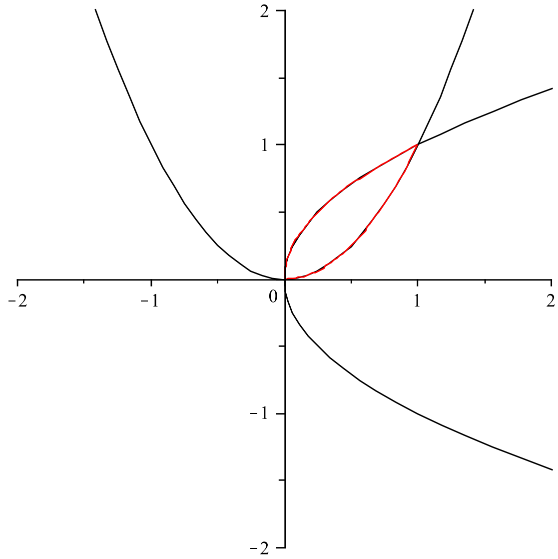
e3a PSI A - 2009
Un corrigé

Applications simples du cours.

1.1. G est l'intersection de "l'intérieur" de deux paraboles.



1.2. On peut paramétrer γ par

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} (t^2, -t) & \text{si } \ t \in [-1, 0] \\ (t, t^2) & \text{si } \ t \in]0, 1] \end{cases}$$

On en déduit que

$$\int_\gamma V = \int_{-1}^{0} \left((-2t^3 - t^4)2t) + 2t^2(-1)\right)\ dt + \int_0^1 \left((2t^3 - t^2) + (t + t^4)(2t)\right)\ dt = \frac{1}{30}$$

1.3. Si on utilise la formule de Green-Riemann, on obtient

$$\int_\gamma V = \iint_G (1 - 2x)\ dxdy$$

On a $G = \{(x, y)/\ x \in [0, 1],\ y \in [x^2, \sqrt{x}]\}$. Par théorème de Fubini (appliqué à une fonction continue sur un compact) on a donc

$$\int_\gamma V = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\ dy\right)\ dx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\ dx = \frac{1}{30}$$

2.1. D'après la formule de Green-Riemann, on $\int_\gamma V = 0$ dans le cas envisagé.

2.2. Soit $f\ :\ (x, y) \mapsto \cos(xy)$. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

En posant $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \sin(xy)$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin(xy)$ on a donc la relation voulue.

3.1. En utilisant la formule de Green-Riemann on a

$$A_1 = \int_\gamma x\ dy = \iint\ dxdy$$

$$A_2 = -\int_\gamma y\ dx = \iint\ dxdy$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\ dy - y\ dx) = \iint\ dxdy$$

et ces trois quantités sont égales à l'aire délimitée par γ.

3.2. Notons $M(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t)$; on a

$$M(t+2\pi) = M(t),\ M(t+\pi) = sym_0(M(t)),\ M(-t) = sym_{(Ox)}(M(t)),\ M(\pi/2-t) = sym_{x=y}(M(t))$$

On peut donc faire une étude sur $[0, \pi/4]$ puis une symétrie par rapport à la première bissectrice (courbe sur $[0, \pi/2]$) puis une symétrie d'axe Ox (courbe sur $[-\pi/2, \pi/2]$) puis une symétrie par rapport à l'origine (courbe que $[-\pi/2, 3\pi/2]$ et donc en entier puisqu'il y a 2π-périodicité). On a

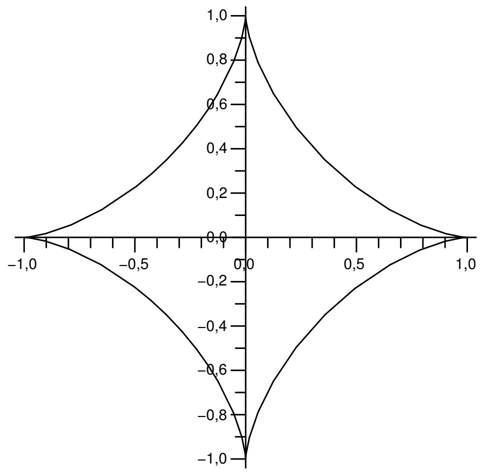
$$\forall t \in [0, \pi/4],\ x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \leq 0,\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) \geq 0$$

et x décroît sur $[0, \pi/4]$ alors que y croît. Le seul point d'annulation commun est en 0 (point stationnaire). Comme

$$x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + o_0(t^2)$$

$$y(t) = (t + o_0(t))^3 = o_0(t^2)$$

la tangente en $M(0)$ est portée par $(x''(0), y''(0)) = (-3, 0)$ et est horizontale. D'après les symétries détectées, on a un point de rebroussement de première espèce. On obtient la courbe suivante



3.3. On peut utiliser l'une des formules de 3.1 pour obtenir l'aire. Elle vaut

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\cos^4(t)\sin^2(t) + 3\sin^4(t)\cos^2(t))\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin^2(t)\ dt$$

AVec la formule du sinus double,

$$\mathcal{A} = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = \frac{3}{16}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(4t))\ dt = \frac{3\pi}{8}$$

Problème.

Préliminaires.

1. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $[0,\pi/2]$ (sa dérivée seconde, $-\sin$, est négative sur cet intervalle). Son graphe est donc situé au dessus de la corde $[(0,0),(\pi/2,1)]$ et en dessous de la première bissectrice (tangente à l'origine). Ceci s'écrit

$$\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$$

2.1. φ est continue sur $]0,1]$ et de limite 1 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 (avec $\varphi(0)=1$).

2.2. Une intégration par parties (les fonctions étant $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, celle-ci est licite) donne

$$\forall x \geq 1,\ \phi(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

2.3. $\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ est de limite nulle quand $x \to +\infty$. $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et dominée par $1/t^2$; elle est donc intégrable sur $[1,+\infty[$. A fortiori, sont intégrale entre 1 et x admet une limite quand $x \to +\infty$. On peut donc écrire que

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

2.4. Pour tout $x > 0$, on a $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^1 \varphi + \phi(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$ et on peut écrire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

1 Une première façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1. Par théorèmes généraux, P et Q sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et donc, en particulier, de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout domaine U (ouvert selon le programme) de $\mathbb{R}^2$ qui ne contient pas $(0,0)$.
2. Avec les hypothèses faites, on peut utiliser le théorème de Green-Riemann. Or, un calcul donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\big((-x^2+y^2+yx^2+y^3)\cos(x) - (x^3+xy^2+2xy)\sin(x)\big)\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_\gamma V = 0$$

3.1. On a

$$P(x(\theta),y(\theta)) = \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho}\left(\sin(x(\theta))\cos(\theta) - \cos(x(\theta))\sin(\theta)\right)$$

$$P(x(\theta),y(\theta)) = \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho}\left(\cos(x(\theta))\cos(\theta) + \sin(x(\theta))\sin(\theta)\right)$$

On multiplie la première quantité par $-\rho\sin(\theta)$ et la seconde par $\rho\cos(\theta)$ pour obtenir

$$A_\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho}\cos(x(\theta))\,d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin(\theta)}\cos(\rho\cos(\theta))\,d\theta$$

3.2. On veut utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- $\forall \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \mapsto e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))$ est continue sur $[0, \pi/2]$.
- $\forall \theta \in [0, \pi/2],\ \rho \mapsto e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall \rho \geq 0,\ \forall \theta \in [0, \pi/2],\ \left|e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))\right| \leq 1$. Le majorant est une fonction intégrable sur $[0, \pi/2]$ (continue sur ce segment).

Le théorème s'applique et indique que $\rho \mapsto A_\rho$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier,

$$\lim_{\rho \to 0^+} A_\rho = A_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

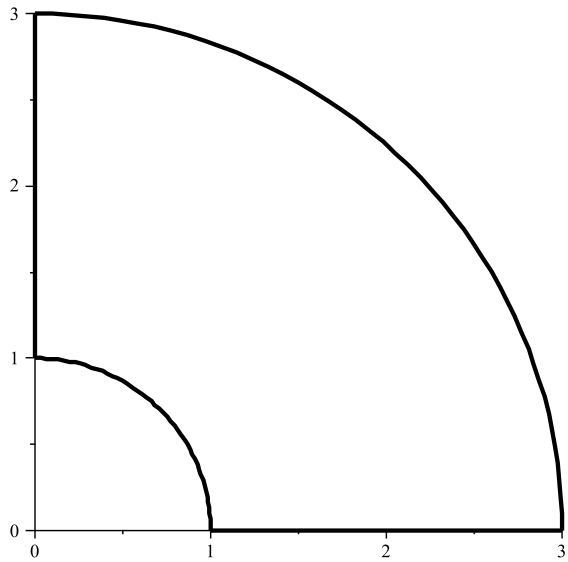
3.3. En utilisant la première question des préliminaires, on a

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \left|e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))\right| \leq e^{-\rho \sin(\theta)} \leq e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta}$$

On en déduit que

$$|A_\rho| \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta}\, d\theta = -\frac{\pi}{2\rho}\left[e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta}\right]_0^{\pi/2} \leq \frac{\pi}{2\rho} \underset{\rho \to +\infty}{\to} 0$$

4.1. Le dessin est fait ici avec $r = 1$ et $R = 3$.



4.2. γ_1 est paramétré par $t \in [r, R] \mapsto (t, 0)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_1} V = \int_r^R P(t, 0)\, dt = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

4.3. γ_3 est paramétré par $t \in [-R, -r,] \mapsto (0, -t)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_1} V = -\int_{-R}^{-r} Q(0, -t)\, dt = 0$$

4.4. D'après la question 2, $\int_\Gamma V = 0$. Par ailleurs (en prenant garde au fait que γ_4 est parcouru dans le sens horaire)

$$\int_{\gamma_2} V = A_R \text{ et } \int_{\gamma_4} V = -A_r$$

Avec les deux questions précédentes, on a donc

$$0 = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\, dt + A_R - A_r$$

Il reste à faire tendre r vers 0^+ et R vers $+\infty$ (on a vu l'existence des limites) pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

2 Une deuxième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1.1. $f_n\ :\ t \mapsto \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}$ et $g_n\ :\ t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$ sont continues sur $]0,\pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 (par $f_n(0) = 2n$ et $g_n(0) = 2n$). Ce sont donc des fonctions intégrables sur le segment $[0,\pi/2]$ et u_n et v_n existent a fortiori.

1.2. La formule $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$ indique que

$$u_{n+1} - u_n = 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t)\cos(t)\,dt$$

La formule $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$ indique alors que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\cos((2n+2)t) + \cos(2nt)\right)\,dt$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = 0$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc constante et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$$

2. Une intégration par parties donne

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ H_m = \left[h(t)\frac{e^{imt}}{im}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{im}\int_\alpha^\beta h'(t)e^{imt}\,dt$$

Ainsi, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ |H_m| \leq \frac{|h(\alpha) + h(\beta)|}{m} + \frac{|\beta - \alpha|}{m}\|h'\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$$

ceci étant licite car h' est continue sur le segment $[\alpha,\beta]$. On a alors immédiatement

$$\lim_{m\to+\infty} H_m = 0$$

3. h est une fonction continue sur $[0,\pi/2]$ et

$$h(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t\sin(t)} = \frac{(t + o(t^2)) - (t + o(t^2))}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)}$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to 0} h(t) = 0$$

et h est prolongable par continuité en posant $h(0) = 0$. On a alors une fonction continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$ avec

$$\forall t > 0,\ h'(t) = \frac{t^2 - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)} = \frac{(t - \sin(t))(t + \sin(t)}{t^2\sin^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(t^3/6)(2t)}{t^4} \underset{t\to 0}{\to} \frac{1}{3}$$

Par un corollaire des accroissements finis, on en déduit que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ avec $h'(0) = 1/3$.

4.1. On remarque que $v_n - u_n = \int_0^{\pi/2} h(t)\sin(2nt)\,dt$. D'après le lemme de Riemann-Lebsque (en passant la partie imaginaire) on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$$

4.2. Le changement de variable $x = 2nt$ donne

$$v_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (on a existence des différentes quantités avec ce qui précède) on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$$

3 Une troisième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1. Un simple calcul de dérivée montre que

$$x \mapsto -\frac{e^{-\alpha x}}{1+\alpha^2}(\cos(x) + \alpha\sin(x))$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)e^{-\alpha x}$.

2. Avec le théorème de Fubini (sur un pavé et utilisé avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) on a

$$J = \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)e^{-xy}\,dy\right)\,dx = \int_0^u \left[-\frac{\sin(x)}{x}e^{-xy}\right]_{y=0}^{y=u}\,dx = \int_0^u \frac{\sin(x)}{x}\left(1 - e^{ux}\right)\,dx$$

mais aussi

$$\begin{aligned} J = \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)e^{-xy}\,dx\right)\,dy &= \int_0^u \left[-\frac{e^{-yx}}{1+y^2}(\cos(x) + y\sin(x))\right]_{x=0}^{x=u}\,dy \\ &= \int_0^u \frac{1 - e^{yu}(\cos(u) + y\sin(u))}{1+y^2}\,dy \end{aligned}$$

L'égalité demandée s'en déduit.

3.1. Comme $|\sin(x)/x| \le 1$, on a

$$K_1 \le \int_0^u e^{-xu}\,dx = \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0$$

3.2. On a aussi

$$|K_2| \le \int_0^u \frac{1+y}{1+y^2}e^{-yu}\,dy$$

$\frac{1+y}{1+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$. C'est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit M un majorant de son module.

$$|K_2| \le M\int_0^u e^{-yu}\,dy = M\frac{1 - e^{-u^2}}{u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0$$

3.3. La question 2 donne

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}\,dx = K_1(u) + \int_0^u \frac{dy}{1+y^2} - K_2(u)$$

En faisant tendre u vers $+\infty$ ($\int_0^u \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(u)$) on a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

4.1. $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1) et dominée par $1/x^2$ (donc intégrable au voisinage de $+\infty$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

4.2. Par un calcul similaire à celui de la question 2.2 des préliminaires, on a (en primitivant sin en $1-\cos$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

En posant $t = x/2$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{4t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$