0 + 1)\sigma$ et $H^{1/4}x_1 + b = (2k_1 + 1)\sigma$. $x_0 < x_1$ donne $k_0 < k_1$ et si on avait $k_0 < k_1 - 1$ alors $]x_0, x_1[$ serait de longueur $\geq 4\sigma H^{-1/4} > 2\sigma H^{-1/4}$ ce qui contredirait la non annulation de f' sur $]x_0, x_1[$. Finalement $k_1 = k_0 + 1$ et

$$x_1 - x_0 = 2\sigma H^{-1/4}$$

Q.22. En procédant comme ci-dessus, on montre que $x_{-1} = x_0 - 2\sigma H^{-1/4}$ et on a l'existence de constantes b et c telles que

$$\forall x \in]x_0, x_1[, f(x) = H^{1/4} \mathbf{sl}(H^{1/4}x + b)$$

$$\forall x \in]x_{-1}, x_0[, f(x) = H^{1/4} \mathbf{sl}(H^{1/4}x + c)$$

En $H^{1/4}x_0 + b$ et $H^{1/4}x_0 + c$ $\mathbf{sl}'$ s'annule et $\mathbf{sl}$ prend la même valeur ($f(x_0)$ par continuité de f et $\mathbf{sl}$). On en déduit que b et c sont égaux modulo 4σ . $\mathbf{sl}$ étant 4σ périodique, on peut changer c en b en gardant l'égalité précédente. On a finalement (l'égalité en x_0 s'obtenant par continuité de f et $\mathbf{sl}$)

$$\forall x \in]x_{-1}, x_1[, f(x) = H^{1/4} \mathbf{sl}(H^{1/4}x + b)$$

On définit par récurrence les suites (x_n) et (x_{-n}) , x_{n+1} étant défini à partir de x_n comme x_1 l'est à partir de x_0 et x_{-n-1} à partir de x_{-n} comme x_{-1} l'est à partir de x_0 . On montre comme ci-dessus que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists b_k / \forall x \in]x_k, x_{k+2}[, f(x) = H^{1/4} \mathbf{sl}(H^{1/4}x + b_k)$$

En regardant la valeur aux points x_k de f et en utilisant la nullité de f' en ces x_k , on montre comme plus haut que les b_k sont deux à deux égaux modulo 4σ et on conclut par 4σ -périodicité de $\mathbf{sl}$ qu'on peut les choisir égaux. On a ainsi prouvé que la relation (8) est vraie sur la réunion de tous les intervalles $]x_k, x_{k+2}[$ et celle-ci vaut $\mathbb{R}$ (car $x_k = x_0 + 2k\sigma H^{-1/4}$ est de limite infinie quand k tend vers l'infini).

4 Le calcul trigonométrique généralisé.

Q.23. D'après les questions 16 et 17, $\mathbf{sl}'(x)^2 + \mathbf{sl}(x)^4$ est une quantité constante. Comme $\mathbf{sl}(0) = 0$ et $\mathbf{sl}'(0) = 1$, la valeur de cette constante est 1 et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\mathbf{sl}'(x)^2}{1 + \mathbf{sl}(x)^2} = 1 - \mathbf{sl}(x)^2$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{cl}(x)^2 = \frac{1 - \mathbf{sl}(x)^2}{1 + \mathbf{sl}(x)^2}$$

et il en résulte que la relation (10) est vérifiée.

Q.24. On va utiliser la relation (5) et la relation (6)' : $(\mathbf{sl}')^2 = 1 - \mathbf{sl}^4$. Elle nous permettent de montrer que pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} \mathbf{cl}'(x) &= \frac{\mathbf{sl}''(x)(1 + \mathbf{sl}(x)^2) - 2\mathbf{sl}(x)\mathbf{sl}'(x)^2}{(1 + \mathbf{sl}(x)^2)^2} \\ &= -\frac{2\mathbf{sl}(x)}{1 + \mathbf{sl}(x)^2} \end{aligned}$$

On peut alors dériver à nouveau

$$\begin{aligned} \mathbf{cl}''(x) &= \frac{-2\mathbf{sl}'(x) + 2\mathbf{sl}(x)^2\mathbf{sl}'(x)}{(1 + \mathbf{sl}(x)^2)^2} \\ &= \frac{2\mathbf{sl}'(x)(\mathbf{sl}(x)^2 - 1)}{(1 + \mathbf{sl}^2(x))^2} \\ &= -2\mathbf{cl}(x)^3 \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la relation (10) écrite sous la forme $\mathbf{cl}(x)^2 = \frac{1 - \mathbf{sl}(x)^2}{1 + \mathbf{sl}(x)^2}$.

Q.25. D'après la question 22, il existe une constante b telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{cl}(x) = \mathbf{sl}(x + b)$$

puisque la constante H associée à $\mathbf{cl}$ est $\mathbf{cl}'(0)^2 + \mathbf{cl}(0)^4 = 1$. Appliquée en $x = 0$, cette égalité donne $\mathbf{sl}(b) = 1$ et donc $b = \sigma[4\sigma]$. Par 4σ périodicité de σ et avec la symétrie par rapport à $x = \sigma$, on a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{cl}(x) = \mathbf{sl}(x + \sigma) = \mathbf{sl}(\sigma - x)$$

Q.26. On a

$$(1 + \mathbf{sl}(x)^2\mathbf{sl}(y)^2) \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) + 2\mathbf{sl}(x)\mathbf{sl}'(x)\mathbf{sl}(x)^2G(x, y) = \mathbf{sl}'(x)\mathbf{sl}'(y) + \mathbf{sl}(y)\mathbf{sl}''(x)$$

On peut faire le même calcul en changeant les rôles de x et y . L'identité voulue s'écrit alors

$$\mathbf{sl}(y)\mathbf{sl}''(x) - 2\mathbf{sl}(x)\mathbf{sl}'(x)\mathbf{sl}(y)^2G(x, y) = \mathbf{sl}(x)\mathbf{sl}''(y) - 2\mathbf{sl}(y)\mathbf{sl}'(y)\mathbf{sl}(x)^2G(x, y)$$

Compte-tenu de la relation (5), il suffit alors que

$$\mathbf{sl}(x)^2 + \mathbf{sl}'(x)\mathbf{sl}(y)G(x, y) = \mathbf{sl}(y)^2 + \mathbf{sl}'(y)\mathbf{sl}(x)G(x, y)$$

En tenant compte de l'expression de G , ceci revient à montrer que

$$(\mathbf{sl}(y)^2 - \mathbf{sl}(x)^2)(1 + \mathbf{sl}(y)^2\mathbf{sl}(x)^2) = \mathbf{sl}'(x)^2\mathbf{sl}(y)^2 - \mathbf{sl}'(y)^2\mathbf{sl}(x)^2$$

En utilisant la question 14 qui donne $\mathbf{sl}'(x)^2 = 1 - \mathbf{sl}(x)^4$, on vérifie aisément cette relation. On a donc justifié que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : x \mapsto G(x, a-x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, a-x) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, a-x) = 0$. h est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Q.27. En particulier, pour tout a et tout t , $G(t, a-t) = G(0, a) = \mathbf{sl}(a)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, en prenant $t = x$ et $a = x + y$, on obtient $G(x, y) = \mathbf{sl}(x + y)$.

En utilisant l'expression de $G(x, y)$ et la relation $\mathbf{sl}'(x) = (1 + \mathbf{sl}(x)^2)\mathbf{cl}(x)$, on obtient alors

$$\mathbf{sl}(x + y) = \frac{\mathbf{sl}(x)(1 + \mathbf{sl}(y)^2)\mathbf{cl}(y) + \mathbf{sl}(y)(1 + \mathbf{sl}(x)^2)\mathbf{cl}(x)}{1 + \mathbf{sl}(x)^2\mathbf{sl}(y)^2}$$

Q.28. En particulier, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \mathbf{sl}(2y) = \frac{2\mathbf{sl}(y)\mathbf{cl}(y)(1 + \mathbf{sl}(y)^2)}{1 + \mathbf{sl}(y)^4}$$

Appliquons ceci avec $y = F(x)$ pour $x \in [-1, 1]$. Par définition de $\mathbf{sl}$, on a $\mathbf{sl}(y) = x$ et (question 14 avec $y \in [-\sigma, \sigma]$) $\mathbf{sl}'(y) = \sqrt{1 - \mathbf{sl}(y)^4} = \sqrt{1 - x^4}$. On en déduit que $\mathbf{cl}(y) = \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^2}$. On a donc

$$\forall x \in [-\sigma, \sigma], \mathbf{sl}(2F(x)) = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}$$

On compose cette identité par F . Comme $F \circ \mathbf{sl} = Id_{[-\sigma, \sigma]}$, dès que $2F(x) \in [-\sigma, \sigma]$, on aura

$$2F(x) = F\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right)$$

On en déduit que pour $\alpha = F^{-1}(\sigma/2)$ (qui est > 0), on a

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha], 2 \int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$$