

Exercice 1 (Applications du théorème de Rolle)

1. Cours...

2. Classique : On note $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ p zéros distincts de h . Pour $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, on applique le théorème de Rolle pour h sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$: comme $[a_k, a_{k+1}] \subset I$, h est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et $h(a_k) = h(a_{k+1})$ (car les deux sont nuls), il existe au moins un $\alpha_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $h'(\alpha_k) = 0$.

$\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ sont $p-1$ zéros distincts de h' (car $a_1 < \alpha_1 < a_2 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{p-1} < a_p$).

3. En fait b est strictement négative sur $]0, +\infty[$!

$$a(x) = x^{30}\varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = 3x^{-50} + x^{-40} + 4x^{-20} + 2x^{-10}.$$

Par l'absurde si a s'annulait au moins 5 fois sur $]0, +\infty[$ alors φ aussi et (φ est bien dérivable sur $]0, +\infty[$) d'après 2°) φ' s'annulerait au moins 4 fois sur $]0, +\infty[$. Or :

$$\varphi'(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11} = b(x). \text{ Contradiction.}$$

a s'annule au plus 4 fois sur $]0, +\infty[$.

4. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$:

Au rang 1, une fonction f_1 s'écrit $f_1 : x \mapsto \lambda x^\alpha$ avec $\lambda \neq 0$ donc elle ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ (donc elle s'annule au plus 0 fois).

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose le résultat au rang n .

Soit alors $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels non nuls et $f_{n+1} : x \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k}$.

$$f_{n+1} = x^{\alpha_{n+1}}\varphi(x) \text{ où } \varphi(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_{n+1}} + \lambda_{n+1}.$$

$$f_{n+1} \text{ et } \varphi \text{ ont les mêmes zéros or } \varphi'(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\alpha_k - \alpha_{n+1}) x^{\alpha_k - \alpha_{n+1} - 1}.$$

D'après l'hypothèse au rang n appliquée à φ' (on peut : les coefficients $\lambda_k (\alpha_k - \alpha_{n+1})$ sont non nuls et les exposants $\alpha_k - \alpha_{n+1} - 1$ sont rangés dans l'ordre strictement croissant), φ' s'annule au plus $n-1$ fois donc d'après le 2°) φ s'annule au plus n fois donc f_{n+1} aussi. C'est le résultat au rang $n+1$. \square

5. D'après le 4°) (on peut...) P admet au plus 3 zéros dans $]0, +\infty[$. 0 n'est pas racine de P . En considérant pour $x > 0$, $f(x) = P(-x) = x^{400} + 7x^{201} + 4x^{101} + 1$, on a aussi au plus 3 zéros de f dont au plus trois racines de P dans $] -\infty, 0[$.

P admet au plus 6 racines réelles.

Là encore l'exemple est mal choisi, f est en fait > 0 !!!

Exercice 2 (Inégalité d'Hadarnard)

Partie A

1. $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

- a) Il existe P orthogonale telle que ${}^tPSP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. De plus les valeurs propres $\lambda_k \geq 0$, en notant $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ et $M = P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP$, on aura :
- $${}^tM = {}^t({}^tP) {}^t \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP = P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP \text{ (en fait } M \text{ est symétrique...)}$$
- $${}^tMM = P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP$$
- $$= P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP \text{ (car } {}^tPP = I_n)$$
- $${}^tMM = P \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) {}^tP = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^tP = S$$

b) *C'est du cours mais remontrons-le ici avec le a) :*

$${}^tX SX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geq 0.$$

c) $s_{i,i}$ est la i -ème coordonnée dans la base canonique (E_1, \dots, E_n) de la i -ème colonne C_i , comme cette base est orthonormée on a :

$$s_{i,i} = (C_i | E_i) = {}^t(SE_i)E_i = {}^tE_i {}^tSE_i = {}^tE_i SE_i \geq 0 \text{ d'après b).}$$

2. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. On reprend les démonstrations précédentes avec en plus les valeurs propres $\lambda_k > 0$.

a) On avait posé $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ et $M = P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tP$. Comme les $\mu_k > 0$, la matrice M est un produit de matrices inversibles donc inversible.

b) *C'est du cours aussi mais remontrons-le ici avec le a) :*

$${}^tX SX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2. \text{ Ici } X \text{ non nulle et } M \text{ inversible donc } MX \text{ est non nulle donc } {}^tX SX = \|MX\|^2 > 0.$$

c) $s_{i,i} = {}^tE_i SE_i > 0$ d'après 2.b).

3. Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, on a vu $s_{i,i} \geq 0$ donc $\prod_{i=1}^n s_{i,i} \geq 0$.

Comme $S \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ au moins une des valeurs propres est nulle donc S n'est pas inversible donc $\det(S) = 0$.

L'égalité (1) est vérifiée pour $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

4. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ avec $s_{i,i} = 1$.

a) $\exp'' = \exp \geq 0$ donc \exp est convexe sur \mathbf{R} . Donc (l'image de la moyenne est inférieure à la moyenne des images) : $\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(x_i)$.

$$\text{En utilisant } x_i = \ln(\lambda_i), \text{ on obtient } \sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(\lambda_1 \dots \lambda_n)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

b) On a $\det(S) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ et $\text{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Mais $\text{tr}(S) = \sum_{i=1}^n s_{i,i} = n$ (ici $s_{i,i} = 1$).

L'inégalité précédente donne $\det(S)^{1/n} \leq 1$.

Finalement $\det(S) \leq 1 = \prod_{i=1}^n s_{i,i}$. Cette S vérifie (1).

5. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

a) ${}^tXBX = {}^tXTSTX = {}^t(TX)S(TX)$ (car ${}^tT = T$). La colonne TX n'est pas nulle (T inversible et $X \neq 0$) donc d'après 2°b) : ${}^tXBX > 0$.

b) B est symétrique (${}^tB = {}^tT {}^tS {}^tT = TST$) et si $\lambda \in \text{Sp}(B)$ il existe une X non nulle tel que $BX = \lambda X$.

Alors $0 < {}^tXBX = {}^tX\lambda X = \lambda \|X\|^2$. Comme $\|X\| > 0$ on en déduit $\lambda > 0$.

$$\boxed{B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})}.$$

c) Les coefficients $b_{i,j}$ de B vérifie $b_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}}} s_{i,j} \frac{1}{\sqrt{s_{j,j}}}$. En particulier les $b_{i,i} = 1$.

Donc (1) est vraie pour B donc $\det(T) \det(S) \det(T) \leq 1$ comme $\det(T)^2 = 1 / \prod_{i=1}^n s_{i,i}$ on en déduit (1) pour la matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Partie B

1. La matrice $S = {}^tAA$ est symétrique réelle et ses valeurs propres λ sont positives car en utilisant X non nulle telle que $SX = \lambda X$ on obtient ${}^tX SX = \lambda {}^tX X = \lambda \|X\|^2$ et d'autre part ${}^tX SX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$ donc $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

On peut appliquer (1) à $S = {}^tAA$.

2. On a donc $\det({}^tAA) = \prod_{i=1}^n s_{i,i}$ où $s_{i,i} = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{i,k} a_{k,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$.

Or $\det({}^tAA) = \det({}^tA) \det(A) = \det(A)^2$, on a donc $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n a_{k,i}^2}$ (inégalité d'Hadamard).

Partie C

1. D'après les conditions sur les suites a et b on obtient $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

A est triangulaire avec sur la diagonale des nombres non nuls ($a_0 \neq 0$) donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

On peut aussi dire $\det(A) = a_0^n \neq 0$.

2. D'après les formules de Cramer $b_n = \frac{\det(A')}{\det(A)}$ où A' est obtenue à partir de A en remplaçant

la dernière colonne par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. En particulier $|a_n|r^n \rightarrow 0$ donc partir d'un certain rang $|a_n|r^n \leq 1$ puis $0 \leq a_n^2 r^{2n} \leq |a_n|r^n$ par comparaison la série de terme général $a_n^2 r^{2n}$ converge.

$$C^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|r^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 r^{2n} + 2R \text{ où } R \text{ est une somme (pour } n < m) \text{ de termes du}$$

type $|a_n|r^n |a_m|r^m$ positifs d'où $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 r^{2n} \leq C^2}$.

Remarque : On peut détailler avec le produit de Cauchy :

$$C^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^n |a_k| |a_{n-k}| \geq 0.$$

D'où $C^2 \geq 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n} r^{2n}$ et enfin $c_{2n} \geq 0 + |a_n a_{2n-n}| + 0 = a_n^2 \dots$

4. On a vu $|b_n| = \frac{1}{|a_0|^{n+1}} |\det(A')|$.

Avec les opérations $L_i \rightarrow r^{i-1} L_i$ on a $\det(A') = \frac{1}{r^0 \cdot r \cdot \dots \cdot r^{n-1} \cdot r^n} \det(A'') = \frac{1}{r^{n(n+1)/2}} \det(A'')$.

En nommant C_1, \dots, C_{n+1} les colonnes de A'' , on a $|\det(A'')| \leq \prod_{k=1}^{n+1} \|C_k\|$.

Or $C_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\|C_{n+1}\| = 1$.

$C_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 r \\ \vdots \\ a_n r^n \end{pmatrix}$ donc $\|C_1\| = \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2 r^{2k}} \leq C$. De même pour $k = 1$ à n :

$C_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 r^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} r^n \end{pmatrix} = r^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n-k+1} r^{n-k+1} \end{pmatrix}$ donc $\|C_k\| = r^{k-1} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-k+1} a_i^2 r^{2i}} \leq r^{k-1} C$.

$|\det(A'')| \leq r^0 \cdot r \cdot \dots \cdot r^{n-1} \cdot C^n \cdot 1$.

Finalement $|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|^{n+1}} \frac{1}{r^n} C^n = \frac{1}{|a_0|} \alpha^n$ avec $\alpha = \frac{C}{r}$.

5. On écrit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$ et un rayon de convergence R_f non nul donc il existe un $r > 0$ (par exemple $r = R_f/2$) tel que la série $\sum |a_n| r^n$ converge.

On choisit alors la suite $(b_n)_n$ comme précédemment et on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Le rayon de convergence R_g de g est non nul car au moins égal à $1/\alpha$ (cf. $|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|} \alpha^n$).

D'après le produit de Cauchy pour $|x| \leq \min(R_f, R_g)$, on aura

$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et pour $n \geq 1, c_n = 0$ donc $f(x)g(x) = 1$.

Ainsi $\frac{1}{f(x)} = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec un rayon de convergence non nul

donc $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 3 (Intégrale à paramètre)

$$f(x, t) = e^{-x \operatorname{ch}(t)} \text{ et } F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch}(t)} dt = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

1. On sait que $e^{-x} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^p} \right)$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-x} = 0$).

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = +\infty$, on a (par substitution) $e^{-a(t)} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a(t)^p} \right)$

2. Pour $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue positive sur $[0, +\infty[$.

Pour $x \leq 0$, on a pour tout $t : 1 \leq f(x, t)$ donc $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ diverge.

Pour $x > 0$, $x \operatorname{ch}(t) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où $f(x, t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \right)$ (d'après 1°) avec $p = 1$ et x est fixé). Avec $\operatorname{ch}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^t$ on a $f(x, t) = o_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t})$. Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur \mathbf{R}^+ donc $t \mapsto f(x, t)$ aussi.

Le domaine de définition de F est $]0, +\infty[$.

3. Pour $x > 0$ et $t \in [0, +\infty[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\operatorname{ch}(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)}$.

Pour t fixé, $x \mapsto -\operatorname{ch}(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour t fixé, $t \mapsto -\operatorname{ch}(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et elle est intégrable d'après 1°) avec $p = 2$: $\operatorname{ch}(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \right) = o_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t})$.

Domination sur un segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$:

Pour $x \in [a, b]$, on a pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \operatorname{ch}(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)} \leq \operatorname{ch}(t) e^{-a \operatorname{ch}(t)}$.

On a vu que $t \mapsto \operatorname{ch}(t) e^{-a \operatorname{ch}(t)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $a > 0$), f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Finalement, F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

De même : Pour $x > 0$ et $t \in [0, +\infty[$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \operatorname{ch}^2(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)}$. On procède de la même façon (avec le lemme pour $p = 3 \dots$) pour prouver que

F est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

4. Pour $x > 0$, $F''(x) - F(x) = \int_0^{+\infty} (\operatorname{ch}^2(t) - 1) e^{-x \operatorname{ch}(t)} dt$. On remarque que $\operatorname{ch}^2(t) - 1 = \operatorname{sh}^2(t)$ et on effectue une intégration par parties sur un segment $[0, b]$ en posant $u'(t) = \operatorname{sh}(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)}$, $u(t) = -\frac{1}{x} e^{-x \operatorname{ch}(t)}$ et

$v(t) = \operatorname{sh}(t)$, $v'(t) = \operatorname{ch}(t)$: $u(t)v(t) = \frac{1}{x} e^{-x \operatorname{ch}(t)} \operatorname{sh}(t)$ est nul en 0 et est de limite nulle quand $b \rightarrow +\infty$ (car négligeable devant $\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}$ par exemple).

Après passage à la limite quand $b \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$F''(x) - F(x) = 0 + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \operatorname{ch}(t) e^{-x \operatorname{ch}(t)} dt = -\frac{1}{x} F'(x).$$

F est solution sur $]0, +\infty[$ de $y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0$ (E).

5. Etude en 0

- a) Soit $0 < x < 1$. Pour $u > 1$, on pose $g(u) = e^{-xu} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u} \right)$. g est continue sur $]1, +\infty[$. Comme $x > 0$, on a :

$$|g(u)| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u} \right| = \left| \frac{u - \sqrt{u^2-1}}{u\sqrt{u^2-1}} \right| = \frac{1}{(u + \sqrt{u^2-1})u\sqrt{u^2-1}} = \varphi(u).$$

$\varphi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^3}$ donc φ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et $\varphi(u) \underset{u \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(u-1)^{1/2}}$ donc φ est intégrable sur $]1, 2]$.

Donc g est intégrable sur $]1, +\infty[$ de plus $|H(x)| \leq \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u} \right) du$.

H est définie et bornée sur $]0, 1[$.

- b) Pour $v \in [x, 1] \subset]0, 1]$, on a $e^{-v} \leq 1$ et d'autre part $e^{-v} \leq 1 - v$ (soit par étude de $v \mapsto e^{-v} - 1 - v$ soit en citant $e^x \geq 1 + x$ qui peut se montrer par convexité de \exp ...).

$0 \leq 1 - e^{-v} \leq v$ donc ($v > 0$) $0 \leq \frac{1}{v} - \frac{e^{-v}}{v} \leq 1$ et en intégrant de x à 1 ($x < 1$) : $0 \leq -\ln(x) - K(x) \leq 1 - x \leq 1$.

$-\ln(x) - K(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow 0}(1) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(\ln(x))$ donc $K(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

On peut aussi écrire ($-\ln(x) > 0$) : $0 \leq 1 - \frac{K(x)}{-\ln(x)} \leq \frac{1}{-\ln(x)}$ et conclure par le

théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{K(x)}{-\ln(x)} = 1$.

- c) Changement de variable $u = \operatorname{ch}(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$ (\mathcal{C}^1 difféomorphisme etc.), u varie de 1 à $+\infty$ et de $t = \operatorname{Arg} \operatorname{ch}(u)$, $dt = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du$, donc

$$F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xu} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du.$$

- d) $H(x) = F(x) - \int_1^{+\infty} e^{-xu} \frac{1}{u} du = F(x) - \int_x^{+\infty} e^{-v} \frac{1}{v} dv$ en posant $v = xu$.

$F(x) = H(x) + K(x)$, or H est bornée et $K(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

6. Soit (x_n) une suite (de réels > 1) tendant vers $+\infty$.

$$x_n F(x_n) = \int_0^{+\infty} x_n e^{-x_n \operatorname{ch}(t)} dt = \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt.$$

Pour t fixé, $\lim_n \varphi_n(t) = 0$ (croissances comparées). La suite de fonctions (φ_n) converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Domination : $\varphi_n(t) = x_n e^{-x_n \operatorname{ch}(t)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} x_n \operatorname{ch}(t) e^{-x_n \operatorname{ch}(t)}$.

Or $u \mapsto u e^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$ donc bornée sur $[0, +\infty[$, en notant $M = \sup_{u \in [0, +\infty[} u e^{-u}$ on obtient $0 \leq \varphi_n(t) \leq M \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_n x_n F(x_n) = \int_0^{+\infty} \lim_n \varphi_n(t) dt = 0.$$

Par caractérisation séquentielle de la limite : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0}$.

$$\text{De même : } x_n F'(x_n) = \int_0^{+\infty} -x_n \operatorname{ch}(t) e^{-x_n \operatorname{ch}(t)} dt = \int_0^{+\infty} \Psi_n(t) dt.$$

Pour t fixé, $\lim_n \Psi_n(t) = 0$ (croissances comparées). La suite de fonctions (Ψ_n) converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle.

$$\text{Domination : } \Psi_n(t) = -\frac{1}{x_n \operatorname{ch}(t)} x_n^2 \operatorname{ch}^2(t) e^{-x_n \operatorname{ch}(t)}.$$

Or $u \mapsto u^2 e^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$ donc bornée sur $[0, +\infty[$, en notant $M_2 = \sup_{u \in [0, +\infty[} u e^{-u}$ on obtient $0 \leq |\Psi_n(t)| \leq M_2 \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$.

D'où (convergence dominée puis caractérisation séquentielle de la limite) : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} xF'(x) = 0}$.

7. Utilisation du Wronskien

$$\begin{aligned} \text{a) } W'(x) &= F(x)G''(x) + 0F'(x)G'(x) - F''(x)G(x) \\ &= F(x)\left(G(x) - \frac{1}{x}G'(x)\right) + \left(\frac{1}{x}F'(x) - F(x)\right)G(x) = -\frac{1}{x}(F(x)G'(x) - F'(x)G(x)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x > 0, W'(x) = -\frac{1}{x}W(x)}.$$

Donc il existe α tel que pour tout $x > 0$, $W(x) = \alpha \exp(-\ln(x)) = \alpha \frac{1}{x}$.

Or $xW(x) = xF(x) \times G(x) - xF'(x) \times G(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\alpha = 0$ d'où

$$\boxed{\text{Pour } x > 0, W(x) = 0}.$$

b) F, G sont solutions sur $]0, +\infty[$ de (E) , équation linéaire d'ordre 2, et leur wronskien est nul, elles sont donc colinéaires. Comme F n'est pas la fonction nulle, il existe λ telle que $G = \lambda F$ c'est-à-dire pour tout $x > 0$, $G(x) = \lambda F(x)$.