

CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; Centrale_2011

Dans tout ce corrigé on notera $D(0, 1)$ le disque unité de $\mathbb{C}$, c'est à dire :

$D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < 1\}$. Rappelons en outre que : $\forall z \in D(0, 1)$, la série $(\sum z^n)$

converge absolument de somme : $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

I Étude préliminaire

I.A – Convergence des séries de Riemann

I.A.1) $\forall x \in [k, k+1]$; $\forall y \in [k-1, k]$; $f(x) \leq f(k) \leq f(y)$

Alors : $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k) = \int_{k-1}^k f(k)dx \leq \int_{k-1}^k f(y)dy$

I.A.2) Pour $\alpha \leq 0$, la série $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$ diverge grossièrement.

Pour $\alpha > 1$, on applique la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.

$\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\forall n \geq 2$; $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

La suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n \geq 1}$ est croissante majorée, alors elle converge.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, on applique aussi la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \frac{1}{t}$.

$\forall k \geq 1$; $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\forall n \geq 2$; $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Conclusion :

La série de Riemann $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.A.3) D'après la question précédente, pour tout $\alpha > 1$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

On fait tendre n vers l'infini, on obtient alors : $1 \leq S(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

I.B – Première étude asymptotique du reste

Dans la suite on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall \alpha > 1$; $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) $\forall k \geq n \geq 2$; $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^\alpha}$

Pour tout entier $N \geq n$; $\int_n^{N+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^N \frac{dx}{x^\alpha}$

$\forall N \geq n \geq 2$; $\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{n-1}^N$.

On fait encore tendre N vers l'infini, on obtient : $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$.

D'où $\left| R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \right| \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

$\left| R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \right| \leq \frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \left(-\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} + 1 \right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha} (\alpha - 1 + o(1)) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

Finalement : $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{*+}$, alors d'après la formule de Taylor avec reste intégral appliqué à f entre k et $(k+1)$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* ; f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{f''(k)}{2} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f'''(t) dt.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* ; f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

$$A_k = \int_k^{k+1} (k+1-t)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2t^{\alpha+2}} dt ; \text{ on a : } 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1} (k+1-t)^2 dt \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1} dt$$

$$0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}.$$

I.B.3) D'après I.B.2) $\forall k \geq n \geq 1 ; f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ avec $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}.$

$$f(k+1) - f(k) - \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} = A_k. \text{ D'où } \forall N \geq n \geq 1 ;$$

$$0 \leq f(N+1) - f(n) - \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \sum_{k=n}^N A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^{\alpha+2}}$$

On fait tendre N vers l'infini, on obtient alors :

$$0 \leq -f(n) - R_n(\alpha) + \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} R_n(\alpha+2). \text{ D'après I.B.1) on a :}$$

$$R_n(\alpha+1) = \frac{1}{n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \text{ et } R_n(\alpha+2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

$$\text{D'où } -f(n) - R_n(\alpha) + \frac{1}{2n^\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \text{ c'est à dire : } R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A – Nombres de Bernoulli

II.A.1) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle infini de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur I .

Posons : $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}.$

$$\sum_{j=1}^p \frac{g^{(j)}}{j!} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+j)} = \sum_{k=1}^{2p-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!} \right) f^{(k)}$$

$$\sum_{j=1}^p \frac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f' + \sum_{k=2}^p \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!} \right) f^{(k)} + \sum_{k=p+1}^{2p-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!} \right) f^{(k)}.$$

Soit alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall k \geq 2 ; a_{k-1} = - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{a_i}{(k-i)!} \end{cases}$$

L'égalité précédente devient alors :
$$\sum_{j=1}^p \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{k=p+1}^{2p-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!} \right) f^{(k)}.$$

$$\sum_{j=1}^p \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!} \right) f^{(p+l)}$$

On pose alors : $\forall l \in [[1, p-1]] ; b_{l,p} = \sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!}.$

Ainsi l'existence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est démontrée.

II.A.2) Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite répondant aux conditions de la question précédente.

D'après la question précédente : $\forall p \in \mathbb{N}^* ; \forall f \in C^\infty(I, \mathbb{C})$

$$\sum_{j=1}^p \frac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f' + \sum_{k=2}^p \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!} \right) f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!} \right) f^{(p+l)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

$$(a_0 - 1)f' + \sum_{k=2}^p \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!} \right) f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\left(\sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!} \right) - b_{l,p} \right) f^{(p+l)} = 0$$

Pour $f(x) = x^p$, cet égalité s'écrit :

$$p(a_0 - 1)x^{p-1} \sum_{k=2}^p \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!} \right) \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} = 0.$$

C'est un polynôme nul, alors ses coefficients sont nuls, et par suite :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall k \geq 2 ; a_{k-1} = - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{a_j}{(k-j)!} \text{ ou encore : en posant : } p = k-1 \text{ et } i = k-j = p+1-j$$

$$\boxed{a_0 = 1} \text{ et } \boxed{\forall p \geq 1 ; a_p = - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}} ; \boxed{a_1 = \frac{-1}{2}} ; \boxed{a_2 = \frac{1}{12}}$$

Montrons par récurrence sur p que : $\forall p \in \mathbb{N} ; |a_p| \leq 1$

ceci est évident pour $p = 0$, soit $p \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0, p-1]] ; |a_k| \leq 1$.

$$\text{alors : } \forall i \in [[2, p+1]] ; |a_{p+1-i}| \leq 1. \text{ D'où : } |a_p| = \left| \sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!} \right| \leq \sum_{i=2}^{p+1} \frac{1}{i!} \leq e - 2 \leq 1.$$

II.A.3) a) $\forall p \in \mathbb{N} ; |a_p| \leq 1$, alors $\forall p \in \mathbb{N} ; \forall z \in \mathbb{C} ; |a_p z^p| \leq |z|^p$.

Si $|z| < 1$ alors la série $(\sum |z|^p)$ converge, et par suite la série $\left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p \right)$ converge aussi

absolument. On note alors : $\varphi(z) = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$.

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, les deux séries : $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $\varphi(z) = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$

sont absolument convergentes, alors $(e^z - 1)\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$ qui est la série produit de

Cauchy des deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; d_{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{a_{n+1-p}}{p!} = a_n + \sum_{p=2}^{n+1} \frac{a_{n+1-p}}{p!} = 0 \text{ et } d_1 = a_0 = 1.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, $(e^z - 1)\varphi(z) = z$ et $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ si $z \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, on pose : $\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{2z + z(e^z - 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z + ze^z}{2(e^z - 1)}$

$$\psi(-z) = \frac{z + ze^{-z}}{2(1 - e^{-z})} = \frac{(z + ze^{-z})e^z}{2(1 - e^{-z})e^z} = \psi(z).$$

$\psi(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ est la somme d'une série entière paire sur $D(0, 1)$.

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^* ; a_{2k+1} = 0$.

$$a_4 = - \sum_{i=2}^5 \frac{a_{5-i}}{i!} = - \left(\frac{a_0}{5!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!} \right) = - \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} \right) = - \frac{6-15+10}{720} = - \frac{1}{720}.$$

Définition :

Les nombres $b_n = n!a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B – Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où $\alpha > 1$.

On fixe un entier naturel non nul p , et on note : $g = \sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$.

II.B.1) Remarquons d'abord que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors g l'est aussi.

Appliquons à g la formule de Taylor avec reste intégral entre k et $(k+1)$ à l'ordre $2p$

$$g(k+1) - g(k) = \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t) dt$$

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t) dt$$

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t) dt$$

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} \left[\frac{-\alpha(-\alpha-1)\dots(-\alpha-2p-l+1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \frac{-\alpha(-\alpha-1)\dots(-\alpha-2p)}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p)}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p)}{(2p)!} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p)}{(2p)!} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}} \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| \left[\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-1)}{k^l} \right] + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p)}{(2p)!} \frac{1}{k} \right)$$

$$|R(k)| \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}} \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| [\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-1)] + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p)}{(2p)!} \right)$$

$$\text{D'où pour } A = \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}| [\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p+l-1)] + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2p)}{(2p)!} \right);$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* ; |R(k)| \leq \frac{A}{k^{\alpha+2p}}.$$

II.B.2) D'après la question précédente : $\forall k \in \mathbb{N}^* ; g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$.

$$\forall N \geq n \geq 1 ; \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=n}^N R(k) = g(N+1) - g(n).$$

On fait tendre N vers l'infini, on obtient : $|R_n(\alpha) + g(n)| \leq AR_n(\alpha+2p) = O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$

D'où : $R_n(\alpha) = -g(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. autrement dit :

$$R_n(\alpha) = - \sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}). \text{ or pour } p \geq 2 ; a_{2p-1} = 0, \text{ alors pour } p \geq 2, \text{ on a :}$$

$$R_n(\alpha) = - \sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}). \text{ or on a déjà établi cet égalité dans la première partie}$$

pour $p = 1$, d'où pour tout entier non nul p on a :

$$R_n(\alpha) = - \sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$$

II.B.3) $R_n(3) = -a_0 f(n) - a_1 f'(n) - a_2 f''(n) - a_3 f'''(n) - a_4 f^{(4)}(n) + O(\frac{1}{n^8})$.

$$f(n) = \frac{-1}{2n^2} ; f'(n) = \frac{1}{n^3} ; f''(n) = \frac{-3}{n^4} ; f'''(n) = \frac{12}{n^5} ; f^{(4)}(n) = \frac{-60}{n^6}$$

$$a_0 = 1 ; a_1 = -\frac{1}{2} ; a_2 = \frac{1}{12} ; a_3 = 0 ; a_4 = -\frac{1}{720}.$$

$$R_n(3) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{3}{12n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A – Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$A_0 = 1 ; \forall n \in \mathbb{N} ; A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0.$$

Les polynômes $B_n = n!A_n$ s'appellent les polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) A_0 est uniquement déterminé et $\deg(A_0) = 0$, $A_1 = X + \lambda$ et $\int_0^1 (t + \lambda) dt = 0 = \frac{1}{2} + \lambda$

Alors $A_1 = X - \frac{1}{2}$ est bien déterminé et $\deg(A_1) = 1$.

Soit $n \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0, n]] ; A_k$ existe et unique et $\deg(A_k) = k$.

Alors A_{n+1} est un polynôme de degré $(n+1)$.

$$A_{n+1}(X) = A_{n+1}(0) + \int_0^X A_n(t) dt \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t) dt = 0 = A_{n+1}(0) + \int_0^1 \left(\int_0^t A_n(t) dt \right) dx$$

$A_{n+1}(X) = \int_0^X A_n(t) dt - \int_0^1 \left(\int_0^t A_n(t) dt \right) dx$ est donc un polynôme uniquement déterminé.

$$A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \mu \text{ et } \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \mu \right) dt = 0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \mu, \text{ alors } \mu = \frac{1}{12}.$$

$$A_2 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X + \nu \text{ et } \int_0^1 \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t + \nu \right) dt = 0 = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \nu, \text{ alors } \nu = 0.$$

$$\boxed{A_0 = 1} ; \boxed{A_1 = X - \frac{1}{2}} ; \boxed{A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}} ; \boxed{A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X}$$

b) Posons : $\forall n \in \mathbb{N} ; \alpha_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.

$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que :

$$\alpha_0 = 1 ; \forall n \in \mathbb{N} ; \alpha'_{n+1} = \alpha_n \text{ et } \int_0^1 \alpha_{n+1}(t) dt = \int_0^1 A_{n+1}(u) du = 0. \text{ (poser : } u = 1-t \text{)}$$

Alors par unicité de l'existence de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ établit à la question précédente, on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} ; A_n = \alpha_n$ c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N} ; A_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.

$$c) \forall n \geq 2 ; A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A_{n-1}(t) dt = 0.$$

D'après la question précédente on a : $A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1} A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0)$. ($2n-1 \geq 2$)

D'où : $\forall n \geq 2 ; A_n(1) = A_n(0)$ et $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} ; c_n = A_n(0)$. $c_0 = 1 = A_0(0) = A_0(X)$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ tel que : } A_n(X) = \sum_{i=0}^n c_i \frac{X^{n-i}}{(n-i)!}, \text{ alors : } A_{n+1}(X) = \sum_{i=0}^n c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!} + A_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$$

$$\text{D'après la question précédente : } \forall n \geq 1 ; A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0 = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{(n+1-i)!}.$$

$$e) \text{ D'après la formule ci dessus : } c_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1 ; c_n = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{(n+1-i)!} = - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}.$$

Alors d'après la question II.A.2), $\forall n \in \mathbb{N} ; a_n = c_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

$$a) \forall t \in [-1, 1] ; \forall n \in \mathbb{N} ; |A_n(t)| = \left| \sum_{i=0}^n a_i \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \right| \leq \sum_{i=0}^n \frac{|a_i|}{(n-i)!} \leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)!} \text{ (selon II.A.2)}$$

$$\forall z \in D(0, 1) ; \forall t \in [-1, 1] ; \forall n \in \mathbb{N} ; |A_n(t)||z|^n \leq e|z|^n$$

D'où la série $(\sum A_n(t)z^n)$ converge absolument pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $z \in D(0, 1)$.

On posera alors : $f(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n$.

b) Fixons $z \in D(0, 1)$ et posons : $\forall t \in [0, 1] ; f_z(t) = f(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n$.

D'après la question précédente, cette série converge normalement sur $[0, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N} ;$ posons : $g_n(t) = A_n(t)z^n ; g_n$ est une fonction polynôme donc de classe C^1 sur $[0, 1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}^* ; g'_n(t) = A'_n(t)z^n = z g_{n-1}(t)$, alors la série $(\sum g'_n(t))$ est aussi normalement convergente pour $t \in [0, 1]$. D'où ; f_z définit une application de classe C^1 sur $[0, 1]$ et

$$\forall t \in [0, 1] ; f'_z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z g_{n-1}(t) = z f_z(t).$$

Alors il existe une constante complexe δ_z telle que : $\forall t \in [0, 1] ; f_z(t) = \delta_z e^{tz}$

$$\forall t \in [0, 1] ; f_z(0) = \delta_z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{z}{e^z - 1} \text{ si } z \neq 0 \text{ (d'après : II.A.3)b)}$$

Finalement : $\boxed{\forall t \in [0, 1] ; \forall z \in D(0, 1) \setminus \{0\} ; \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1}}.$

c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que : $|z| < 2\pi$. $\frac{ze^{z/2}}{e^z - 1} = \frac{z(e^{z/2} + 1)}{(e^{z/2})^2 - 1} = \frac{z}{e^{z/2} - 1} = 2 \frac{z/2}{e^{z/2} - 1}.$

Alors pour tout $z \in D(0, 1) \setminus \{0\} ;$

$$f_z\left(\frac{1}{2}\right) + f_z(0) = 2f_{z/2}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n\left(\frac{1}{2}\right) + A_n(0))z^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Alors par identification des deux séries entières qui sont de rayon de convergence non nul, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; A_n\left(\frac{1}{2}\right) + a_n = 2 \frac{a_n}{2^n}. \text{ D'où : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n}.$$

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

a) (i) $A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12} ; A'_2(x) = x - \frac{1}{2} ; A_2$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. $A_2(0) = A_2(1) = \frac{1}{12} > 0 > A_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{-1}{24}.$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k \in [[2, 4n+2]] ; A_k$ satisfait les conditions données à l'énoncé. A_{4n+2} est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

$$A_{4n+2}(0) = A_{4n+2}(1) > 0 > A_{4n+2}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Il existe un unique couple de réels (u, v) tel que : $0 < u < \frac{1}{2} < v < 1$ et $A_{4n+2}(u) = A_{4n+2}(v) = 0$.

et donc $A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]0, u[; A_{4n+2}(t) < 0$ sur $]u, v[; A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]v, 1[$

$$\forall t \in [0, 1] ; A'_{4n+3}(t) = A_{4n+2}(t)$$

A_{4n+3} est strictement croissante sur $[0, u]$ et sur $[v, 1]$, et strictement décroissante sur $[u, v]$.

D'après : III.A.1)c) $A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = 0 = a_{4n+3}$ donc d'après la question précédente :

$$\text{On déduit : } A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = A_{4n+3}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Les variations ci dessus de A_{4n+3} permettent alors de déduire que :

$$A_{4n+3}(t) < 0 \text{ si } t \in]\frac{1}{2}, 1[\text{ et } A_{4n+3}(t) > 0 \text{ si } t \in]0, \frac{1}{2}[.$$

(iii) On refait le même procédé en exploitant les variations de A_{4n+3} établis ci dessus et le faite que $A_{4n+3} = A'_{4n+4}$ pour établir les propriétés relatives à A_{4n+4} .

et ensuite celle de A_{4n+5} par le même procédé.

Par récurrence sur n , on obtient alors les propriétés énoncées dans le texte de ce problème.

b) D'après les propriétés de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall x \in [0, 1]$

$$(i) |A_{2n}(x)| \leq \max(|A_{2n}(0)|, |A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)|) = \max(|a_{2n}|, \left|\left(\frac{1}{2^{2n-1}} - 1\right)a_{2n}\right|) = |a_{2n}|.$$

$$(ii) |A_{2n+1}(x)| = \left| A_{2n+1}(x) - A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \sup_{y \in [0,1]} |A'_{2n+1}(y)| \left| x - \frac{1}{2} \right| = \sup_{y \in [0,1]} |A_{2n}(y)| \left| x - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}.$$

où l'on a utilisé l'inégalité des accroissements finis et le (i) ci dessus.

III. B – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III. B. 1) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

a) Par récurrence sur $q \geq 1$, montrons que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* ; f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} [A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt.$$

Pour $q = 1$:

$$\int_0^1 A_1(t)f''(t)dt = [A_1(t)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 A'_1(t)f'(t)dt = [A_1(t)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)dt$$

$$\int_0^1 A_1(t)f''(t)dt = [A_1(t)f'(t)]_0^1 - (f(1) - f(0))$$

La propriété est établit pour $q = 1$.

$$\text{Soit } q \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} [A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt.$$

Par intégration par parties on a :

$\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt = [A_{q+1}(t)f^{(q+1)}(t)]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)dt.$ remplaçons dans l'égalité ci dessus on obtient :

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j+1} [A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^{q+1} \int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)dt.$$

b) On applique la question précédente pour $q = 2p + 1$.

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{2p+1} (-1)^{j+1} [A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{2p+1} (-1)^{j+1} (A_j(1)f^{(j)}(1) - A_j(0)f^{(j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2} (f'(0) + f'(1)) + \sum_{j=2}^{2p+1} (-1)^{j+1} (A_j(1)f^{(j)}(1) - A_j(0)f^{(j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

Donc en utilisant **III. A. 1)c)**

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2} (f'(0) + f'(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

III. B. 2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$.

On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

Pour tout $k \geq n$, on pose : $f_k(t) = f(k+t)$.

f_k est C^∞ sur $[0, 1]$, alors d'après la question précédente : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f_k(1) - f_k(0) = \frac{1}{2} (f'_k(0) + f'_k(1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f_k^{(2j)}(1) - f_k^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f_k^{(2p+2)}(t)dt.$$

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2} (f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(k+t)dt.$$

Alors selon le changement de variable : $u = k+t$, on obtient :

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2} (f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j} (f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}(u-k)f^{(2p+2)}(u)du$$

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{2}(f'(k) + f'(k+1)) - \sum_{j=1}^p a_{2j}(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

Soit $N \geq n$, et sommons l'expression précédente entre n et N .

$$f(N+1) - f(n) = \sum_{k=n}^N f'(k) - \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2}f'(N+1) - \sum_{j=1}^p a_{2j}(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)) - \int_n^{N+1} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)dt$$

$\forall j \in \mathbb{N}$; $f^{(j)}$ garde un signe constant sur $[n, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$

$f^{(j)}$ est intégrable sur $[n, +\infty[$, de plus, d'après **III. A. 3)b**) et **II. A. 2**) ; $\forall x \in [0, 1]$; $|A_{2p+1}(x)| \leq 1$

Alors : $\forall t \in [n, +\infty[$; $|A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)| \leq |f^{(2p+2)}(t)|$.

L'application $[t \mapsto A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)]$ est donc continue par morceaux intégrable sur $[n, +\infty[$.

D'où $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_n^{N+1} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)dt$ existe bien et par conséquent $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n}^N f'(k) \right)$ existe aussi.

On fait alors tendre N vers l'infini dans l'égalité ci dessus on obtient :

$$\sum_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^p a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

En utilisant **III. A. 3)b**) On a : $\left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)dt \right| \leq \int_n^{+\infty} \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+2)}(t)|dt$

Puisque $f^{(2p+2)}$ garde un signe constant sur $[n, +\infty[$, alors :

$$\int_n^{+\infty} |f^{(2p+2)}(t)|dt = \left| \int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t)dt \right| = |f^{(2p+1)}(n)|. \text{ D'où } \left| \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)dt \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} |f^{(2p+1)}(n)|.$$

III. B. 2) On a vu dans **II. B. 2)** que : $R_n(\alpha) = - \sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right)$

$$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{i=2}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right).$$

Alors selon la question : **II. A. 3)c**) et pour $f(t) = \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$ qui définit bien une application de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$ qui satisfait bien les conditions de **II. A. 2)**, l'égalité précédente s'écrit :

$$\sum_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right).$$

Identifions avec l'égalité de la question précédente, le terme $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}\right)$ s'écrit sous forme : d'une intégrale, qui est : $\int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt$. On écrit alors :

$$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt.$$

IV Compléments sur l'erreur

On fixe ici un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

IV. A – Encadrement de l'erreur

IV. A. 1) Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[0, 1]$.

$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_{1/2}^1 A_n(t)g(t)dt$. On change la deuxième intégrale par le changement de variable : $u = 1 - t$, on obtient :

$$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_0^{1/2} A_n(1-t)g(1-t)dt. \text{ et d'après III. A. 1)b)}$$

$$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) + (-1)^n g(1-t))dt$$

Alors pour n impair, ceci s'écrit : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) - g(1-t))dt$.

g est croissante, alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}] ; (g(t) - g(1-t)) \leq 0$.

Si $n \equiv 1 \pmod{4}$ alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}] ; A_n(t) \leq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \geq 0$.

Si $n \equiv 3 \pmod{4}$ alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}] ; A_n(t) \geq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \leq 0$.

IV. A. 2) On reprend les notations de **II. B. 2)** et le résultat du **III. B. 2)**

$$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt.$$

$$R_n(\alpha) = \tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt.$$

$$S(\alpha) = \tilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt.$$

Remplaçons successivement dans cet égalité p par $(2p+1)$, $(2p+2)$, et $2p$. On obtient :

$$(i) S(\alpha) = \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt.$$

$$(ii) S(\alpha) = \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p+3}^*(t)f^{(4p+4)}(t)dt.$$

$$(iii) S(\alpha) = \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p-1}^*(t)f^{(4p)}(t)dt.$$

$$\text{Examinons le cas (i). } \int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt$$

$$\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A_{4p+1}(t-k)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 A_{4p+1}(u)f^{(4p+2)}(u+k)du.$$

L'application : $[u \mapsto f^{(4p+2)}(u+k)]$ est continue croissante sur $[0, 1]$, alors d'après la question précédente : $\int_0^1 A_{4p+1}(u)f^{(4p+2)}(u+k)du \geq 0$ et par conséquent : $\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt \geq 0$

D'où $\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha)$.

De la même manière on a : $\int_n^{+\infty} A_{4p+3}^*(t)f^{(4p+4)}(t)dt \leq 0$ et $\int_n^{+\infty} A_{4p-1}^*(t)f^{(4p)}(t)dt \leq 0$.

D'où les inégalités : $\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$ et $\tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$.

Soit maintenant $p \geq 1$. On va utiliser ces deux inégalités dans les deux cas suivants :

Premier cas : Si p est pair ; $p = 2q$

$$0 \leq S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha) = S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4q}(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4q+2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4q}(\alpha) = -a_{4q+2}f^{(4q+2)}(n) = -a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n).$$

$$\text{D'où } |S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)|.$$

Deuxième cas : Si p est impair ; $p = 2q - 1$

$$0 \leq \tilde{S}_{n,2p}(\alpha) - S(\alpha) = \tilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4q}(\alpha) = a_{4q}f^{(4q)}(n) = a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n).$$

$$\text{D'où } |S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)|.$$

IV. A. 3) Dans cette question on reprend le cas de **II. B. 3)**, on applique la question précédente, on obtient : $|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)| \leq |a_6f^{(6)}(100)| = \frac{1}{720.42}|f^{(6)}(100)|.$

$$f(x) = \frac{-1}{2x^2} ; f'(x) = \frac{1}{x^3} ; f''(x) = \frac{-3}{x^4} ; f^{(3)}(x) = \frac{12}{x^5} ; f^{(4)}(x) = \frac{-60}{x^6} ; f^{(5)}(x) = \frac{360}{x^7} ; f^{(6)}(x) = \frac{-360.7}{x^8}.$$

$$f^{(6)}(100) = -360.7.10^{-16}, \text{ alors } |S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)| \leq \frac{360.7.10^{-16}}{720.42} = \frac{1}{12}10^{-16} \leq 10^{-17}.$$

IV. B – Séries de Fourier

Pour tout entier naturel $p \geq 1$ et tout réel x , on pose : $\tilde{A}_p(x) = A_p(\frac{x}{2\pi} - [\frac{x}{2\pi}])$.

IV. B. 1) A_p est continue sur $\mathbb{R}$ et l'application $[x \mapsto \frac{x}{2\pi} - [\frac{x}{2\pi}]]$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $\tilde{A}_p$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$\tilde{A}_p(x + 2\pi) = A_p(\frac{x+2\pi}{2\pi} - [\frac{x+2\pi}{2\pi}]) = A_p(\frac{x}{2\pi} + 1 - [\frac{x}{2\pi} + 1]) = \tilde{A}_p(x).$$

$$\text{IV. B. 2)} \hat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{A}_p(t)e^{-int} dt.$$

$$\forall t \in [0, 2\pi[; \left[\frac{t}{2\pi} \right] = 0 \text{ et } \tilde{A}_p(t) = A_p\left(\frac{t}{2\pi}\right) \text{ et } \hat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_p\left(\frac{t}{2\pi}\right) e^{-int} dt. \text{ On pose : } x = \frac{t}{2\pi}.$$

$$\hat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x) e^{-2i\pi nx} dx. \text{ Fixons } n \in \mathbb{Z}^* \text{ et posons : } h(x) = \frac{e^{-2i\pi nx}}{(-2i\pi n)^{p+1}}. h \text{ est } C^\infty \text{ sur } [0, 1] \text{ et on a :}$$

$$\hat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x) h^{(p+1)}(x) dx. \text{ Appliquons maintenant la question III.B.1).}$$

$$\hat{A}_p(n) = (-1)^p (h(1) - h(0)) - (-1)^p \sum_{j=1}^q (-1)^{j+1} [A_j(t) h^{(j)}(t)]_0^1$$

Vu que h et ses dérivées successives sont 1-périodiques et que d'après III.A.1)c) pour tout $j \geq 2$, $A_j(1) = A_j(0)$.

$$\hat{A}_p(n) = (-1)^{p+1} (A_1(1)h'(1) - A_1(0)h'(0)) = (-1)^{p+1} h'(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{(-2i\pi n)^p} = \frac{-1}{(2i\pi n)^p}.$$

$$\hat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(x) dx = 0.$$

IV.B.3) La série de Fourier de $\tilde{A}_p$ est donnée par : $\tilde{S}_p(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{(2i\pi n)^{p+1}}.$

$p+1 > 1$, alors la série de Fourier de $\tilde{A}_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

IV.B.4) $a_{2p} = A_{2p}(0)$, $\tilde{A}_{2p}$ est 2π -périodique de classe C^1 par morceaux, alors d'après le théorème de Dirichlet : $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{-1}{(2i\pi n)^{2p}} = \frac{\tilde{A}_{2p}(+0) + \tilde{A}_{2p}(-0)}{2}.$

Pour $x > 0$, x proche de 0, $\tilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}\left(\frac{x}{2\pi}\right).$

Pour $x < 0$, x proche de 0, $\tilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}\left(\frac{x}{2\pi} + 1\right).$

Alors : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^p}{(2\pi n)^{2p}} = \frac{A_{2p}(0) + A_{2p}(1)}{2} = A_{2p}(0). \text{ (D'après la question III.A.1)b))}$

Finalement : $a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1} \frac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}.$

IV.C – Comportement de l'erreur

IV.C.1) Il suffit de dériver l'expression : $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ $2p$ fois et ensuite $(2p+2)$ fois et utiliser l'égalité de IV.B.4) pour obtenir le résultat : $\left| \frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}.$

IV.C.2) Ici on va examiner deux résultats, celui de IV.A.2) et celui de IV.C.1).

$$\left| S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha) \right| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)| \text{ et } \left| \frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}.$$

$S(2p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}.$ La série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ converge normalement pour $p \in [1, +\infty[$, alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 0 \text{ et } \lim_{p \rightarrow +\infty} S(2p) = 1.$$

$$\text{Alors à } n \text{ fixé : } \lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)} \right| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)} = +\infty.$$

Pour n fixé, plus que p est grand, plus que l'approximation de $S(\alpha)$ par $\tilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ est mauvaise. Étant donné que $\frac{S(2p+2)}{S(2p)} < 1$, ne choisir que des couples d'entiers tels que :

$\varepsilon_n = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)}{4n^2\pi^2} |f^{(2p)}(n)|$ est suffisamment petit, comme ça on aura :

$$\left| S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha) \right| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)| \leq |a_{2p}f^{(2p)}(n)| \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)} \leq \varepsilon_n$$

ce qui permet d'avoir de bonnes approximations de $S(\alpha)$ par $\tilde{S}_{n,2p}(\alpha).$