Corrigé de la composition de mathématiques -B-(X)- 2012 filière MP de l' école polytechnique

proposé par : Mahmou professeur agrégé de mathématiques au CPGE Alkhansaa-Casa
e-mail : mahmoudi2003@hotmail.com

Partie I

1. • Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $l \in \mathbb{C}$, alors pour $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N, |a_n - l| < \varepsilon$, donc pour $n \geq N$, $|\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+1} - l| = |\frac{\sum_{k=0}^{N-1}(a_k - l)}{n+1} + \frac{\sum_{k=N}^{n}(a_k - l)}{n+1}| \leq |\frac{\sum_{k=0}^{N-1}(a_k - l)}{n+1}| + \frac{n-N+1}{n+1}\varepsilon$, d'autre part $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $M > N$ et vérifiant : $\forall n \geq M, |\frac{\sum_{k=0}^{N-1}(a_k - l)}{n+1}| < \varepsilon$ et en tenant compte que $\frac{n-N+1}{n+1}\varepsilon < \varepsilon$ il resulte alors que $\forall n \geq M, |\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+1} - l| < 2\varepsilon$ et ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ est C-convergente.
   • La suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est non convergente mais C-convergente puisque $\forall n \in \mathbb{N}, |\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k}{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$.
2. Supposons que $(a_n)_{n\geq 0}$ soit C-convergente alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, m_n = \frac{n}{n+1}.m_{n-1} + \frac{a_n}{n+1}$ par suite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}.\frac{n+1}{n} = 0$.
3. On a : $2m_n = \frac{2\sum_{k=1}^{n} a_k}{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^\alpha + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^\alpha}{n+1} = \frac{-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k[(k+1)^\alpha - k^\alpha] + (-1)^n(n+1)^\alpha - 1}{n+1}$.
   D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \zeta_n \in [n, n+1]$ tel que $(-1)^n[(n+1)^\alpha - (n)^\alpha] = (-1)^n \alpha \zeta_n^{\alpha-1}$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} \zeta_n = +\infty$ d'une part et d'autre part $\alpha - 1 < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n[(n+1)^\alpha - (n)^\alpha] = 0$ et on déduit alors que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k[(k+1)^\alpha - k^\alpha]}{n+1}$ de plus il est clair, puisque $\alpha - 1 < 0$, que $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)^\alpha - 1}{n+1}$ enfin $\lim_{n\to+\infty} m_n = 0$ et alors la suite $((-1)^n n^\alpha)_{n\geq 0}$ est C-convergente.
4. $(S_n(z_0))_{n\geq 0}$ étant C-convergente donc d'après $I)2)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(z_0)}{n} = 0$ par suite $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}(z_0)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}(z_0)}{n-1}.\frac{n-1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(z_0) - S_{n-1}(z_0)}{n} = 0$ soit $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n z_0^n}{n} = 0$ et donc $|z_0| \leq R'$ où R' désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n} z^n$, mais $\sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ par suite $|z_0| \leq R$.
5. **5.a.** • Il est clair que $R = 1$ d'autre part $\forall z \in \mathcal{C}(0,1)\backslash\{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$ donc
   $$(n+1)\sigma_n(z) = \frac{n+1}{1-z} - \frac{z}{1-z}.\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$ et puisque $|z| = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(z) = \frac{1}{1-z}$.

• $(n+1)\sigma_n(1) = \sum_{k=0}^{n} S_k(1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(1) = +\infty$ et on conclut alors que $F = \mathcal{C}(0,1)\backslash\{1\}$ et $\forall z \in F,\ \sigma(z) = \dfrac{1}{1-z}$

5.b. • Si $0 \leq \rho < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} c_{2n}\rho^{2n} = \lim_{n\to+\infty} \alpha\rho^{2n} = 0$ de plus $\lim_{n\to+\infty} c_{2n+1}\rho^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}(\alpha+\beta)\rho^{2n+1} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} c_n\rho^n = 0$ par suite $R \geq 1$, d'autre part : $\lim_{n\to+\infty}(c_{2n+1} - c_{2n}) = \beta \neq 0$ donc la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0 ce qui donne $R = 1$.

• $\forall z \in \mathcal{C}(0,1)\backslash\{-1,1\}, \forall n \in \mathbb{N}, S_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{2k}z^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_{2k+1}z^{2k+1} =$
$\alpha\dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} + (\alpha+\beta)z\dfrac{1-z^{2n}}{1-z^2} = \dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2} - \dfrac{\alpha z^2+(\alpha+\beta)z}{1-z^2}.z^{2n}$

D'autre part $S_{2n+1}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{2k}z^{2k} + \sum_{k=0}^{n} c_{2k+1}z^{2k+1} = \alpha\dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} + (\alpha+\beta)z\dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2} =$
$\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2} - \dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2}.z^{2n+2}$.

Donc $(2n+1)\sigma_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} S_k(z) = \sum_{k=0}^{n} S_{2k}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} S_{2k+1}(z) = (2n+1)\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2} - \dfrac{\alpha z^2+(\alpha+\beta)z}{(1-z^2)^2}(1-z^{2n+2}) - \dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{(1-z^2)^2}z^2(1-z^{2n})$ par suite, puisque $|z| = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \sigma_{2n}(z) = \dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2}$

De même $(2n+2)\sigma_{2n+1}(z) = \sum_{k=0}^{2n+1} S_k(z) = \sum_{k=0}^{n} S_{2k}(z) + \sum_{k=0}^{n} S_{2k+1}(z) = 2(n+1)\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2} - [2\alpha z^2 + (\alpha+\beta)z(1+z^2)]\dfrac{1-z^{2n+2}}{(1-z^2)^2}$.

En on déduit alors que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_{2n}(z) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_{2n+1}(z) = \dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2}$ et donc
$\forall z \in \mathcal{C}(0,1)\backslash\{-1,1\}, \lim_{n\to+\infty} \sigma_n(z) = \dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2}$

• $S_{2n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n} c_{2k} + \sum_{k=0}^{n} c_{2k+1} = (n+1)(2\alpha+\beta)$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_{2n+1}(1)}{2n+1} = \dfrac{2\alpha+\beta}{2} \neq 0$ ainsi d'après $I)2$ la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ n'est pas C-convergente.

• De même $S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=0}^{n} c_{2k} - \sum_{k=0}^{n} c_{2k+1} = (n+1)(\alpha-\alpha-\beta) = -\beta(n+1)$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_{2n+1}(-1)}{2n+1} = \dfrac{-\beta}{2} \neq 0$ et la série $\sum_{n\geq 0} c_n(-1)^n$ n'est pas C-convergente.

• On conclut alors que $F = \mathcal{C}(0,1)\backslash\{-1,1\}$ et $\forall z \in F, \sigma(z) = \dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)z}{1-z^2}$

5.c. • Si $0 \leq \rho < 1$ alors $c_n\rho^n = \rho^n + \alpha(e^{i\lambda}\rho)^n$ et $|e^{i\lambda}\rho| = \rho < 1$
donc $\lim_{n\to+\infty} c_n\rho^n = 0$ ainsi $R \geq 1$, d'autre part si $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha e^{in\lambda} = -1$ et donc $\alpha = \lim_{n\to+\infty} |\alpha e^{in\lambda}| = 1$ ce qui est absurde car $\alpha \in]0,1[$ ainsi $R = 1$.

• Supposons $\lambda = 0[2\pi]$: Alors $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 1+\alpha$ et donc
$\forall z \in \mathcal{C}(0,1)\backslash\{1\}, S_n(z) = (1+\alpha)\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ par suite $n\sigma_n(z) = (n+1)\dfrac{1+\alpha}{1-z} - (1-z^{n+1})\dfrac{(1+\alpha)z}{(1-z)^2}$
ainsi $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(z) = \dfrac{1+\alpha}{1-z}$.

D'autre part $S_n(1) = (1+\alpha)(n+1)$ par suite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(1)}{n} = 1+\alpha \neq 0$ et alors la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ n'est pas C-convergente.

On conclut alors que dans ce cas $F=\mathcal{C}(0,1)\backslash\{1\}$ et que $\forall z\in\mathcal{C}(0,1)\backslash\{1\},\ \sigma(z)=\dfrac{1+\alpha}{1-z}$.

- Supposons $\lambda\neq 0[2\pi]$: Alors $\forall n\in\mathbb{N},\forall z\in\mathcal{C}(0,1)\backslash\{1,e^{-i\lambda}\},S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}z^k+\alpha\sum_{k=0}^{n}(ze^{i\lambda})^k=$ $\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}-\dfrac{z^{n+1}}{1-z}-\dfrac{\alpha(ze^{i\lambda})^{n+1}}{1-ze^{i\lambda}}$ donc

$n\sigma_n(z)=(n+1)[\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}]-\dfrac{z}{(1-z)^2}(1-z^{n+1})-\dfrac{\alpha ze^{i\lambda}}{(1-ze^{i\lambda})^2}[1-(ze^{i\lambda})^{n+1}]$ par suite

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n(z)=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}$, d'autre part $S_n(1)=n+1+\alpha\dfrac{1-e^{i\lambda(n+1)}}{1-e^{i\lambda}}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n(1)}{n}=1\neq 0$ et ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 0}c_n$ n'est pas C-convergente

De même $S_n(e^{-i\lambda})=\alpha(n+1)+\dfrac{1-e^{-i\lambda(n+1)}}{1-e^{-i\lambda}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n(e^{-i\lambda})}{n}=\alpha\neq 0$ et ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 0}c_n(e^{-i\lambda})^n$ n'est pas C-convergente

On conclut alors que, dans ce cas, $F=\mathcal{C}(0,1)\backslash\{1,e^{-i\lambda}\}$ et que $\forall z\in\mathcal{C}(0,1)\backslash\{1,e^{-i\lambda}\},\ \sigma(z)=$ $\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{\alpha}{1-ze^{i\lambda}}$

Partie II

6. 6.a. • Il suffit de montrer que $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x}e^{i\lambda t}dt$ est finie. En effet si $\lambda\in\mathbb{R}^*$,

$\forall x>0,\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x}e^{i\lambda t}dt=\dfrac{1}{2xi\lambda}(e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x})$ or $\forall x>0,|e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x}|\leq 2$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x}e^{i\lambda t}dt=0$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x}dt=1$.

• La linearité de l'integrale et les opératios sur les limites montre que l'application $f\to M(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$ d'autre part :

$\forall x>0,|\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x}f(t)dt|\leq\dfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(t)|dt\leq\dfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x}||f||_\infty dt=||f||_\infty$ et en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ et étant donné que l'application " module " est continue sur $\mathbb{C}$ on obtient $|M(f)|\leq||f||_\infty$ et ainsi la forme linéaire est continue sur $\mathcal{E}$

6.b. La famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est déja génératrice de $\mathcal{E}$, soit d'autre part $\lambda_1,...,\lambda_n$ des éléments de $\mathbb{R}^*$ vérifiant

$\lambda_1<...<\lambda_n$ et $\alpha_0,\alpha_1...,\alpha_n$ des complexes tels que $\alpha_0e_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ke_{\lambda_k}=0$ donc

$\alpha_0e_{-\lambda_n}+\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ke_{\lambda_k-\lambda_n}=0$ par suite $\alpha_0M(e_{-\lambda_n})+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha_kM(e_{\lambda_k-\lambda_n}))+\alpha_nM(e_0)=0$ or $6.a.$ donne $M(e_0)=1$ et $M(e_{-\lambda_n})=M(e_{\lambda_1-\lambda_n})=...=M(e_{\lambda_{n-1}-\lambda_n})=0$ d'où $\alpha_n=0$ et on répète le même raisonnement pour montrer que $\alpha_1=...=\alpha_{n-1}=0$ et en suite $\alpha_0=0$ ainsi $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre de $\mathcal{E}$ par suite base de $\mathcal{E}$.

D'autre part si $f\in\mathcal{E}$, alors il existe A partie finie de $\mathbb{R}^*$, une famille de complexes $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in A}$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ telles que $f=\alpha e_0+\sum\limits_{\lambda\in A}\alpha_\lambda e_\lambda$ et donc $M(f)=\alpha M(e_0)+\sum\limits_{\lambda\in A}\alpha_\lambda M(e_\lambda)$ et d'après $6.a.$ on a $M(f)=\alpha$.

6.c. Il suffit de remarquer que $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ on a $e_\lambda.e_\mu=e_{\lambda+\mu}$ d'autre part si $f,g\in\mathcal{E}$ tels que $g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^+$ alors $\forall x>0,|\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x}f(t)g(t)dt|\leq\dfrac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(t)|g(t)dt\leq\dfrac{||f||_\infty}{2x}\int_{-x}^{x}g(t)dt$ et le passage à la limite qund x tend vers $+\infty$ donne $|M(fg)|\leq||f||_\infty M(g)$

7. 7.a. On a $K_N=\sum\limits_{j=-N}^{N}(1-\dfrac{|j|}{N+1})e_j=e_0+\sum\limits_{j=1}^{N}(1-\dfrac{|j|}{N+1})(e_j+e_{-j})$ donc $\forall t\in\mathbb{R},K_N(t)=$

$$1+\sum_{j=1}^{N}2(1-\frac{j}{N+1})\cos(t)=1+\sum_{j=1}^{N}2\frac{N+1-j}{N+1}\cos(t)=1+\sum_{j=1}^{N}\frac{2j}{N+1}\cos((N+1-j)t)$$

7.b. • $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} e^{i(\frac{N}{2}-k)t} = e^{i\frac{N}{2}t}\sum_{k=0}^{N} e^{-ikt} = e^{i\frac{N}{2}t}\frac{1-e^{-it(N+1)}}{1-e^{-it}} = \frac{e^{it\frac{N+1}{2}}-e^{-it\frac{N+1}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$

• $\displaystyle(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})})^2 = (\sum_{k=0}^{N} e_{\frac{N}{2}-k}(t))^2 = \sum_{j=0}^{2N}\sum_{(p,q)\in[|0,N|]^2,\ p+q=j} e_{N-p-q}(t) = \sum_{j=0}^{2N}\sum_{(p,q)\in[|0,N|]^2,\ p+q=j} e_{N-j}(t) = \sum_{j=0}^{2N} e_{N-j}(t)\sum_{(p,q)\in[|0,N|]^2,\ p+q=j} 1 = \sum_{j=-N}^{N} e_j(t)\sum_{(p,q)\in[|0,N|]^2,\ p+q=N-j} 1.$

D'autre part pour $0 \le j \le N$, il est clair que $Card(\{(p,q) \in [|0,N|]^2/p+q = N-j\}) = N+1-j = N+1-|j|$ et pour $-N \le j \le 0$ on a : $(p,q) \in \{(p,q) \in [|0,N|]^2/p+q = N-j\} \Rightarrow q = N-j-p \le N \Rightarrow -j \le p \le N \Rightarrow (p,q) \in \{(p, N-j-p)/-j \le p \le N\}$, on a donc $\{(p,q) \in [|0,N|]^2/p+q = N-j\} \subset \{(p,N-j-p)/-j \le p \le N\}$; réciproquement, il est clair que $\{(p,N-j-p)/-j \le p \le N\} \subset \{(p,q) \in [|0,N|]^2/p+q = N-j\}$.
Ainsi $\{(p,N-j-p)/-j \le p \le N\} = \{(p,q) \in [|0,N|]^2/p+q = N-j\}$ par suite $Card(\{(p,q) \in [|0,N|]^2/p+q = N-j\}) = N+1+j = N+1-|j|$

On conclut alors que $\displaystyle(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})})^2 = \sum_{j=-N}^{N} e_j(t)\sum_{(p,q)\in[|0,N|]^2,\ p+q=N-j} 1 = \sum_{j=-N}^{N}(N+1-|j|)e_j(t) = (N+1)K_N(t).$

8.8.a • $\displaystyle g_N(x) = \prod_{p=1}^{n+1} K_N(\lambda_p x+\alpha_p) = \prod_{p=1}^{n+1}\sum_{j=-N}^{N}(1-\frac{|j|}{N+1})e_j(\lambda_p x+\alpha_p) = \prod_{p=1}^{n+1}\sum_{j=-N}^{N}(1-\frac{|j|}{N+1})e^{ij\alpha_p}e_{j\lambda_p}(x) = \sum_{(k_1,\dots,k_{n+1})\in[|-N,N|]^{n+1}}[\prod_{j=1}^{n+1}(1-\frac{|k_j|}{N+1})e^{ik_j\alpha_j}]e_{(k_1\lambda_1+\dots+k_{n+1}\lambda_{n+1})}(x)$ et ainsi :

$$g_N = \sum_{(k_1,\dots,k_{n+1})\in[|-N,N|]^{n+1}}[\prod_{j=1}^{n+1}(1-\frac{|k_j|}{N+1})e^{ik_j\alpha_j}]e_{(k_1\lambda_1+\dots+k_{n+1}\lambda_{n+1})}.$$

• D'autre part la famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$ est $\mathbb{Q}$-libre donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}k_j\lambda_j = 0 \Leftrightarrow (k_1,\dots,k_{n+1}) = (0,\dots,0)$ par suite la composante de g_N relativement à e_0 correspond, dans la somme précédente, à l'indice $(0,\dots,0)$ et ainsi $\displaystyle M(g_N) = \prod_{j=1}^{n+1}(1) = 1$

8.b. • Soit $p \in [|1,n+1|]$ fixé alors

$\displaystyle e_{\lambda_p}g_N = \sum_{(k_1,\dots,k_{n+1})\in[|-N,N|]^{n+1}}[\prod_{j=1}^{n+1}(1-\frac{|k_j|}{N+1})e^{ik_j\alpha_j}]e_{(k_1\lambda_1+\dots+(1+k_p)\lambda_p+\dots+k_{n+1}\lambda_{n+1})}$ et pour la même raison que ci-dessus la composante de $e_{\lambda_p}g_N$, relativement à e_0, correspond à l'indice $(0,\dots,0,-1,0,\dots,0)$ où -1 est situé à la p^{ime} place et ainsi $M(e_{\lambda_p}g_N) = (1-\frac{1}{N+1})e^{-i\alpha_p}$ par suite $\displaystyle M(fg_N) = M(r_0g_N+\sum_{j=1}^{n+1}a_je_{\lambda_j}g_N) = r_0+\sum_{j=1}^{n+1}r_je^{i\alpha_j}(1-\frac{1}{N+1})e^{-i\alpha_j} = r_0+\frac{N}{N+1}\sum_{j=1}^{n+1}r_j$

• Remarquons que le raisonnement précédent est vallable dans le cas où $N \ge 1$ mais si $N = 0$ alors g_N se réduit à $g_N = e_0$ et donc $M(e_{\lambda_p}g_N) = M(e_{\lambda_p}e_0) = M(e_{\lambda_p}) = 0$ car $\lambda_p \neq 0$ puisque $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$ est $\mathbb{Q}$-libre, ainsi la formule $M(e_{\lambda_p}g_N) = (1-\frac{1}{N+1})e^{-i\alpha_p}$ reste vallable dans ce cas aussi.

8.c. $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \le r_0+\sum_{j=1}^{n+1}|a_j| \le \sum_{j=0}^{n+1}r_j$ par suite $\displaystyle||f||_\infty \le \sum_{j=0}^{n+1}r_j$.
D'autre part si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $7.a.$ montre que $K_N(t) \ge 0$ et donc $g_N(t) \ge 0$ et si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $7.b.$ montre que $K_N(t) \ge 0$ et donc aussi $g_N(t) \ge 0$ par suite $\forall N \in \mathbb{N}, g_N \ge 0$ et ainsi $6.c.$ donne

$\forall N \in \mathbb{N}, |M(fg_N)| \leq ||f||_\infty M(g_N)$ ou encore $\forall N \in \mathbb{N}, r_0 + \dfrac{N}{N+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} r_j \leq ||f||_\infty$ et le passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ donne $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} r_j \leq ||f||_\infty$ d'où l'egalité demandée.

9. • Si $k \neq j$ on a donc : $|u_j+u_k| + \displaystyle\sum_{l\in[|1,m|]\setminus\{j,\ k\}} |u_l| \geq |u_1+...+u_m| \geq m-\varepsilon$ ou encore $|u_j+u_k|+m-2 \geq m-\varepsilon$ par suite $|u_j+u_k| \geq 2-\varepsilon$.
• Supposons que $|u_j-u_k| > 2\sqrt{\varepsilon}$ alors $|u_j-u_k|^2 > 4\varepsilon$ soit
$2-2Re(u_j\overline{u_k}) = |u_j|^2+|u_k|^2-2Re(u_j\overline{u_k}) > 4\varepsilon$ ou encore $4-|u_j+u_k|^2 > 4\varepsilon$ par suite
$2\sqrt{1-\varepsilon} > |u_j+u_k| \geq 2-\varepsilon$ ainsi $2\sqrt{1-\varepsilon} > 2-\varepsilon$ que l'on peut écrire $0 > (\sqrt{1-\varepsilon}-1)^2$ ce qui est absurde et finalement $|u_j-u_k| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$.

10. **10.a.** D'après $8.c.$ on a $||f||_\infty = n+2$ alors $\forall m \in \mathbb{N}, \exists x_m \in \mathbb{R}$ tel que $n+2-\dfrac{1}{m+1} < |f(x_m)| \leq n+2$ et on a donc construit une suite $(x_m)_{m\geq 0}$ d'eléments de $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{m\to+\infty} |f(x_m)| = n+2$.

10.b. Soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq M, |f(x_m)| > n+2-\varepsilon$ ou encore
$\forall m \geq M, |1+\displaystyle\sum_{j=1}^{n} e^{i\alpha_j}e^{i\lambda_j x_m} + e^{i2\pi x_m}| > n+2-\varepsilon$ et d'après $9.$ on a :
$\forall m \geq M, \forall j \in [|1,n|],\ |e^{i\alpha_j}e^{i\lambda_j x_m}-1| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$ et $|e^{i2\pi x_m}-1| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$ par suite
$\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i2\pi x_m} = 1$ et $\forall j \in [|1,n|], \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\alpha_j}e^{i\lambda_j x_m} = 1$ ce qui donne le résultat demandé.

10.c. • On a $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{2i\pi y_m} = \lim\limits_{m\to+\infty} e^{2i\pi x_m} = 1$ donc $\lim\limits_{m\to+\infty} \cos(2\pi|y_m|) = \lim\limits_{m\to+\infty} \cos(2\pi y_m) = 1$ par suite et puisque $\forall m \in \mathbb{N}, 2\pi|y_m| \in [0,\pi[$ et la continuité de " $\arccos$" donne alors $\lim\limits_{m\to+\infty} 2\pi|y_m| = \lim\limits_{m\to+\infty} \arccos(\cos(2\pi|y_m|)) = \arccos(1) = 0$ et enfin $\lim\limits_{m\to+\infty} y_m = \lim\limits_{m\to+\infty} |y_m| = 0$.
• On a $e^{i\lambda_j N_m} = e^{i\lambda_j x_m}e^{-i\lambda_j y_m}$ et en tenant compte que $\lim\limits_{m\to+\infty} y_m = 0$ on obtient le résultat.

11. **11.a.** Déja $\sup\limits_{x\in I}|f(x)| \leq n+2$.
Soit d'autre part $j \in [|1,n|]$ fixé, si $\sup\limits_{x\in I}|f(x)| = n+2$ alors $\exists (x_m)_{m\geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{m\to+\infty} |f(x_m)| = n+2$ mais une telle suite vérifie d'après $10.c$, $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{-i\alpha_j} = e^{-i\pi} = -1$, or I est borné donc il éxiste une sous suite $(x_{\varphi(m)})_{m\geq 0}$ convergente de $(x_m)_{m\geq 0}$ de plus $(y_m)_{m\geq 0}$ converge alors $(y_{\varphi(m)})_{m\geq 0}$ coverge aussi, on en déduit alors que $(N_{\varphi(m)})_{m\geq 0}$, qui est une suite d'entiers, stationne vers $l \in \mathbb{Z}$.
On donc $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_{\varphi(m)}} = -1 = e^{i\lambda_j l}$ et ainsi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda_j l + \pi = k2\pi$, mais $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1})$ est $\mathbb{Q}$-libre et en se rappellant que dans ce cas $\lambda_{n+1} = 2\pi$ on obtient alors $k = \dfrac{1}{2}$ (et $l = 0$), ce qui est absure et enfin $\sup\limits_{x\in I}|f(x)| < n+2$

11.b. • La suite $(x_m)_{m\geq 0}$ étant celle de $10.$, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} y_m = 0$ donc si $(N_m)_{m\geq 0}$ est bornée alors il éxiste I segment de $\mathbb{R}$ tel que $(x_m)_{m\geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ par suite $\sup\limits_{x\in I}|f(x)| = n+2$ ce qui est absurde d'après $11.a.$, ainsi la suite $(N_m)_{m\geq 0}$ n'est pas majorée ou n'est pas minorée et alors selon le cas on peut extraire une suite $(N'_m)_{m\geq 0}$, de la suite $(N_m)_{m\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} N'_m = \pm\infty$.
• D'autre part $\forall j \in [|1,n|], \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N'_m} = \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{-i\alpha_j} = e^{-i\pi} = -1$.
• On peut dire que $\forall j \in [|1,n|], \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i2\lambda_j N'_m} = 1$.

12. • Dans la question $11.b.$ on a vu que $\forall j \in [|1,n|], \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i2\lambda_j N'_m} = 1$ donc aussi :
$\forall j \in [|1,n|], \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i2\lambda_j|N'_m|} = 1$, sans oublier que $\lim\limits_{m\to+\infty} 2|N'_m| = +\infty$, on en déduit donc qu'il éxiste une suite d'entiers $(N''_m)_{m\geq 0}$ vérifiant : $\forall j \in [|1,n|], \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N''_m} = 1$ et telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} N''_m = +\infty$.

• Remarquons d'abors que si $(\lambda_1,...,\lambda_n,\pi)$ est $\mathbb{Q}$-libre alors il en est de même pour $(\lambda_1,...,\lambda_n,2\pi)$. D'autre part la question $10.c.$ assure l'existence d'une suite d'entiers $(N_m)_{m\geq 0}$ telle que $\forall j\in[|1,n|],\ \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_m}=e^{-i\alpha_j}$ et puisque $\lim\limits_{m\to+\infty} N''_m=+\infty$ on a :
Pour $m=0,\ \exists\,\varphi(0)\in\mathbb{N}$ tel que $N''_{\varphi(0)}-N_0\geq 0$.
Pour $m=1,\ \exists\,\varphi(1)\in\mathbb{N}$, tel que $\varphi(1)>\varphi(0)$ et $N''_{\varphi(1)}-N_1\geq 1$ ...
On construit ainsi une suite extraite $(N''_{\varphi(m)})_{m\geq 0}$ de la suite $(N''_m)_{m\geq 0}$ vérifiant :
$\forall m\in\mathbb{N},\ N''_{\varphi(m)}-N_m\geq m$ donc en particulier $\lim\limits_{m\to+\infty}(N''_{\varphi(m)}-N_m)=+\infty$, et de plus :
$\forall j\in[|1,n|],\ \lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j(N''_{\varphi(m)}-N_m)}=\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N''_{\varphi(m)}}e^{-i\lambda_j N_m}=1.e^{i\alpha_j}=e^{i\alpha_j}$ d'où le théorème.

13. 13.a. • Soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application strictement croissante et $l\in\mathbb{C}$ tel que $l=\lim\limits_{n\to+\infty} S_{\varphi(n)}(e^{ix})$ alors $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-e^{ix(\varphi(n)+1)}}{1-e^{ix}}$, d'autre part posons $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et ainsi $x=\pi\dfrac{p}{q}$.

Or $\forall n\in\mathbb{N},\exists(\theta_n,r_n)\in\mathbb{Z}\times[|0,2q-1|]$, $\varphi(n)+1=\theta_n 2q+r_n$ donc $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-e^{ixr_n}}{1-e^{ix}}$ donc la suite $(e^{ixr_n})_{n\geq 0}$ est convergente ; d'autre part $\forall n\in\mathbb{N},\ r_n\in[|0,2q-1|]$, donc il éxiste $\delta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante tel que la suite $(r_{\delta(n)})_{n\geq 0}$, qui est une suite d'entiers, soit convergente et alors $(r_{\delta(n)})_{n\geq 0}$ stationne vers $r\in[|0,2q-1|]$, on en déduit alors que $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-e^{ixr_{\delta(n)}}}{1-e^{ix}}=\dfrac{1-e^{ixr}}{1-e^{ix}}$.
Réciproquement si $r\in[|0,2q-1|]$ alors l'application $\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par :
$\psi(n)=2(n+1)q+r-1$ est strictement croissante et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{\psi(n)}(e^{ix})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-e^{ix(2(n+1)q+r)}}{1-e^{ix}}=\dfrac{1-e^{ixr}}{1-e^{ix}}$

On conclut alors que $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\dfrac{1-e^{ixr}}{1-e^{ix}}\ /\ r\in[|0,2q-1|]\}$ dans le cas où $\dfrac{x}{\pi}\in\mathbb{Q}$.

• Dans le cas où $\dfrac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$ alors (x,π) est $\mathbb{Q}$-libre donc par le théorème de Kronecker $\forall\alpha\in\mathbb{R},\exists(N_m)_{m\geq 0}\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{m\to+\infty} N_m=+\infty$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{ixN_m}=e^{i\alpha}$, soit d'autre part $(\varphi(m))_{m\geq 0}$ une suite extraite de la suite $(N_m)_{m\geq 0}$ telle que $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ soit une application strictement croissante alors l'application $\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $\psi(m)=\varphi(m)-1$ est strictement croissante et on a $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{\psi(m)}(e^{ix})=\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{1-e^{ix\varphi(m)}}{1-e^{ix}}=\dfrac{1-e^{ix\alpha}}{1-e^{ix}}$; on a donc $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \dfrac{1-e^{ix\alpha}}{1-e^{ix}}\in\mathcal{L}(e^{ix})$ or $\dfrac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$ donc $x\neq 0$ par suite $\forall\eta\in\mathbb{R},\ \dfrac{1-e^{i\eta}}{1-e^{ix}}\in\mathcal{L}(e^{ix})$
Si maintenant $z\in\mathcal{C}(\dfrac{1}{1-e^{ix}},\dfrac{1}{|1-e^{ix}|})$ alors $\exists\beta\in\mathbb{R}$ tel que $z-\dfrac{1}{1-e^{ix}}=\dfrac{e^{i\beta}}{|1-e^{ix}|}$ et donc si $\gamma\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^{ix}-1}{|1-e^{ix}|}=e^{i\gamma}$ alors $z=\dfrac{1-e^{i(\beta+\gamma)}}{1-e^{ix}}$ par suite $z\in\mathcal{L}(e^{ix})$.
Réciproquement si $l\in\mathcal{L}(e^{ix})$ alors $\exists\ \varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :
$\lim\limits_{m\to+\infty} S_{\varphi(m)}(e^{ix})=\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{1-e^{ix(\varphi(m)+1)}}{1-e^{ix}}$, mais $\forall m\in\mathbb{N},\ \dfrac{1-e^{ix(\varphi(m)+1)}}{1-e^{ix}}\in\mathcal{C}(\dfrac{1}{1-e^{ix}},\dfrac{1}{|1-e^{ix}|})$ qui est compact donc $l\in\mathcal{C}(\dfrac{1}{1-e^{ix}},\dfrac{1}{|1-e^{ix}|})$ et on conclut alors que $\mathcal{L}(e^{ix})=\mathcal{C}(\dfrac{1}{1-e^{ix}},\dfrac{1}{|1-e^{ix}|})$.

13.b. Remarquons d'abord que $\dfrac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$ donne (x,π) $\mathbb{Q}$-libre et dans ce cas $\sigma(e^{ix})=\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}}$,
d'autre part $\forall n\mathbb{N},\ S_{2n}(e^{ix})=\sigma(e^{ix})-\dfrac{\alpha e^{2ix}+(\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}}e^{2inx}$ par suite :
$\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n}(e^{ix})\in\mathcal{C}(\sigma(e^{ix}),\dfrac{|\alpha e^{ix}+\alpha+\beta|}{|1-e^{2ix}|})=\mathcal{C}_1$.
De même $\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}(e^{ix})=\sigma(e^{ix})-\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}}e^{2i(n+1)x}$ par suite :
$\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}(e^{ix})\in\mathcal{C}(\sigma(e^{ix}),\dfrac{|\alpha+(\alpha+\beta)e^{ix}|}{|1-e^{2ix}|})=\mathcal{C}_2$, on en déduit alors que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(e^{ix}) \in \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$ qui est compact et ainsi $\mathcal{L}(e^{ix}) \subset \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$.
Reste à montrer que $\mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{L}(e^{ix})$: Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ alors le théorème de Kronecker assure l'existence d'une suite $(N_m)_{m\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} N_m = +\infty$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{iN_m x} = e^{i\frac{\gamma}{2}}$ et donc aussi $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i2N_m x} = e^{i\gamma}$ ce qui permet d'extraire une suite strictement croissante $(\varphi(m))_{m\geq 0}$ de $(N_m)_{m\geq 0}$ et alors $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2\varphi(m)}(e^{ix}) = \sigma(e^{ix}) - \dfrac{\alpha e^{2ix} + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}} e^{i\gamma}$ or la suite $(2\varphi(m))_{m\geq 0}$ est strictement croissante donc
$\forall \gamma \in \mathbb{R},\ \sigma(e^{ix}) - \dfrac{\alpha e^{2ix} + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}} e^{i\gamma} \in \mathcal{L}(e^{ix})$ ou encore
$\forall \gamma \in \mathbb{R},\ \sigma(e^{ix}) + \dfrac{|\alpha e^{ix} + \alpha+\beta|}{|1-e^{2ix}|} e^{i(\gamma+\delta)} \in \mathcal{L}(e^{ix})$ avec
$\delta \in \mathbb{R}$ tel que $-\dfrac{\alpha e^{2ix} + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}} = \dfrac{|\alpha e^{ix} + \alpha+\beta|}{|1-e^{2ix}|} e^{i\delta}$, ce qui permet de conclure que $\mathcal{C}(\sigma(e^{ix}), \dfrac{|\alpha e^{ix} + \alpha+\beta|}{|1-e^{2ix}|}) = \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{L}(e^{ix})$.
De même il existe une suite $(N'_m)_{m\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} N'_m = +\infty$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{ixN'_m} = e^{i\frac{\gamma-x}{2}}$ et soit $(\varphi'(m))_{m\geq 0}$ suite strictement croissante extraite de $(N'_m)_{m\geq 0}$ alors
$\lim\limits_{m\to+\infty} e^{ix(2\varphi'(m)+1)} = e^{i\gamma}$ et donc $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2\varphi'(m)+1}(e^{ix}) = \sigma(e^{ix}) - \dfrac{\alpha + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}} e^{i\gamma}$ or la suite $(2\varphi'(m)+1)_{m\geq 0}$ est strictement croissante donc $\forall \gamma \in \mathbb{R}, \sigma(e^{ix}) - \dfrac{\alpha + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}} e^{i\gamma} \in \mathcal{L}(e^{ix})$
et si on pose $-\dfrac{\alpha + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}} = |\dfrac{\alpha + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}}| e^{i\mu}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ alors
$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \sigma(e^{ix}) + |\dfrac{\alpha + (\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{2ix}}| e^{i(\gamma+\mu)} \in \mathcal{L}(e^{ix})$ ce qui permet de dire que
$\mathcal{C}(\sigma(e^{ix}), \dfrac{|\alpha + (\alpha+\beta)e^{ix}|}{|1-e^{2ix}|}) = \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{L}(e^{ix})$ et ainsi $\mathcal{L}(e^{ix}) = \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$.
Notons pour finir que $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$; sinon on aura $|\alpha e^{ix} + \alpha + \beta|^2 = |\alpha + (\alpha+\beta)e^{ix}|^2$ et après simplification on obtient $Re(\overline{\alpha}\beta e^{ix}) = Re(\overline{\alpha}\beta e^{-ix}))$ ou encore $Re(\dfrac{\beta}{\alpha} e^{ix}) = Re(\dfrac{\beta}{\alpha} e^{-ix}))$ soit $Re(2i\dfrac{\beta}{\alpha}\sin(x)) = 0$, mais $\dfrac{x}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ donc $\sin(x) \neq 0$ et ainsi $Im(\dfrac{\beta}{\alpha}) = 0$ ce qui donne $\dfrac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$ d'où l'absurdité.

13.c. Choisissons $\alpha \in]0,1[$ suffisament petit de sorte que $\dfrac{1}{|1-e^{ix}|} > \dfrac{\alpha}{|1-e^{i(x+\lambda)}|}$ et posons $r_1 = \dfrac{1}{|1-e^{ix}|} - \dfrac{\alpha}{|1-e^{i(x+\lambda)}|}$ et $r_2 = \dfrac{1}{|1-e^{ix}|} + \dfrac{\alpha}{|1-e^{i(x+\lambda)}|}$, on a alors $0 < r_1 < r_2$.
Soit $l \in \mathcal{L}(e^{ix})$ alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{\varphi(m)}(e^{ix}) = l$ or $S_{\varphi(m)}(e^{ix}) = \dfrac{1}{1-e^{ix}} + \dfrac{\alpha}{1-e^{i(x+\lambda)}} - \dfrac{e^{ix(\varphi(m)+1)}}{1-e^{ix}} - \dfrac{\alpha e^{i(x+\lambda)(\varphi(m)+1)}}{1-e^{i(x+\lambda)}}$
avec $\sigma(e^{ix}) = \dfrac{1}{1-e^{ix}} + \dfrac{\alpha}{1-e^{i(x+\lambda)}}$, par suite on a :
$|S_{\varphi(m)}(e^{ix}) - \sigma(e^{ix})| \leq \dfrac{1}{|1-e^{ix}|} + \dfrac{\alpha}{|1-e^{i(x+\lambda)}|}$ par suite $|l - \sigma(e^{ix})| \leq r_2$, d'autre part $r_1 = \dfrac{1}{|1-e^{ix}|} - \dfrac{\alpha}{|1-e^{i(x+\lambda)}|} = ||\dfrac{-e^{ix(\varphi(m)+1)}}{1-e^{ix}}| - |\dfrac{\alpha e^{i(x+\lambda)(\varphi(m)+1)}}{1-e^{i(x+\lambda)}}|| \leq$
$|\dfrac{-e^{ix(\varphi(m)+1)}}{1-e^{ix}} - \dfrac{\alpha e^{i(x+\lambda)(\varphi(m)+1)}}{1-e^{i(x+\lambda)}}| = |S_{\varphi(m)}(e^{ix}) - \sigma(e^{ix})| \leq |S_{\varphi(m)}(e^{ix}) - l| + |l - \sigma(e^{ix})|$ et ainsi $r_1 \leq |l - \sigma(e^{ix})|$ et on obtient $|l - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]$ par suite
$\mathcal{L}(e^{ix}) \in \{\zeta \in \mathbb{C} \ / \ |\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]\}$.
Réciproquement (x, λ, π) est $\mathbb{Q}$-libre et donc $(x, , x+\lambda, \pi)$ l'est aussi et le théorème de Kronecker montre que $\forall \delta, \mu \in \mathbb{R},\ \exists (N_m)_{m\geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{m\to+\infty} N_m = +\infty$ et vérifiant $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{ixN_m} = e^{i\delta}$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i(x+\lambda)N_m} = e^{i\mu}$ par suite si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est une application strictement croissante telle que la suite $(\varphi(m))_{m\geq 0}$ soit extraite de $(N_m)_{m\geq 0}$ alors

$\lim\limits_{m\to+\infty} S_{\varphi(m)-1}(e^{ix}) = \sigma(e^{ix}) + \dfrac{e^{i\delta}}{e^{ix}-1} + \dfrac{\alpha e^{i\mu}}{e^{i(x+\lambda)}-1}$ avec $(\varphi(m)-1)_{m\geq 0}$ une suite strictement croissante ; on en déduit alors que $\forall \delta, \mu \in \mathbb{R},\ \sigma(e^{ix}) + \dfrac{e^{i\delta}}{e^{ix}-1} + \dfrac{\alpha e^{i\mu}}{e^{i(x+\lambda)}-1} \in \mathcal{L}(e^{ix})$.
D'autre part et par un raisonnement cité dans $13.b.$ on a
$\{\sigma(e^{ix}) + \dfrac{e^{i\delta}}{e^{ix}-1} \ / \ \delta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{C}(\sigma(e^{ix}), \dfrac{1}{|e^{ix}-1|}) = \mathcal{C}(\sigma(e^{ix}), \dfrac{r_1+r_2}{2})$ de plus et pour chaque $\delta \in \mathbb{R}$ fixé on a de même $\{\sigma(e^{ix}) + \dfrac{e^{i\delta}}{e^{ix}-1} + \dfrac{\alpha e^{i\mu}}{e^{i(x+\lambda)}-1} \ / \ \mu \in \mathbb{R}\} =$
$\mathcal{C}(\sigma(e^{ix}) + \dfrac{e^{i\delta}}{e^{ix}-1}, \dfrac{\alpha}{|e^{i(x+\lambda)}-1|}) = \mathcal{C}(\sigma(e^{ix}) + \dfrac{e^{i\delta}}{e^{ix}-1}, \dfrac{r_2-r_1}{2})$, on a ainsi
$\{\sigma(e^{ix}) + \dfrac{e^{i\delta}}{e^{ix}-1} + \dfrac{\alpha e^{i\mu}}{e^{i(x+\lambda)}-1} \ / \ \delta, \mu \in \mathbb{R}\} = \bigcup\limits_{z\in\mathcal{C}(\sigma(e^{ix}), \frac{r_1+r_2}{2})} \mathcal{C}(z, \dfrac{r_2-r_1}{2}) =$
$\{\zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]\}$ (faire un dessin). On a donc aboutit à
$\{\zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]\} \subset \mathcal{L}(e^{ix})$ et enfin $\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]\}$.