

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2022

Épreuve de mathématiques II

(corrigé)

1 Matrices semi-simples

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-2 & x-3 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &= (x-2)^2,\end{aligned}$$

donc : $\chi_A = (X-2)^2$, et 2 est l'unique valeur propre de A . On en déduit que A n'est pas semi-simple : si elle l'était, il existerait $P \in \text{GL}_2(\mathbf{C})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = 2P\mathbf{I}_2P^{-1} = 2PP^{-1} = 2\mathbf{I}_2,$$

ce qui est absurde car $A \neq 2\mathbf{I}_2$.

2. On a : $\chi_B = X^2 - 4X + 13 = (X-2)^2 + 9 = (X-2)^2 - (3i)^2 = (X-2-3i)(X-2+3i)$. Puisque χ_B est scindé et à racines simples sur \mathbf{C} , la matrice B est diagonalisable sur \mathbf{C} , donc B est semi-simple : d'où le résultat.

Pour en déduire que B est semblable sur \mathbf{R} à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$: soit V un vecteur propre de B associé à $2+3i$; son expression explicite est inutile pour poursuivre, mais on peut par exemple considérer : $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i-1 \end{pmatrix}$. Notons qu'on a :

$$BV = (2+3i)V, \text{ donc : } \overline{BV} = \overline{(2+3i)V},$$

or : $\overline{BV} = \overline{B}V = B\overline{V}$ (car B est à coefficients réels), et : $\overline{2+3i} = 2-3i$, donc :

$$B\overline{V} = (2-3i)\overline{V}.$$

Soit $f_B : X \mapsto BX$ l'endomorphisme de $M_{2,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à B . Écrivons sa matrice dans la base (W_1, W_2) , où l'on a posé :

$$W_1 = \text{Re}(V) = \frac{1}{2}(V + \overline{V}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbf{R}), \quad W_2 = \text{Im}(V) = \frac{1}{2i}(V - \overline{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbf{R}).$$

C'est effectivement une base de $M_{2,1}(\mathbf{R})$, puisque le déterminant de (W_1, W_2) relativement à la base canonique est égal à $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ (on proposera un argument théorique plus général dans la question suivante). On a :

$$f_B(W_1) = \frac{1}{2}(BV + B\overline{V}) = \frac{1}{2}((2+3i)V + (2-3i)\overline{V}) = 2 \cdot \frac{1}{2}(V + \overline{V}) - 3 \cdot \frac{1}{2i}(V - \overline{V}),$$

où l'on a utilisé le fait que $i = -\frac{1}{i}$. On en déduit :

$$f_B(W_1) = 2W_1 - 3W_2.$$

De même :

$$f_B(W_2) = \frac{1}{2i} (BV - B\bar{V}) = \frac{1}{2i} ((2 + 3i)V - (2 - 3i)\bar{V}) = 2 \cdot \frac{1}{2i} (V - \bar{V}) + 3 \cdot \frac{1}{2} (V + \bar{V}),$$

d'où :

$$f_B(W_2) = 3W_1 + 2W_2.$$

On en déduit que la matrice de f_B dans la base (W_1, W_2) est :

$$M_{(W_1, W_2)}(f_B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on pose : $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $M_{2,1}(\mathbf{R})$ dans la base (W_1, W_2) , alors la formule du changement de base appliquée à f_B (entre ces deux bases) implique :

$$B = QM_{(W_1, W_2)}(f_B)Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

d'où le résultat en posant $a = 2$ et $b = 3$.

3. Puisque M admet deux valeurs propres distinctes dans \mathbf{C} (on a en effet $b \neq 0$, donc $\mu \neq \bar{\mu}$), M est diagonalisable sur \mathbf{C} , donc semi-simple. Pour montrer que M est semblable sur \mathbf{R} à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, on reproduit le raisonnement de la question précédente : soit V un vecteur propre de M associé à μ . Posons : $W_1 = \operatorname{Re}(V)$, $W_2 = \operatorname{Im}(V)$. Justifions d'abord que (W_1, W_2) , qui est bien une famille de vecteurs de $M_{2,1}(\mathbf{R})$, est une base de cet espace vectoriel ; nous écrirons ensuite la matrice dans cette base de l'endomorphisme $f_M : X \mapsto MX$ canoniquement associé à M .

Pour montrer que (W_1, W_2) est une base, il suffit de démontrer qu'elle est libre maximale. Soit, donc, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que : $\alpha W_1 + \beta W_2 = 0$. Montrons : $\alpha = \beta = 0$. On a par définition : $W_1 = \frac{1}{2}(V + \bar{V})$, $W_2 = \frac{1}{2i}(V - \bar{V})$. Donc la relation de dépendance linéaire entre W_1 et W_2 implique, après multiplication par 2 et regroupement des termes :

$$(\alpha - i\beta)V + (\alpha + i\beta)\bar{V} = 0.$$

Or (V, \bar{V}) est une famille de vecteurs propres (de M) associés à des valeurs propres différentes : en effet \bar{V} est un vecteur propre de M associé à $\bar{\mu}$ (on reprend le même raisonnement que dans la question précédente ; la clé réside dans le fait que $\overline{MV} = M\bar{V}$ car $M \in M_2(\mathbf{R})$). Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes est libre, donc la relation de dépendance linéaire ci-dessus implique :

$$\begin{cases} \alpha - i\beta = 0 \\ \alpha + i\beta = 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ou $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on obtient facilement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, ce qu'on voulait démontrer.

Ainsi la famille (W_1, W_2) est libre, de cardinal égal à la dimension de $M_{2,1}(\mathbf{R})$, donc c'en est une base. De plus :

$$\begin{aligned} f_M(W_1) &= \frac{1}{2} (MV + M\bar{V}) = \frac{1}{2} (\mu V + \bar{\mu}\bar{V}) = \frac{1}{2} ((a + ib)V + (a - ib)\bar{V}) \\ &= a \cdot \frac{1}{2} (V + \bar{V}) - b \cdot \frac{1}{2i} (V - \bar{V}) \\ &= aW_1 - bW_2, \end{aligned}$$

et par un calcul analogue : $f_M(W_2) = bW_1 + aW_2$. On en déduit que la matrice de f_M dans la base (W_1, W_2) est :

$$M_{(W_1, W_2)}(f_M) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on note Q la matrice de passage de la base canonique de $M_{2,1}(\mathbf{R})$ dans la base (W_1, W_2) , alors la formule du changement de base appliquée à f_M (entre ces deux bases) implique :

$$B = QM_{(W_1, W_2)}(f)Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1},$$

d'où le résultat.

4. Le sens réciproque est trivial : une matrice diagonalisable sur \mathbf{R} l'est en particulier sur \mathbf{C} , tandis que si χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle, alors χ_M est scindé à racines simples sur \mathbf{C} donc M est diagonalisable sur \mathbf{C} . Une matrice vérifiant (i) ou (ii) est donc semi-simple.

Montrons à présent le sens direct : soit M une matrice semi-simple, et montrons que M vérifie (i) ou (ii). Cela revient à montrer que si M ne vérifie pas (i), alors M vérifie (ii), de sorte qu'il soit impossible que M vérifie pas l'une des deux propriétés. Supposons donc que M ne vérifie pas (i). Le fait que M ne soit pas diagonalisable sur \mathbf{R} implique que :

- soit χ_M n'est pas scindé sur \mathbf{R} (mais sur \mathbf{C}) ;
- soit χ_M est scindé sur \mathbf{R} , mais admet une racine double (en effet, si χ_M est scindé à racines simples alors M est diagonalisable, ce qu'on a exclu sur \mathbf{R}).

Excluons le second cas : si χ_M admet une racine double $\lambda \in \mathbf{R}$ alors, comme M est semi-simple, il existe $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda P I_2 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_2,$$

et donc M est une matrice diagonale à coefficients réels, et en particulier est diagonalisable sur \mathbf{R} : impossible puisqu'on a supposé que M ne vérifie pas (i). Il est donc exclu que χ_M soit scindé sur \mathbf{R} ; en revanche χ_M est scindé sur \mathbf{C} , et ses deux racines sont complexes non réelles (sinon χ_M serait scindé sur \mathbf{R} ; notons que si une racine est réelle, alors l'autre doit aussi l'être à cause des relations coefficients-racines et du fait que $\chi_M \in \mathbf{R}[X]$). Notons $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ ces deux racines. Il reste à démontrer qu'elles sont conjuguées pour avoir le résultat : c'est un fait classique, qui tient au fait que χ_M soit à coefficients réels, et que nous redémontrons brièvement. On a : $\chi_M = (X - \lambda)(X - \mu)$, et donc : $\overline{\chi_M} = \overline{(X - \lambda)(X - \mu)} = (X - \bar{\lambda})(X - \bar{\mu})$. Or $\chi_M = \overline{\chi_M}$ car $\chi_M \in \mathbf{R}[X]$, donc les égalités précédentes impliquent : $(X - \lambda)(X - \mu) = (X - \bar{\lambda})(X - \bar{\mu})$. Par unicité de la décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles, on doit donc avoir $\bar{\lambda} = \lambda$ ou $\bar{\lambda} = \mu$, le premier cas étant impossible car $\lambda \notin \mathbf{R}$. Ainsi $\mu = \bar{\lambda}$, ce qui prouve que les racines de χ_M , c'est-à-dire λ et $\mu = \bar{\lambda}$, sont complexes conjuguées. D'où le résultat : on a montré que si M est semi-simple et ne vérifie pas (i), alors M vérifie (ii), donc M vérifie soit (i), soit (ii). D'où le sens direct de l'équivalence demandée, le sens réciproque ayant été traité dès le début du traitement de la question.

5. Montrons que N est semi-simple, c'est-à-dire est semblable sur \mathbf{C} à une matrice diagonale. Comme N est semblable à une matrice diagonale par blocs par définition d'une matrice presque diagonale, il suffit de montrer que chacun de ces blocs est diagonalisable sur \mathbf{C} , comme nous allons le voir.

Justifions donc que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbf{C} . Soit $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. On a :

$$\chi_{M(a,b)} = (X - a)^2 + b^2 = (X - a - ib)(X - a + ib).$$

Or $a + ib$ et $a - ib$ sont des nombres complexes conjugués de partie imaginaire non nulle car $b \neq 0$, donc $M(a, b)$ vérifie le point (ii) de la question précédente : on en déduit que $M(a, b)$ est semi-simple.

Montrons alors que N est semblable sur \mathbf{C} à une matrice diagonale. Par hypothèse, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$, $p, q \in \mathbf{N}$, $D \in M_p(\mathbf{R})$ diagonale et $((a_1, b_1), \dots, (a_q, b_q)) \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)^q$ tels que :

$$N = P \begin{pmatrix} D & & & \mathbf{0} \\ & M(a_1, b_1) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & M(a_q, b_q) \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec les conventions de l'énoncé dans les cas $p = 0$ ou $q = 0$. Or, d'après ce qu'on a démontré plus haut, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ la matrice $M(a_j, b_j)$ est semi-simple, donc il existe $Q_j \in \text{GL}_2(\mathbf{C})$ et $D_j \in M_2(\mathbf{C})$ diagonale telles que : $M(a_j, b_j) = Q_j D_j Q_j^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} N &= P \begin{pmatrix} D & & & \mathbf{0} \\ & Q_1 D_1 Q_1^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & Q_q D_q Q_q^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & & & \mathbf{0} \\ & Q_1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & Q_q \end{pmatrix}}_{=P'} \underbrace{\begin{pmatrix} D & & & \mathbf{0} \\ & D_1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & D_q \end{pmatrix}}_{=D'} \begin{pmatrix} I_p & & & \mathbf{0} \\ & Q_1^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & Q_q^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P' D' P'^{-1}, \end{aligned}$$

avec $P' \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$. On a montré que N est semblable à la matrice diagonale $D' \in M_n(\mathbf{C})$, donc N est diagonalisable sur \mathbf{C} , c'est-à-dire est semi-simple : ce qu'il fallait démontrer.

6. Notons p le nombre de racines réelles de χ_N et q le nombre de racines complexes non réelles de χ_N , avec multiplicités éventuelles (on a $p + 2q = n$). Quitte à refaire le raisonnement à la fin de la question ??, on sait que le conjugué d'une racine complexe non réelle de χ_N est aussi racine de χ_N (et avec le même ordre de multiplicité).

Notons donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{R}^p$ et $((\beta_1, \overline{\beta_1}), \dots, (\beta_q, \overline{\beta_q})) \in (\mathbf{C}^2)^q$ tels que :

$$\chi_N = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \prod_{i=1}^q (X - \beta_i)(X - \overline{\beta_i}),$$

et supposons à présent N semi-simple. Elle est donc semblable sur \mathbf{C} à une matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les racines de χ_N , comptées autant de fois que leurs ordres de multiplicité. C'est-à-dire : il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$N = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha_p & & & & & & \\ & & & \beta_1 & & & & & \\ & & & & \overline{\beta_1} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & \beta_q & & \\ & & & & & & & \overline{\beta_q} & \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Mieux : si l'on pose $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \alpha_p \end{pmatrix}$ (qui, en plus d'être diagonale, est à coefficients réels) et, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $N_j = \begin{pmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$, alors on a :

$$N = P \begin{pmatrix} D & & \mathbf{0} \\ & N_1 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & N_q \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Au vu de la forme de la matrice diagonale par blocs, et de la définition d'une matrice presque diagonale, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, la matrice N_j est semblable à une matrice de la forme $M(a_j, b_j)$ avec $(a_j, b_j) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, pour en déduire que N est semblable à une matrice presque diagonale. Or on a, par un calcul facile à vérifier :

$$\begin{aligned} N_j &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\beta_j) + i\operatorname{Im}(\beta_j) & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(\beta_j) - i\operatorname{Im}(\beta_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\beta_j) & \operatorname{Im}(\beta_j) \\ -\operatorname{Im}(\beta_j) & \operatorname{Re}(\beta_j) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} M(\operatorname{Re}(\beta_j), \operatorname{Im}(\beta_j)) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Donc, si l'on pose : $Q = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbf{C})$, et : $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $(a_j, b_j) = (\operatorname{Re}(\beta_j), \operatorname{Im}(\beta_j))$, on a :

$$\begin{aligned} N &= P \begin{pmatrix} D & & \mathbf{0} \\ & N_1 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & N_q \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} D & & \mathbf{0} \\ & QM(a_1, b_1)Q^{-1} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & QM(a_q, b_q)Q^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} I_p & & \mathbf{0} \\ & Q & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & & \mathbf{0} \\ & M(a_1, b_1) & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & M(a_q, b_q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & & \mathbf{0} \\ & Q^{-1} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & Q^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

En posant : $P' = P \begin{pmatrix} I_p & & \mathbf{0} \\ & Q & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & Q \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{C})$, on a donc :

$$N = P' \begin{pmatrix} D & & \mathbf{0} \\ & M(a_1, b_1) & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & M(a_q, b_q) \end{pmatrix} P'^{-1}.$$

On a bien démontré que N est semblable à une matrice presque diagonale, d'où le résultat.

Remarque. La matrice de passage entre N_j et $M(\operatorname{Re}(\beta_j), \operatorname{Im}(\beta_j))$ n'a pas été trouvée à tâtons ni par hasard, mais en adaptant le raisonnement de la question ?? avec N_j (qui n'est certes pas à coefficients réels), dont une base de vecteurs propres associés à β_j et $\overline{\beta_j}$ n'est plus (V, \overline{V}) , mais la base canonique (E_1, E_2) : d'où la nécessité de modifier le raisonnement de la question ?? en remplaçant $2\operatorname{Re}(V) = V + \overline{V}$ et $2\operatorname{Im}(V) = -i(V - \overline{V})$ par $E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $-i(E_1 - E_2) = \begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix}$; je me suis débarrassé des divisions par 2 pour alléger les coefficients, étant donné qu'elles n'influencent pas sur le raisonnement.

Remarque. On a finalement démontré, dans cette partie, qu'une matrice à coefficients réels est semi-simple si et seulement si elle est semblable à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$

7. Si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $v_k \in F$, alors F contient toute combinaison linéaire des vecteurs de la famille (v_1, \dots, v_n) , car un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. Or la famille (v_1, \dots, v_n) engendre E puisque c'en est une base, donc F contient E (et est même égal à E , puisqu'on a aussi $F \subseteq E$) : c'est absurde, étant donné que F est par hypothèse un sous-espace vectoriel *strict* de E . Ceci démontre, par l'absurde, qu'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $v_k \notin F$.

Considérons un tel k , et posons : $D_k = \operatorname{Vect}_{\mathbf{C}}(v_k)$. On veut montrer que F et D_k sont en somme directe. Pour cela, il suffit de montrer : $F \cap D_k = \{0_E\}$. Soit, donc, $x \in F \cap D_k$, et montrons que $x = 0$. Comme x appartient à D_k en particulier, il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que : $x = \alpha v_k$. Si $x \neq 0$, alors $\alpha \neq 0$ nécessairement, et on peut donc diviser par α pour écrire : $v_k = \frac{1}{\alpha}x$. Or $x \in F$ et F est un espace vectoriel, donc $v_k = \frac{1}{\alpha}x$ appartient à F également : absurde par hypothèse. On en déduit que nécessairement : $x = 0$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi : $F \cap D_k = \{0_E\}$, et donc F et D_k sont en somme directe.

8. Comme \mathcal{L} est une partie non vide de \mathbf{N} (non vide car elle contient D_k – on reprend les notations de la question précédente –, qui est de dimension $1 > 0$ et stable par u en tant que droite engendrée par un vecteur propre) et majorée (par $\dim(E) = n$), elle admet un plus grand élément : d'où le résultat.
9. On note que \mathcal{L} est la dimension maximale des sous-espaces de E stables par u et en somme directe avec F . Au vu de ce qui est demandé dans cette question, on comprend qu'on cherche à démontrer que : $r = n - \dim(F)$.

Pour cela, raisonnons par l'absurde, et supposons : $r < n - \dim(F)$. Soit $H \in \mathcal{A}$ tel que : $\dim(H) = r$. Nous allons construire un sous-espace vectoriel dans \mathcal{A} et de dimension strictement supérieure à celle de H , ce qui est impossible puisque $r = \dim(H)$ est *a priori* la plus grande dimension possible d'un élément de \mathcal{A} . Pour cela, il suffit essentiellement d'ajouter à H n'importe quel vecteur qui n'est pas dans H ; cependant, pour conserver la stabilité par u (nécessaire pour être dans \mathcal{A}), il faut ajouter un vecteur propre : nous allons donc devoir utiliser la question ?? pour assurer que c'est possible, et qu'on conserve ainsi un sous-espace en somme directe avec F .

Faisons. Comme $F \cap H = \{0_E\}$ par définition de \mathcal{A} , les sous-espaces vectoriels F et H sont en somme directe, et on a donc : $\dim(F \oplus H) = \dim(F) + \dim(H) = \dim(F) + r < n$. On a donc $F \oplus H \neq E$, et $F \oplus H \neq \{0_E\}$, donc on peut appliquer le raisonnement de la question ?? à $F \oplus H$. Il existe alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $F \oplus H$ et $D_k = \operatorname{Vect}_{\mathbf{C}}(v_k)$ soient en somme directe : ainsi $H' = H \oplus D_k$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u (car H et D_k le sont, la stabilité de D_k provenant du fait d'être engendré par un vecteur propre), de dimension :

$$\dim(H') = \dim(H) + \dim(D_k) = r + 1,$$

et en somme directe avec F . Justifions ce dernier point : si $x \in H' \cap F$, alors du fait que $x \in H' = H \oplus D_k$, il existe $h \in H$ et $\alpha \in \mathbf{C}$ tels que : $x = h + \alpha v_k$. L'idée est de se ramener au fait connu

que $(F \oplus H) \cap D_k = \{0_E\}$, en isolant le vecteur de D_k ainsi : $\alpha v_k = x - h \in F \oplus H$ est à la fois un élément de $F \oplus H$ et de D_k , qui sont en somme directe d'après ce qui précède, donc : $\alpha v_k = 0$, et comme $v_k \neq 0$ (c'est un vecteur propre) on en déduit $\alpha = 0$. Il vient : $x = h$, donc x est à la fois dans F et H , or ils sont en somme directe, donc : $x = 0$. Ceci montre que $H' \cap F = \{0_E\}$, comme annoncé.

Pour résumer : H' est un sous-espace vectoriel de E stable par u , et en somme directe avec F , donc : $H' \in \mathcal{A}$. Or $\dim(H') = r + 1 > r = \dim(H)$, et on a donc trouvé un élément de \mathcal{A} de dimension strictement supérieure à r , ce qui contredit sa maximalité : c'est absurde.

Ce raisonnement par l'absurde montre que le postulat de départ, à savoir $r < n - \dim(F)$, est faux. On a donc : $r \geq n - \dim(F)$, et comme un sous-espace vectoriel H en somme directe avec F est nécessairement de dimension inférieure ou égale à $n - \dim(F)$, on doit avoir : $r = n - \dim(F)$.

En conclusion : soit $G \in \mathcal{A}$ tel que : $\dim(G) = r = n - \dim(F)$ (ce qu'on vient de démontrer, et la question précédente, assurent que G existe). Alors $F \cap G = \{0_E\}$ par définition de \mathcal{A} , et on a : $\dim(F) + \dim(G) = n = \dim(E)$, donc F et G sont supplémentaires dans E , et G est stable par u par définition de \mathcal{A} . On a donc bien démontré que F admet un supplémentaire dans E stable par u , comme demandé.

10. Posons : $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$. Puisque tout vecteur propre est dans un sous-espace propre, il est clair que F contient tous les vecteurs propres de u .

Montrons que u est diagonalisable. Pour cela, suivons l'indication de l'énoncé et raisonnons par l'absurde, en supposant que u n'est pas diagonalisable. Par le critère de diagonalisation, on a donc : $\dim(F) < \dim(E)$, c'est-à-dire : $\dim(F) \leq n - 1$. Par le théorème de la base incomplète, on peut donc compléter une base \mathcal{B}_F de F en une famille libre \mathcal{B} dans E et de cardinal $n - 1$. Posons $H = \text{Vect}_{\mathbf{C}}(\mathcal{B})$: c'est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$ et contenant F (puisque $\mathcal{B}_F \subseteq \mathcal{B}$). Puisque, par hypothèse, tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E , stable par u , c'est en particulier le cas de H , donc il existe un supplémentaire D de H stable par u . On a : $\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = n - (n - 1) = 1$, donc D est une droite vectorielle stable par u : on en déduit qu'elle est engendrée par un vecteur propre (nous avons utilisé à plusieurs reprises la réciproque dans les questions précédentes ; rappelons comment cela se démontre : si $x \neq 0$ engendre D , alors la stabilité par u de D , et le fait que $x \in D$, entraînent que $u(x) \in D = \text{Vect}_{\mathbf{C}}(x)$, donc il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que : $u(x) = \alpha x$, d'où le résultat). Soit x un tel vecteur propre. Comme H est en somme directe avec D , on a $x \notin H$ (sinon on aurait $x \in H \cap D = \{0_E\}$, ce qui est absurde car un vecteur propre est non nul). Or $F \subseteq H$, donc x n'appartient pas à F non plus : c'est absurde, puisque F contient tous les vecteurs propres de u , et x en est un.

Par l'absurde, on a montré que u doit être diagonalisable : d'où le résultat.

On a montré dans cette partie qu'un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par u . Certes, les questions ?? à ?? ne traitent pas les cas triviaux $F = \{0_E\}$ et $F = E$, mais il est facile de se convaincre que le résultat est vrai dans ces deux cas, en prenant pour supplémentaire $G = E$ ou $G = \{0_E\}$.

3 Polynômes de Hurwitz

11. Posons : $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, avec : $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_k > 0$. Alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad P(x) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^d a_k x^k}_{\geq 0} \geq a_0 > 0,$$

donc P ne s'annule pas sur \mathbf{R}_+ (si $d = 0$ alors la somme est nulle par convention). Par contraposée, si α est racine de P , alors : $\alpha < 0$.

12. Soit $S \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de Hurwitz, et soit R un diviseur de S dans $\mathbf{R}[X]$. Il existe donc $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que : $S = QR$.

Montrons que R est un polynôme de Hurwitz : soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $R(z) = 0$. Alors : $S(z) = Q(z)R(z) = Q(z) \times 0 = 0$, donc z est une racine de S . Or S est un polynôme de Hurwitz, donc ses racines sont dans Re^- . On en déduit : $\text{Re}(z) < 0$. Ceci montre que les racines de R sont dans Re^- , d'où le résultat : R est un polynôme de Hurwitz.

13. Un polynôme irréductible de $\mathbf{R}[X]$ est soit de degré 1, soit de degré 2 et de discriminant strictement négatif. Traitons ces deux cas de figure :

— si $P = aX + b$ est de degré 1 avec $a > 0$ (par hypothèse sur le coefficient dominant), alors son unique racine est $-\frac{b}{a} \in \mathbf{R}$; comme P est supposé être un polynôme de Hurwitz, on a : $-\frac{b}{a} < 0$, et comme $a > 0$ cela impose : $b > 0$, donc les coefficients a et b de P sont strictement positifs ;

— si $P = aX^2 + bX + c$ est de degré 2 avec $a > 0$ (par hypothèse sur le coefficient dominant) et $b^2 - 4ac < 0$ (par hypothèse d'irréductibilité), alors les racines de P sont : $\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, et comme P est supposé être un polynôme de Hurwitz, on a : $\text{Re}\left(\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right) = -\frac{b}{2a} < 0$; comme $a > 0$, cela impose : $b > 0$; on en déduit :

$$c = \frac{1}{4a} \cdot 4ac = \frac{1}{4a} (4ac - b^2) + \frac{b^2}{4a} > 0$$

en tant que somme de quantités strictement positives ; ainsi les coefficients a , b et c de P sont strictement positifs.

On observe que dans tous les cas, P est à coefficients strictement positifs, d'où le résultat.

14. On a : $P = (X - z_1)(X - z_2) = X^2 + aX + b$ avec : $a = -(z_1 + z_2) \in \mathbf{R}$, $b = z_1 z_2 \in \mathbf{R}$ (relations coefficients-racines). Avec ces notations :

$$\begin{aligned} Q &= (X - (z_1 + z_1))(X - (z_1 + z_2))(X - (z_2 + z_1))(X - (z_2 + z_2)) \\ &= (X - 2z_1)(X - 2z_2)(X + a)^2 \\ &= 4 \left(\frac{X}{2} - z_1\right) \left(\frac{X}{2} - z_2\right) (X + a)^2 \\ &= 4P \left(\frac{X}{2}\right) (X + a)^2. \end{aligned}$$

Nous allons utiliser cette relation de divisibilité dans $\mathbf{R}[X]$ (il n'était pas évident *a priori*, d'ailleurs, que Q soit à coefficients réels) pour en déduire que si les coefficients de Q sont strictement positifs, alors P est un polynôme de Hurwitz. Notons d'abord que P en est un si et seulement si $P\left(\frac{X}{2}\right)$ en est un : en effet, les racines de $P\left(\frac{X}{2}\right)$ s'obtiennent à partir de celles de P via une multiplication par 2, et donc les signes des parties réelles des racines sont les mêmes pour les deux polynômes. Nous allons donc étudier $P\left(\frac{X}{2}\right)$, ce qui nous permettra malgré tout de conclure sur P .

Supposons que Q est à coefficients positifs, et soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de $P\left(\frac{X}{2}\right)$ (on a donc $\alpha \in \{2z_1, 2z_2\}$). La relation ci-dessus implique que α est aussi une racine de Q . Si les racines de P sont réelles, alors $\alpha \in \mathbf{R}$ et c'est une racine de Q , qui est à coefficients positifs. D'après la question ??, on a donc : $\text{Re}(\alpha) = \alpha < 0$. Si les racines de P ne sont pas réelles alors, du fait que $P \in \mathbf{R}[X]$, ses racines sont complexes conjuguées. En particulier : $a = -(z_1 + z_2) = -(z_1 + \bar{z}_1) = -2\text{Re}(z_1)$. Nous allons donc obtenir le signe de $\text{Re}(z_1)$ (qui est aussi celui de $\text{Re}(z_2)$) grâce au signe de a ; seulement nous ne connaissons pas le signe des coefficients de P , donc le signe de a nous est inconnu *a priori*. Pour le connaître, il faudrait ramener a aux coefficients de Q , que l'on sait être strictement positifs. C'est l'objectif ci-dessous. D'après la relation ci-dessus, on a :

$$Q = 4P \left(\frac{X}{2}\right) (X + a)^2 = (X^2 + 2aX + 4b) (X^2 - 2aX + a^2) = X^4 + (2a + 2a) X^3 + \dots,$$

les autres coefficients ne m'intéressant pas pour conclure. Le coefficient de X^3 est égal à $4a$, et il est strictement positif par hypothèse sur Q . On a donc : $a > 0$, ce qui implique, par ce qui précède : $\operatorname{Re}(z_1) < 0$. De même : $\operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(z_1) < 0$. Ainsi les racines de P sont de partie réelle strictement négative, et donc $\alpha \in \{2z_1, 2z_2\}$ également.

On a donc montré que peu importe l'hypothèse faite sur les racines de P , celles de $P\left(\frac{X}{2}\right)$ sont de partie réelle strictement négative, et donc $P\left(\frac{X}{2}\right)$ est un polynôme de Hurwitz, et donc P également.

Remarque. Plus rapidement, les relations coefficients-racines dans le cas d'un polynôme de degré quelconque (qu'il faudrait redémontrer, semblablement au cas des polynômes de degré 2) donneraient ici que le coefficient de X^3 dans Q est l'opposé de la somme de ses racines, c'est-à-dire :

$$-[(z_1 + z_1) + (z_1 + z_2) + (z_2 + z_1) + (z_2 + z_2)] = -4(z_1 + z_2),$$

et comme ce coefficient est supposé être strictement positif, on a : $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) < 0$. Or $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 2\operatorname{Re}(z_1)$ dans le cas où les deux racines sont complexes conjuguées, ce qui redémontre le résultat ci-dessus.

15. Posons : $d_A = \deg(A)$, $d_B = \deg(B)$, et écrivons : $A = \sum_{k=0}^{d_A} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, et : $B = \sum_{k=0}^{d_B} b_k X^k \in \mathbf{R}[X]$. On a par hypothèse : $\forall k \in \llbracket 0, d_A \rrbracket$, $a_k > 0$, et : $\forall k \in \llbracket 0, d_B \rrbracket$, $b_k > 0$. On a : $\deg(AB) = d_A + d_B$, et pour tout $k \in \llbracket 0, d_A + d_B \rrbracket$ le coefficient c_k en facteur de X^k dans AB est :

$$c_k = \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq d_A \\ 0 \leq m \leq d_B \\ \ell + m = k}} a_\ell b_m.$$

Cette somme est bien indexée par un ensemble non vide : si $0 \leq k \leq d_A$, alors $(\ell, m) = (k, 0)$ vérifie bien $0 \leq \ell = k \leq d_A$, $0 \leq m \leq d_B$ et $\ell + m = k$, tandis que si $d_A \leq k \leq d_A + d_B$ alors $(\ell, m) = (d_A, k - d_A)$ vérifie bien :

$$0 \leq \underbrace{d_A}_{=\ell} \leq d_A, \quad \underbrace{d_A - d_A}_{=0} \leq \underbrace{k - d_A}_{=m} \leq \underbrace{(d_A + d_B) - d_A}_{=d_B},$$

et $\ell + m = k$. Le coefficient c_k est donc une somme non vide de réels strictement positifs, et on en déduit : $\forall k \in \llbracket 0, d_A + d_B \rrbracket$, $c_k > 0$: d'où le résultat. Les coefficients de AB sont bien strictement positifs.

16. Avant de démontrer l'équivalence demandée, il est utile de démontrer le résultat général suivant :

Si un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ est unitaire et de Hurwitz, alors ses coefficients sont strictement positifs. (*)

Dire qu'il est unitaire signifie qu'il est de coefficient dominant égal à 1.

En effet, soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de Hurwitz, qu'on décompose en facteurs irréductibles : $P = \prod_{i=1}^r P_i$, où les P_i sont ses facteurs irréductibles (qu'on peut également choisir unitaires si P l'est). Alors les P_i sont également de Hurwitz par la question ??, et comme ils sont irréductibles et de coefficient dominant strictement positif (égal à 1), d'après la question ?? leurs coefficients sont strictement positifs. Par la question ??, $P = \prod_{i=1}^r P_i$ est donc également à coefficients strictement positifs, ce qui démontre (*).

Passons à la démonstration de l'équivalence demandée. Supposons que P est un polynôme de Hurwitz, et montrons que P et Q sont à coefficients strictement positifs : pour P , cela découle de (*) (en effet $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ est unitaire), et nous allons montrer que Q est de Hurwitz

pour également lui appliquer (*). Soit z une racine de Q . Par définition de Q , ses racines sont de la forme $z_k + z_\ell$ avec $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, donc, tel que : $z = z_k + z_\ell$. On a : $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_k) + \operatorname{Re}(z_\ell)$. Or z_k et z_ℓ sont des racines de P par définition de ce polynôme, et comme il est de Hurwitz ses racines sont de partie réelle strictement négative. On en déduit :

$$\operatorname{Re}(z) = \underbrace{\operatorname{Re}(z_k)}_{<0} + \underbrace{\operatorname{Re}(z_\ell)}_{<0} < 0,$$

ce qui montre bien que toute racine de Q est de partie réelle strictement négative, et donc que Q est un polynôme de Hurwitz. Comme il est dans $\mathbf{R}[X]$ par hypothèse dans cette question, et unitaire par définition, d'après (*) ses coefficients sont strictement positifs. Ainsi, si P est un polynôme de Hurwitz, alors P et Q sont à coefficients strictement positifs.

Réciproquement, supposons que P et Q sont à coefficients strictement positifs, et montrons que P est un polynôme de Hurwitz. Soit z une racine de P , qui est donc de la forme $z = z_k$ avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On veut montrer : $\operatorname{Re}(z) < 0$. Puisque $P \in \mathbf{R}[X]$, on sait que \bar{z}_k est aussi racine de P , puisque $P \in \mathbf{R}[X]$. Il existe donc $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $\bar{z}_k = z_\ell$. On note alors que : $2\operatorname{Re}(z) = z_k + \bar{z}_k = z_k + z_\ell$ est une racine de Q , par définition de ce polynôme. Mieux : c'est une racine réelle de Q qui est à coefficients strictement positifs, donc d'après la question ?? on a $2\operatorname{Re}(z) < 0$ (c'est là qu'on comprend l'intérêt de la définition de Q : obtenir un polynôme à coefficients réels dont les racines sont, à peu de choses près, les parties réelles de celles de P), et donc $\operatorname{Re}(z) < 0$: ce qu'on voulait démontrer. Puisque toutes les racines de P sont de partie réelle strictement négative, P est un polynôme de Hurwitz : d'où l'implication réciproque.

On a donc démontré l'équivalence demandée : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

Remarque. L'énoncé rajoute l'hypothèse que Q est dans $\mathbf{R}[X]$. En fait, si $P \in \mathbf{R}[X]$, alors c'est nécessairement le cas pour Q aussi : en effet, le fait que $P \in \mathbf{R}[X]$ assure que si $z \in \mathbf{C}$ est racine de P , alors \bar{z} aussi (ce fait est classique). Le lecteur se convaincra alors qu'il en est de même pour Q , puisque les racines de Q sont les nombres de la forme $z + z'$ avec z et z' racines de P . Si l'on note \mathcal{R} l'ensemble des racines de Q , alors ce qui précède implique que la conjugaison complexe est une application de \mathcal{R} dans \mathcal{R} , et bijective puisque sa réciproque est elle-même. Alors :

$$\bar{Q} = \overline{\prod_{z \in \mathcal{R}} (X - z)} = \prod_{z \in \mathcal{R}} (X - \bar{z}) = \prod_{z \in \mathcal{R}} (X - z) = Q,$$

le caractère bijectif ayant été utilisé pour l'avant-dernière égalité. Puisque Q est invariant par conjugaison complexe, on a bien : $Q \in \mathbf{R}[X]$.

4 Système différentiel de matrice associée semi-simple

17. Puisque M est semblable à T dans $M_n(\mathbf{R})$, il existe $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que : $M = PTP^{-1}$. Soit $X : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application dérivable sur \mathbf{R} , et posons : $Y = P^{-1}X$. Alors Y est également dérivable sur \mathbf{R} en tant que composée de X qui l'est, et de l'application linéaire $A \mapsto P^{-1}A$, et on a : $Y' = P^{-1}X'$. On en déduit :

$$\begin{aligned} X \text{ vérifie } (S) &\iff X' = MX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY \\ &\iff Y \text{ vérifie } (S^*). \end{aligned}$$

Ainsi une solution X de (S) est de la forme $X = PY$ avec Y solution de (S^*) .

Cela montre bien ce que l'on veut, à savoir que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*) . En effet, si l'on nomme L_1, \dots, L_n les lignes de P , alors les règles de calcul matriciel montrent que si $X = PY$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la i^{e} composante de X est égale à $\langle L_i, Y \rangle$; or ce produit scalaire est la somme des produits des coordonnées de L_i et de Y , donc c'est une combinaison linéaire des coordonnées de Y : d'où le résultat.

18. L'application X est solution de (S) si et seulement si $X' = MX$, si et seulement si, en identifiant composante par composante :

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = -bx + ay. \end{cases} \quad (\dagger)$$

En faisant l'opération $L_2 \leftarrow iL_2 + L_1$, on en déduit que si X est solution de (S) , alors on a :

$$x' + iy' = (a - bi)x + (b + ai)y = (a - bi)x + (-bi^2 + ai)y = (a - bi)x + i(a - bi)y = (a - bi)(x + iy),$$

c'est-à-dire : $z' = (a - bi)z$. Réciproquement, si $z' = (a - bi)z$ alors, en identifiant parties réelles et parties imaginaires dans cette égalité, on obtient (\dagger) , et donc X est solution de (S) . On a donc montré :

$$X' = MX \iff z' = (a - bi)z.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, dont les solutions de la forme $z : t \mapsto \alpha e^{(a-bi)t}$ avec $\alpha \in \mathbf{C}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} X' = MX &\iff \exists \alpha \in \mathbf{C}, \forall t \in \mathbf{R}, \quad z(t) = \alpha e^{(a-bi)t} = \alpha e^{at} e^{-bit} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbf{C}, \forall t \in \mathbf{R}, \quad x(t) + iy(t) = (\operatorname{Re}(\alpha) + i\operatorname{Im}(\alpha)) (\cos(bt) - i \sin(bt)) e^{at} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbf{C}, \forall t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x(t) = \operatorname{Re}(\alpha) \cos(bt) e^{at} + \operatorname{Im}(\alpha) \sin(bt) e^{at} \\ y(t) = -\operatorname{Re}(\alpha) \sin(bt) e^{at} + \operatorname{Im}(\alpha) \cos(bt) e^{at} \end{cases} \end{aligned}$$

en identifiant parties réelles et parties imaginaires. Alors, en posant $c = \operatorname{Re}(\alpha)$ et $d = \operatorname{Im}(\alpha)$ (ou, pour le sens réciproque de l'équivalence ci-dessous, en posant $\alpha = c + id$), on a :

$$X' = MX \iff \exists (c, d) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, \quad X(t) = e^{at} (c \cos(bt) + d \sin(bt), -c \sin(bt) + d \cos(bt)),$$

ce qui nous donne la forme explicite des solutions de (S) .

Déduisons-en les solutions du système différentiel $X' = BX$, où B est la matrice de la question ???. On avait montré que si $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors : $B = Q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}$. Par conséquent, d'après la question ???, on obtient les solutions de $X' = BX$ en multipliant par Q les solutions Y de $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} Y$. Ces dernières solutions ont été trouvées ci-dessus : il suffit de poser $a = 2$ et $b = 3$. On a alors :

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} Y \iff \exists (c, d) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, Y(t) = e^{2t} (c \cos(3t) + d \sin(3t), -c \sin(3t) + d \cos(3t)).$$

En calculant $X = QY$, on en déduit :

$$X' = BX \iff \exists (c, d) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2c \cos(3t) + 2d \sin(3t) \\ (3d - c) \cos(3t) - (3c + d) \sin(3t) \end{pmatrix},$$

d'où le résultat.

19. Tout d'abord, notons que même sans hypothèse sur M , on peut montrer qu'une condition nécessaire, pour que toute solution de (S) ait ses coordonnées qui tendent vers 0 en $+\infty$, et que les parties réelles des valeurs propres soient strictement négatives. En effet, s'il existe une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de M dont la partie réelle est positive ou nulle, et si $X \in M_{2,1}(\mathbf{C})$ est un vecteur propre associé (si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors on prend $X \in M_{2,1}(\mathbf{R})$ dans ce qui suit), alors on sait que l'application $Y : t \mapsto e^{\lambda t} X$ vérifie $Y' = MY$. Si l'on souhaite une solution à valeurs réelles, il suffit de considérer $\operatorname{Re}(Y)$ ou $\operatorname{Im}(Y)$. Or pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a :

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} X &= e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} (\cos(\operatorname{Im}(\lambda)t) + i \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)) (\operatorname{Re}(X) + i\operatorname{Im}(X)) \\ &= e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} [(\cos(\operatorname{Im}(\lambda)t)\operatorname{Re}(X) - \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)\operatorname{Im}(X)) + i(\cos(\operatorname{Im}(\lambda)t)\operatorname{Im}(X) + \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)\operatorname{Re}(X))], \end{aligned}$$

donc une solution de (S) est par exemple :

$$Y_0 = \operatorname{Re}(Y) : t \mapsto e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} (\cos(\operatorname{Im}(\lambda)t)\operatorname{Re}(X) - \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)\operatorname{Im}(X)),$$

et au moins l'une des coordonnées de Y_0 ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Si $\operatorname{Im}(\lambda) = 0$, alors c'est évident, puisque dans ce cas : $Y_0(t) = e^{\lambda t}\operatorname{Re}(X)$ avec $\operatorname{Re}(X) = X \neq 0_{\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R})}$ et $e^{\lambda t} \not\rightarrow 0$ (car $e^{\lambda t} \geq e^0 = 1$ en utilisant le fait que $\lambda = \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$). Si $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$ alors, comme $X \neq 0_{\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{C})}$, on a $\operatorname{Re}(X) \neq 0_{\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R})}$ ou $\operatorname{Im}(X) \neq 0_{\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R})}$. Supposons par exemple que $\operatorname{Re}(X) \neq 0_{\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R})}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_0 \left(\frac{2n\pi}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} \right) = e^{\operatorname{Re}(\lambda) \frac{2n\pi}{|\operatorname{Im}(\lambda)|}} \cos(\pm 2n\pi) \operatorname{Re}(X) = e^{\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)\pi}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} n} \operatorname{Re}(X),$$

et comme : $\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)\pi}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} \geq 0$, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, e^{\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)\pi}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} n} \geq 1$, donc cette exponentielle ne tend vers pas 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et donc une composante non nulle de $e^{\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)\pi}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} n} \operatorname{Re}(X)$ non plus. Raisonement analogue si l'on suppose $\operatorname{Im}(X) \neq 0_{\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R})}$, en remplaçant $2n\pi$ par $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Par caractérisation séquentielle de la limite, au moins une composante de Y_0 ne tend pas vers 0 en $+\infty$, ce qui montre bien que s'il existe une valeur propre de partie réelle positive ou nulle, alors le système (S) admet au moins une solution dont des composantes n'ont pas une limite nulle en $+\infty$.

Ce qui précède montre, par contraposée, que si toute solution de (S) a chacune de ses composantes tendant vers 0 en $+\infty$, alors :

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbf{C}}(M), \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0.$$

Montrons que la réciproque est vraie, en supposant comme dans l'énoncé que M est semi-simple. On va réduire M pour simplifier le système différentiel à étudier (et donc la description de ses solutions), et on conclura sur le comportement asymptotique des solutions de $X' = MX$ grâce à la question ??.

Soient λ et μ les valeurs propres de M , et supposons que leurs parties réelles sont strictement négatives. D'après la question ??, il y a deux cas de figure à considérer :

- soit M est diagonalisable sur \mathbf{R} ;
- soit M admet deux valeurs propres complexes distinctes conjuguées ; ce qui, par la question ??, implique que M est semblable à une matrice de la forme $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ (plus précisément, a et b sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une valeur propre de M).

Cas où M est diagonalisable sur \mathbf{R} . Alors λ et μ sont des valeurs propres réelles, et M est semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Or il est facile de démontrer *via* les méthodes classiques (il suffit d'identifier composante par composante dans l'égalité $Y' = DY$, et de résoudre les équations $y'_1 = \lambda y_1$ et $y'_2 = \mu y_2$) que les solutions de $Y' = DY$ sont de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda t} \\ \beta e^{\mu t} \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Comme $\operatorname{Re}(\lambda) = \lambda < 0$ et $\operatorname{Re}(\mu) = \mu < 0$ par hypothèse, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\mu t} = 0$, et donc chaque composante d'une solution $Y : t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda t} \\ \beta e^{\mu t} \end{pmatrix}$ de $Y' = DY$ tend vers 0 en $+\infty$; or les composantes des solutions de $X' = MX$ sont des combinaisons linéaires des composantes des solutions de $Y' = DY$, et une combinaison linéaire de fonctions ayant une limite nulle a aussi une limite nulle : on en déduit que toute solution de $X' = MX$ a ses composantes tendant vers 0 en $+\infty$, d'où le résultat si M est diagonalisable sur \mathbf{R} .

Cas où M est semblable à $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. D'après la question précédente, les solutions de $Y' = M(a, b)Y$ sont de la forme :

$$Y : t \mapsto e^{at} (c \cos(bt) + d \sin(bt), -c \sin(bt) + d \cos(bt)),$$

avec $(c, d) \in \mathbf{R}^2$. De plus, la résolution de la question ?? montre que : $a = \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\mu)$. L'hypothèse sur les valeurs propres de M équivaut donc à : $a < 0$. Il est alors facile de démontrer que chaque composante d'une solution Y tend vers 0 en l'infini, grâce au théorème des gendarmes : si $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, alors pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a :

$$0 \leq \left| e^{at} (c \cos(bt) + d \sin(bt)) \right| \leq e^{at} (|c| \cdot |\cos(bt)| + |d| \cdot |\sin(bt)|) \leq e^{at} (|c| + |d|),$$

et comme $a < 0$ on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} = 0$. Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} (c \cos(bt) + d \sin(bt)) = 0.$$

De même : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} (-c \sin(bt) + d \cos(bt)) = 0$, donc chaque composante d'une solution Y de $Y' = M(a, b)Y$ tend vers 0 en l'infini, et comme dans le premier cas on en déduit que chaque solution de $X' = MX$ a aussi ses composantes tendant vers 0 en $+\infty$: d'où le résultat.

On a donc démontré que, dans le cas où $M \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ est semi-simple :

Chaque composante d'une solution X de $X' = MX$ tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si :
 $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbf{C}}(M), \operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Remarque. Ma démonstration de la condition nécessaire peut paraître inutilement sophistiquée, et je l'entends. Il est en effet possible de directement produire des solutions avec au moins une composante ne tendant pas vers 0 en $+\infty$, grâce à la description explicite des solutions dans chaque cas de figure ci-dessus. La raison pour laquelle je n'ai pas procédé ainsi, est d'une part pour l'étape suivante : une fois produite une solution de (S^*) dont une composante ne tend pas vers 0 en $+\infty$, il me semblait tout aussi poussif que dans mon approche d'en déduire une solution de (S) vérifiant la même propriété. D'autre part, il peut être utile de savoir que le résultat demandé est général (il ne dépend pas de l'ordre de la matrice M , ni de son type de réduction).

20. Soit Φ une solution de (S^*) . Nous allons démontrer que l'application $f : t \mapsto e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2$ est décroissante sur \mathbf{R}_+ , en montrant que sa dérivée est négative. Pour justifier la dérivabilité de $\|\Phi\|^2$ (et calculer la dérivée), on remarque que : $\|\Phi\|^2 = \langle \Phi, \Phi \rangle$. Comme Φ est dérivable, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinéaire, l'application $\langle \Phi, \Phi \rangle$ est dérivable et :

$$\left(\|\Phi\|^2 \right)' = \langle \Phi', \Phi \rangle + \langle \Phi, \Phi' \rangle = 2\langle \Phi', \Phi \rangle.$$

Or Φ est solution de (S^*) , donc : $\Phi' = T\Phi$. On a donc :

$$\left(\|\Phi\|^2 \right)' = 2\langle T\Phi, \Phi \rangle.$$

D'après la condition (C), il en résulte :

$$\left(\|\Phi\|^2 \right)' \leq -2\beta \|\Phi\|^2.$$

Passons à la dérivée de $f : t \mapsto e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2$. C'est bien une application dérivable en tant que produit de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall t \geq 0, \quad f'(t) = 2\beta e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2 + e^{2\beta t} \left(\|\Phi\|^2 \right)'(t) \leq e^{2\beta t} \left(2\beta \|\Phi(t)\|^2 - 2\beta \|\Phi(t)\|^2 \right) \leq 0,$$

donc f est décroissante sur \mathbf{R}_+ . On a en particulier : $\forall t \geq 0, f(t) \leq f(0)$, c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0, \quad e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2 \leq \|\Phi(0)\|^2,$$

et donc, en isolant $\|\Phi(t)\|^2$ et en extrayant la racine carrée :

$$\forall t \geq 0, \quad \|\Phi(t)\| \leq e^{-\beta t} \|\Phi(0)\|.$$

On reconnaît \mathbf{A}_3 , avec $k = 1$ et $\alpha = \beta > 0$: d'où le résultat.

21. Nous allons montrer :

$$\mathbf{A}_3 \implies \mathbf{A}_2 \implies \mathbf{A}_1 \implies \mathbf{A}_3.$$

Pour les deux dernières implications, nous aurons besoin de quelques notations : comme M est semi-simple, d'après la question ?? la matrice M est semblable à une matrice de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} D & & & \mathbf{0} \\ & M(a_1, b_1) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & M(a_q, b_q) \end{pmatrix},$$

avec $D \in M_p(\mathbf{R})$ diagonale et $((a_1, b_1), \dots, (a_q, b_q)) \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)^q$. On en déduit que les solutions de (S^*) s'expriment à l'aide de solutions de $Y'_j = M(a_j, b_j)Y_j$ (ce qui nous permettra d'utiliser

la caractérisation de la question ??), et réciproquement. En effet, si l'on pose : $Y = \begin{pmatrix} Y_D \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_q \end{pmatrix}$, avec

$Y_D : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$ et $Y_1, \dots, Y_q : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ des applications dérivables sur \mathbf{R} , alors il est clair que :

$$Y' = TY \iff \begin{cases} Y'_D = DY_D, \\ Y'_1 = M(a_1, b_1)Y_1, \\ \vdots \\ Y'_q = M(a_q, b_q)Y_q. \end{cases} \quad (\ddagger)$$

Démonstration que \mathbf{A}_3 implique \mathbf{A}_2 . On suppose \mathbf{A}_3 . Soit X une solution de (S) , dont on veut montrer que $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbf{R}^2}$. Comme \mathbf{A}_3 est supposée vraie, on a :

$$\forall t \geq 0, \quad 0 \leq \|X(t)\| \leq ke^{-\alpha t} \|X(0)\|,$$

avec $(\alpha, k) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = 0$. Donc par le théorème des gendarmes : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$.

Ceci montre que $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbf{R}^2}$, comme voulu. Ainsi \mathbf{A}_3 implique \mathbf{A}_2 .

Démonstration que \mathbf{A}_2 implique \mathbf{A}_1 . On suppose \mathbf{A}_2 . Alors, en utilisant \mathbf{A}_2 et en imitant le raisonnement de la question ?? (il suffit de raisonner sur $Y = P^{-1}X$ au lieu de $X = PY$), les solutions de (S^*) tendent aussi vers $0_{\mathbf{R}^n}$ vers $+\infty$. Par conséquent, si toute solution Y de (S^*) tend vers zéro en l'infini, l'équivalence (\ddagger) assure qu'il en est de même des solutions de $Y'_D = DY_D$ et $Y'_j = M(a_j, b_j)Y_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, en regardant la limite de Y composante par composante. Par la question ??, ceci implique que les valeurs propres de $M(a_j, b_j)$ sont de partie réelle strictement négative pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, c'est-à-dire : pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\chi_{M(a_j, b_j)}$ est un polynôme de Hurwitz. Il en est de même pour χ_D : il suffit pour cela de reproduire le raisonnement de la question ?? dans le cas où M est diagonalisable sur \mathbf{R} ; le fait d'avoir une matrice d'ordre $n \geq 2$ ne change rien à l'affaire. Par conséquent :

$$\chi_M = \chi_D \times \prod_{j=1}^q \chi_{M(a_j, b_j)}$$

est aussi un polynôme de Hurwitz (en effet, ses racines sont celles d'un des $\chi_{M(a_j, b_j)}$ ou de χ_D , et elles sont donc de partie réelle strictement négative puisque ces polynômes sont de Hurwitz). Ainsi \mathbf{A}_2 implique \mathbf{A}_1 .

Démonstration que \mathbf{A}_1 implique \mathbf{A}_3 . Supposons que χ_M est un polynôme de Hurwitz. Nous allons d'abord montrer que les solutions de (S^*) vérifient \mathbf{A}_3 , en montrant que T vérifie la condition

(C) de l'énoncé. Soit : $X = \begin{pmatrix} X_D \\ X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbf{C})$, avec $X_D \in M_{p,1}(\mathbf{C})$, et $X_j \in M_{2,1}(\mathbf{C})$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Alors, en reprenant les notations du début de la question :

$$\langle TX, X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} DX_D \\ M(a_1, b_1)X_1 \\ \vdots \\ M(a_q, b_q)X_q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_D \\ X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{pmatrix} \right\rangle = \langle DX_D, X_D \rangle + \sum_{j=1}^q \langle M(a_j, b_j)X_j, X_j \rangle,$$

en regroupant deux à deux les produits de coordonnées dans le calcul de $\langle TX, X \rangle$. Majorons ces différents produits scalaires. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ désignent les coefficients diagonaux de D , et x_1, \dots, x_p les coefficients de X_D , alors :

$$\langle DX_D, X_D \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_p x_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j^2 \leq \left(\max_{1 \leq j \leq p} \lambda_j \right) \sum_{j=1}^p x_j^2,$$

et pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, si l'on note $X_j = \begin{pmatrix} y_j \\ z_j \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} \langle M(a_j, b_j)X_j, X_j \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_j y_j + b_j z_j \\ -b_j y_j + a_j z_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_j \\ z_j \end{pmatrix} \right\rangle = (a_j y_j + b_j z_j)y_j + (-b_j y_j + a_j z_j)z_j \\ &= a_j (y_j^2 + z_j^2) \\ &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq q} a_j \right) (y_j^2 + z_j^2). \end{aligned}$$

On en déduit que si l'on pose : $\beta = -\max(\lambda_1, \dots, \lambda_p, a_1, \dots, a_q)$, alors :

$$\langle TX, X \rangle \leq \left(\max_{1 \leq j \leq p} \lambda_j \right) \sum_{j=1}^p x_j^2 + \left(\max_{1 \leq j \leq q} a_j \right) \sum_{j=1}^q (y_j^2 + z_j^2) \leq -\beta \left(\sum_{j=1}^p x_j^2 + \sum_{j=1}^q (y_j^2 + z_j^2) \right) = -\beta \|X\|^2.$$

Pour en déduire que T vérifie (C), justifions que $\beta > 0$: comme $\chi_M = \chi_T$ est de Hurwitz, toutes les valeurs propres de T sont de partie réelle strictement négative. Or l'écriture par blocs de T (ou les résultats de la première partie du problème) permet de montrer que les valeurs propres de T sont les coefficients diagonaux de D (qu'on a notés $\lambda_1, \dots, \lambda_p$) et les nombres complexes de la forme $a_j \pm ib_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Le fait que les valeurs propres soient de partie réelle strictement négative signifie donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lambda_i < 0, \quad \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad \operatorname{Re}(a_j \pm ib_j) = a_j < 0.$$

On a donc bien : $\beta = -\max(\lambda_1, \dots, \lambda_p, a_1, \dots, a_q) > 0$. Ceci démontre que T vérifie (C), donc par la question précédente \mathbf{A}_3 est vérifié (avec $k = 1$ et β défini ci-dessus) pour les solutions de (S^*) ; mais ce qu'il nous faut est le résultat pour les solutions de (S) . Pour cela, on note que d'après la question ??, les solutions de (S) sont de la forme $X = PY$ avec $P = ((p_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{C})$ et Y une solution de (S') . Si l'on note L_1, \dots, L_n les lignes de P alors, comme on l'a dit dans la résolution de la question ??, on a :

$$X = (\langle L_1, Y \rangle, \dots, \langle L_n, Y \rangle),$$

et donc :

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle L_i, Y \rangle^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|X\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|L_i\|^2 \|Y\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \|L_i\|^2 \right) \|Y\|^2.$$

Posons : $k_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|L_i\|^2} > 0$ (c'est la norme de P , même si cela est sans importance pour la suite). On vient de montrer qu'on a : $\|X\| \leq k_1 \|Y\|$, avec Y une solution de (S^*) . D'après ce qu'on a montré plus haut, on a donc aussi : $\forall t \geq 0, \|Y(t)\| \leq e^{-\beta t} \|Y(0)\|$. On en déduit :

$$\forall t \geq 0, \quad \|X(t)\| \leq k_1 e^{-\beta t} \|Y(0)\|.$$

Or, en imitant le raisonnement ci-dessus (à ceci près qu'il faut écrire $Y(0) = P^{-1}X(0)$ et introduire les lignes de P^{-1}), on montre qu'il existe $k_2 > 0$ tel que : $\|Y(0)\| \leq k_2 \|X(0)\|$. On conclut :

$$\forall t \geq 0, \quad \|X(t)\| \leq k_1 k_2 e^{-\beta t} \|X(0)\|,$$

d'où \mathbf{A}_3 en posant $k = k_1 k_2 > 0$.

En conclusion, on a montré : $\mathbf{A}_3 \implies \mathbf{A}_2 \implies \mathbf{A}_1 \implies \mathbf{A}_3$. Ces trois propriétés sont donc équivalentes, ce qu'il fallait démontrer.