I Suites et intégrales

I.A- I.A.1) $\forall x \in [0,+\infty[,\ t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ x \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall t \in]0,+\infty[\ \ 0 \le \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \le \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \varphi(t)$.

Or φ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 donc intégrable $]0,1]$ et $\forall t \in [1,+\infty[\ \ 0 \le \varphi(t) \le \dfrac{2}{t^2}$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Alors <u>f est continue sur $[0,+\infty[$</u>.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue et intégrable (majorée en valeur absolue par φ) sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ x \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{\partial}{\partial x}\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = \dfrac{-(1-\cos t)}{t}e^{-xt}$ et $\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} = (1-\cos t)e^{-xt}$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ t \longmapsto \dfrac{-(1-\cos t)}{t}e^{-xt}$ est continue et intégrable (prolongable en 0 majorée par $2e^{-xt}$ sur $[1,+\infty[)$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ t \longmapsto (1-\cos t)e^{-xt}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall a > 0,\ \forall x \in [a,+\infty[\forall t \in]0,+\infty[,\ |(1-\cos t)e^{-xt}| \le 2e^{-at}$ et $t \longmapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc <u>f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$</u> et $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{-(1-\cos t)}{t}e^{-xt}dt$,

et : $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}dt$.

I.A.2) Les applications $t \longmapsto \dfrac{(1-\cos t)}{t^2}$ et $t \longmapsto \dfrac{(1-\cos t)}{t}$ sont bornées sur $]0,+\infty[$ (prolongeable en 0 et majorées par 2 sur $[1,+\infty[)$, donc $\exists M > 0, \forall x \in]0,+\infty[, |f(x)| \le M\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{M}{x}$ et $|f'(x)| \le M\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{M}{x}$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

IA.3) On peut écrire $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{1}{x} - \mathrm{Re}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}dt = \dfrac{1}{x} - \mathrm{Re}\dfrac{1}{x-i} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$.

Donc $\exists c \in \mathbb{R},\ \ \forall x > 0,\ \ f'(x) = \ln \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $c = 0$ et $\forall x > 0,\ \ f'(x) = \ln \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

I.A.4) D'après la question précédente l'application $x \longmapsto f(x) - [x\ln x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x)]$ est dérivable de dérivée 0 sur $]0,+\infty[$, donc constante.

Or pour x assez grand on a : $x\ln x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) = -\dfrac{x}{2}\ln(1+\dfrac{1}{x^2}) = \dfrac{-1}{2x} + O(\dfrac{1}{x})$ qui tend vers 0 en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $\forall x > 0,\ \ f(x) = x\ln x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) - \dfrac{\pi}{2}$ et $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ car continue sur $[0,+\infty[$.

I.A.5) L'égalité est valable en 0.

Si $s > 0$, le changement de variable $st = u$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}dt = s\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}dt = sf(0) = s\frac{\pi}{2}$ et l'égalité est vrai pour $s > 0$, cos est paire donc l'égalité est encore vraie pour $s < 0$.

I.B- I.B.1) L'application $t \longmapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \geq 1,\ \dfrac{|1-(\cos t)^n|}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$. Au voisinage de 0 on a $(\cos t)^n = (1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2))^n = 1 - n\dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2} = \dfrac{n}{2}$, alors l'application $t \longmapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est prolongeable en 0 donc intégrable sur $]0,1]$: La suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\cos^2(t))^{n+1} \leq (\cos^2(t))^n$, donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

I.B.2) $u_1 = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$. On a $1 - \cos^2 t = \sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, alors $u_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2t)}{t^2} = \frac{\pi}{2}$ en utilisant la question $I.A.5)$.

I.C- I.C.1) Le changement de variable suivant $\sqrt{\dfrac{2u}{n}} = t$ donne $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}v_n$, où $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}du$.

I.C.2) Soit $g(u) = \left(\cos\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)^n$; $g'(u) = -n\left(\cos\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)^{n-1}\sin\sqrt{\dfrac{2u}{n}}.\sqrt{\dfrac{2}{n}}.\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

Soit $u > 0$, du théorème des accroissements finis appliqué à g qui est continue sur $[0,u]$ et dérivable sur $]0,u[$, $\exists\zeta\in]0,u[$ tel que $\dfrac{g(0)-g(u)}{-u}=g'(\zeta)$, alors :

$$|1-\left(\cos\sqrt{2u/n}\right)^n|\leq u\left(n\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\frac{2\zeta}{n}}\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\right)=u$$

I.C.3) Pour n assez grand, $\left[\cos\left(\sqrt{\dfrac{2u}{n}}\right)\right]^n=e^{n\ln(1-\frac{2u}{2n}+o(\frac{1}{n}))}=e^{-u+o(1)}$ qui tend vers e^{-u} quand $n\to+\infty$.

Si on pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall u>0\ f_n(u)=\dfrac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}}$,

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$.

la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge simplement vers $u\longmapsto\dfrac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall u\in]0,1[;\ |f_n(u)|\leq\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ question précédente.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall u\in[1,+\infty[;\ |f_n(u)|\leq\dfrac{2}{u\sqrt{u}}$.

Soit φ définie par $\varphi(u)=\dfrac{2}{u\sqrt{u}}$ sur $[1,+\infty[$, et $\varphi(u)=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ sur $]0,1[$, φ est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ admet des limites finies en 1 à gauche et à droite, donc continues par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de la convergence dominée s'applique et on a :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}du=\ell.$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=\ell=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}du.$

I.C.4) $\ell\neq0$, donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}\ell$.

$(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, par une intégration par parties, on obtient $\dfrac{1}{2}\ell=\left[\dfrac{1-e^{-u}}{u}\sqrt{u}\right]_0^{+\infty}-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}+\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u^2}\sqrt{u}du$

Donc $\dfrac{\ell}{2}=-\sqrt{\pi}+\ell$, alors $\ell=2\sqrt{\pi}$, donc $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

II Autour du pile ou face

II.A- II.A.1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $E(X_n)=1.P(X_n=1)+(-1)P(X_n=-1)=0$, donc $E(S_n)=0$.

$E(X_n^2) = 1^2.P(X_n = 1) + (-1)^2.P(X_n = -1) = 1$ Propriété de Transfert.
$V(S_n) = E[(S_n - E(S_n))^2] = E(S_n)^2 = E(\sum_{1\le i,j\le n} X_i X_j) = 2\sum_{1\le i<j\le n} E(X_i)E(X_j) +$
$\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$ car les X_i mutuellement indépendantes. Donc $V(S_n) = n$.

II.A.2) Supposons que $T(\Omega) = \{x_i \ \backslash i \in I\}$, avec I fini, alors $T(\Omega) = -T(\Omega)$ et $E(\sin T) = \sum_{i\in I} \sin(x_i)P(T = x_i) = \sum_{i\in I} \sin(x_i)P(-T = x_i)$ car T et $-T$ ont même loi.
Alors $E(\sin T) = \sum_{i\in I} \sin(x_i)P(T = x_i) = -\sum_{i\in I} \sin(-x_i)P(T = -x_i) = -E(\sin T)$, donc $E(\sin T) = 0$.
Alors $E(\cos(S+T)) = E(\cos S \cos T) - E(\sin S \sin T)$, les variables S et T sont indépendantes, donc les variables $\cos S$ et $\cos T$ sont indépendantes aussi $\sin S$ et $\sin T$.
Alors $E(\cos(S+T)) = E(\cos S)E(\cos T) - E(\sin S)E(\sin T) = E(\cos S)E(\cos T)$.

II.A.3) $tX_1(\Omega) = \{-t, t\}$, donc $\phi_1(t) = E(\cos(X_1 t)) = \cos(t)P(X_1 t = t) + \cos(-t)P(X_1 t = -t) = \cos(t)$ et l'égalité est vraie pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \ge 2$, supposons qu'elle est vraie à l'ordre $n-1$, alors $\phi_n(t) = E(\cos(S_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t + X_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t))E(\cos(X_n t))$ question précédente, car les variables $S_{n-1}t$ et $X_n t$ sont indépendantes et $X_n t$ et $-X_n t$ ont même loi.
Alors $\phi_n(t) = E(\cos(S_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t + X_n t)) = E(\cos(S_{n-1}t))E(\cos(X_n t)) = (\cos t)^{n-1}\cos(t) = (\cos t)^{n-1}$, la récurrence s'applique et l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.A.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n(\Omega) = \{x_i \ / i \in I\}$ avec I fini,
$E(|S_n|) = \sum_{k\in I} |x_k| P(S_n = x_k)$. Par application de la question $I.A.5)$ à $|x_k|$, on obtient :

$$\begin{aligned}
E(|S_n|) &= \sum_{k\in I} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x_k t)}{t^2}\,dt\,P(S_n = x_k) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sum_{k\in I} P(S_n = x_k) - \sum_{k\in I}\cos(x_k t)P(S_n = x_k)}{t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(S_n t))}{t^2}\,dt \quad \text{propriété de Transfert} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,dt \quad \text{question précédente} \\
&= \frac{2}{\pi} u_n
\end{aligned}$$

II.A.5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{2n+2}(\Omega) = \{2p / -n-1 \le p \le n+1\} = \left\{ \sum_{k=1}^{2n+2} \varepsilon_k \ / \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{2n+2} \in \{-1, 1\} \right\}$;

et $S_{2n+1}(\Omega)=\{2p+1/-n-1\leq p\leq n\}=\left\{\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k\ /\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1}\in\{-1,1\}\right\}$, on remarque que le 0 ne figure pas dans $S_{2n+1}(\Omega)$.

$$E(|S_{2n+2}|) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2}\in\{-1,1\}}|\sum_{k=1}^{2n+2}\varepsilon_k|P(X_1=\varepsilon_1,\ldots,X_{2n+2}=\varepsilon_{2n+2})$$

Or les variables X_k sont mutuellement indépendantes, donc :
$P(X_1=\varepsilon_1,\ldots,X_{2n+2}=\varepsilon_{2n+2})=\frac{1}{2^{2n+2}}$.

$$\begin{aligned}E(|S_{2n+2}|) &= \frac{1}{2^{2n+2}}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+2}\in\{-1,1\}}|\sum_{k=1}^{2n+2}\varepsilon_k|\\ &= \frac{1}{2^{2n+2}}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1}\in\{-1,1\}}\left(|\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k+1|+|\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k-1|\right)\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k\neq 0$, car $2n+1$ est impair ; donc :

$$\left(|\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k+1|+|\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k-1|\right)=\begin{cases}-2\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k & \text{si } \sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k\leq -1\\ 2\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k & \text{si } \sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k\geq 1\end{cases}=2|\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k|$$

Donc

$$\begin{aligned}E(|S_{2n+2}|) &= \frac{2}{2^{2n+2}}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1}\in\{-1,1\}}|\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k|\\ &= \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n+1}\in\{-1,1\}}|\sum_{k=1}^{2n+1}\varepsilon_k|\\ &= E(|S_{2n+1}|)\end{aligned}$$

Donc $u_{2n+2}=u_{2n+1}$.

I.B- II.B.1) $E(S_n^4)=E\left((\sum_{k=1}^{n}X_k)^4\right)=E(\sum_{1\leq i,j,k,\ell\leq n}X_iX_jX_kX_\ell)=2\sum_{1\leq i<j\leq n}E(X_i^2)E(X_j^2)+\sum_{i=1}^{n}E(X_i^4)$, car : $E(X_iX_jX_kX_\ell)=0$ si l'un des indices n'appartient pas à l'ensemble des autres indices.

Alors $E(S_n^4)=2A_4^2\frac{n^2-n}{2}+n=\binom{4}{2}\frac{n^2-n}{2}+n=3(n^2-n)+n=3n^2-2n$.

II.B.2) L'inégalité de Markov s'applique puisque $U_n \geq 0$, alors :

$$P\left(U_n \geq \frac{1}{n}\right) \leq \sqrt{n}E(U_n) \leq \frac{3n^2-2n}{n^4}\sqrt{n} \leq \frac{3}{n^{3/2}}$$

II.B.3) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left(U_k \geq \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est un événement, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{Z}_n = \bigcup_{k\geq n}\left(U_k \geq \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est un événement comme réunion dénombrable d'événements.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 0 \leq P(\mathcal{Z}_n) &= P\left(\bigcup_{k\geq n}\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} P\left(\left(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}} \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}}$ est le reste d'une série convergente, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

II.B.4) La suite $(P(\mathcal{Z}_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc $P(\mathcal{Z}) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$, soit $\omega \in \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned} \omega \notin \mathcal{Z} &\implies \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{\mathcal{Z}_n} \\ &\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}^*;\ \omega \notin \mathcal{Z}_{n_0} \\ &\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}^*;\ \forall k \geq n_0;\ 0 \leq U_k(\omega) < \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Alors : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} U_k(\omega) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

III D'autres sommes aléatoires

III.A- III.A.1) On a :
$$E(|T_{n+1}|) = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k| P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2, \dots, X_{n+1} = \varepsilon_{n+1}).$$
Les variables sont mutuellement indépendantes, alors $P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2, \dots, X_{n+1} = \varepsilon_{n+1}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, par conséquent :

$$\begin{aligned} E(|T_{n+1}|) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k| \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} \left(|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k + a_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k - a_{n+1}| \right) \end{aligned}$$

Or $\forall a,b\in\mathbb{R},\ 2|a| = |a+b+a-b| \leq |a+b|+|a-b|$. Avec $a = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k$ et $b = a_{n+1}$, on obtient :
$E(|T_{n+1}|) \geq \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k| \geq \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k| = E(|T_n|)$.
Donc la suite $(E(|T_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
Remarque : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

III.A.2) $|T_n|^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i X_i a_j X_j$.

Donc $E(|T_n|^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 E(X_k^2) + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} a_i a_j E(X_i)E(X_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

L'application $t \longmapsto t^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, par application de l'inégalité de Jensen, on a :

$(E(|T_n|))^2 \leq E(|T_n|^2) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, alors $E(|T_n|) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$:

La série $\sum_{k\geq 1} a_k^2$ est convergente, donc $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2}$, alors la suite $(E(|T_n|))_n$ qui est croissante et bornée est convergente.

III.A.3) Soit $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} E(|T_n|) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k| \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} \left(|a_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| + |a_1 - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| \right) \end{aligned}$$

Or $-a_1 \leq \sum_{k=2}^{n} -a_k \leq \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k \leq \sum_{k=2}^{n} a_k \leq a_1$, donc :

$|a_1 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| + |a_1 - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k a_k| = 2a_1$, donc :

$$
\begin{aligned}
E(|T_n|) &= \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_2,\dots\varepsilon_n\in\{-1,1\}} 2a_1 \\
&= a_1 \\
&= E(|T_1|)
\end{aligned}
$$

Donc $\forall n\geq 1,\quad E(|T_n|)=E(|T_1|)=a_1$.

III.B- III.B.1) $\forall k\in\mathbb{N}^*, a_k\geq 0$. Posons $T_n(\Omega)=\{x_i\ /\ i\in I\}$ avec I fini, alors

$$
\begin{aligned}
E(|T_n|) &= \sum_{k\in I}|x_k|P(T_n=x_k) \\
&= \sum_{k\in I}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x_k t)}{t^2}\,dt P(T_n=x_k) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sum_{k\in I}P(T_n=x_k)-\sum_{k\in I}\cos(x_k t)P(T_n=x_k)}{t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-E(\cos(T_n t))}{t^2}\,dt
\end{aligned}
$$

En effet : La suite $(a_kX_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-a_k,a_k\}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(a_kX_k=a_k)=P(a_kX_k=-a_k)=\dfrac{1}{2}$.

On peut appliquer les résultats de la partie $II.A$ avec $\varphi(t)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\cos a_k t)$ alors :

$E(|T_n|)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-E(\cos(T_n t))}{t^2}\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\prod_{k=1}^{n}(\cos a_k t)}{t^2}\,dt=\frac{2}{\pi}J_n$.

De la question $III.A1)$; $(E(|T_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante, donc $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie, croissante.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}a_k^2$ et convergente, donc $(E(|T_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente (Question $III.A.2$), donc $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

III.B.2) $J_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt=u_1=\frac{\pi}{2}$. On a $a_1=1$ et $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\simeq 0.95$, donc $\forall n\in\{2,\dots,7\},\quad a_1\geq\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k$, d'après la question $III.A.3)$, $\forall n\in\{1,\dots,7\},\quad E(|T_n|)=E(|T_1|)$, ce qui se traduit par : $\forall n\in\{1,\dots,7\},\ J_n=J_1=\dfrac{\pi}{2}$.

$(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Reste à montrer qu'elle est strictement croissante à partir de 7, question que je laisse au lecteur.

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@yahoo.fr