Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

Les exercices et le problème sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Soit un espace vectoriel E de dimension 3, muni du repère B=$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit f_α un endomorphisme de E de matrice dans la base B (α est un paramètre réel) :

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique P_α de $\mathbf{A}_\alpha$. Préciser les valeurs de α telles que P_α a une racine double.

2) On suppose ici que α vaut 3. Déterminer dans ce cas les valeurs propres et une base de E formée de vecteurs propres de f_3

3) On suppose que α vaut 2. Montrer que dans ce cas f_2 admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Calculer deux vecteurs propres, $\vec{v}_1$ (associé à λ_1) et $\vec{v}_2$ (associé à λ_2). f_2 est-il diagonalisable?

4) Toujours pour α =2, calculer la matrice K de l'endomorphisme $g = \left(f_2 - 2Id\right)^2$ dans la base B. Montrer que $(\vec{v}_2, \vec{e}_3)$ est une base de Ker g . Calculer $f(\vec{e}_3)$ à l'aide de $(\vec{v}_2)$ et de $(\vec{e}_3)$.

5) Montrer que $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3\right)$ est une base de E. Donner la matrice T de f_2 dans la base $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_3\right)$.

Exercice 2

On considère les fonctions $F_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\text{ch}^k(t)}$ pour k entier naturel non nul. On rappelle que

$\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ et que $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2(t) = 1$.

1) Justifier l'existence de $F_k(x)$ pour tout réel x.

2) Pour tout entier naturel non nul k, on note $I_k = \lim_{x \to \infty} F_k(x)$. Justifier l'existence de I_k. Calculer I_1.

[Indication : on peut utiliser le changement de variable $sh(t) = u$].

3) Calculer $J(y) = \int_0^y \frac{du}{1+u^2}$. Calculer, par une intégration par parties, $K(y) = \int_0^y \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2}$. En déduire la valeur de $L(y) = \int_0^y \frac{du}{(1+u^2)^2}$.

4) À l'aide du changement de variable $sh(t) = u$, exprimer $F_3(x)$ avec la fonction L.

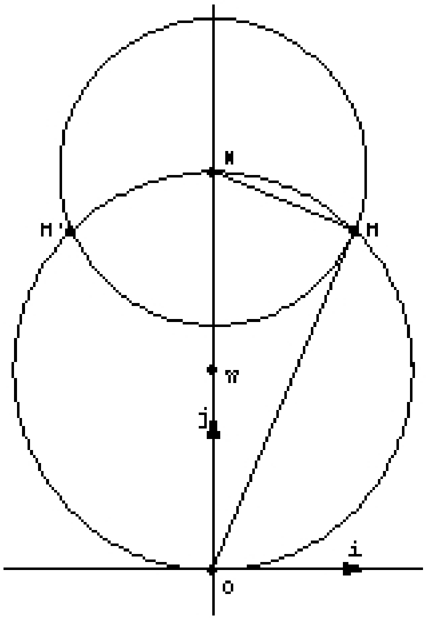
5) On pose $u_p = I_{2p-1}$

5a) Exprimer l'intégrale par le changement de variable précédent.

5b) Utiliser ensuite la décomposition $\frac{1}{(1+u^2)^{p+1}} = \frac{1}{(1+u^2)^p} - \frac{u^2}{(1+u^2)^{p+1}}$ et une intégration par parties pour démontrer la relation de récurrence $u_{p+1} = \frac{2p-1}{2p} u_p$.

5c) En déduire l'expression complète de u_{p+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et du nombre π .

Exercice 3



Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On appelle K l'ensemble des points M du plan tels que (OMN) soit rectangle en M, avec N sur l'axe (y'y) et tel que MN=1.

1) On considère les points $W(0;v)$ et $N(0;2v)$, où v est un paramètre réel tel que $|v| \geq \frac{1}{2}$.
Montrer que l'intersection d'un cercle C_1 de centre N et de rayon 1 et d'un cercle C_2 de centre W et passant par N est non vide et que les points d'intersection sont dans K. Donner les équations des cercles C_1 et C_2.
2) Avec l'équation d'un des cercles, exprimer ν en fonction de *x* et *y*. En reportant cette expression de ν dans l'autre équation de cercle, montrer que K est inclus dans la courbe K' vérifiant l'équation $x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$ (on admettra dans la suite sans démonstration que K=K'). Préciser les symétries de K.

3) On suppose ici que M a ses deux coordonnées strictement positives. et on note *t* la mesure de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$. Calculer en fonction de *t* les longueurs OM et ON.
4) Pour un point M quelconque de K (de coordonnées non nécessairement positives), déduire de l'expression précédente et des symétries de K une représentation paramétrique de K à l'aide du paramètre *t* Préciser des intervalles pour *t* permettant de parcourir K une seule fois.

5) On appelle Δ la droite passant par O orthogonale à la droite (OM) et H le point d'intersection de Δ et de la droite horizontale passant par N.
Déterminer en fonction de *t* non nul fixé:
 a) Les coordonnées du point N.
 b) La distance OH.
 c) Les coordonnées du point H.
 d) Montrer que la droite (HM) est la normale à la courbe K au point M.

Problème

Partie A

On note B l'ensemble des suites numériques (réelles ou complexes) $u = (u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la condition

$$M > 0 \,,\quad a > 0 \,,\quad n \quad Å \,,\ |u_n| \leq Ma^n$$

On leur associe la fonction $G_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ qui est définie lorsque la série converge.

1) Montrer que $G_u(x)$ est définie pour tout x È tel que $|x| < \frac{1}{a}$

2) Montrer que l'ensemble des suites B est stable par addition, produit et contient les suites géométriques et les suites polynomiales (c.a.d. les suites *u* telles que $u_n = P(n)$, *P* étant un polynôme). Donner un exemple de suite qui n'appartient pas à B.

3) Soit m un entier positif fixé, et une suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ de B, on définit la suite $v=(v_n)_{n\geq 0}$ par

$$v_n = u_{n-m} \text{ si } n \geq m \text{ et } v_n = 0 \text{ si } 0 \leq n < m$$

Exprimez la fonction $G_v(x)$ à l'aide de $G_u(x)$.

4) On introduit les polynômes $A_0(x)=1$, $A_1(x)=x$, $A_2(x)=x(x-1)$ et plus généralement $A_k(x)=x(x-1)...(x-k+1)$ pour k entier positif.

a- Pour une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de B, soit la suite $w_k=(A_k(n)u_n)_{n\geq 0}$. Exprimer la fonction $G_{w_k}(x)$ à l'aide de $G_u(x)$ en détaillant les cas $k=1$, $k=2$ et $k>2$.

b- On prend ici pour tout n, $u_n=1$. Calculer par récurrence sur k la fonction $G_{w_k}(x)$ et préciser quel est le rayon de convergence de la série qui la définit.

c- On prend encore pour tout n, $u_n=1$, et le polynôme $P(x)=x^3+4x^2$. Déterminer la décomposition $P(x)=\sum_{k=0}^{3} c_k A_k(x)$, en déduire la fonction $G_s(x)$ pour la suite $s=(s_n)_{n\geq 0}$ telle que $s_n = P(n)u_n$.

Partie B

On s'intéresse dans cette partie à l'équation récurrente (où l'inconnue est la suite $y=(y_n)_{n\geq 0}$)

(E) $$y_n + \frac{15}{4}y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} = u_n \text{ pour } n \geq 0$$

et on prend comme convention que $n<0$, $y_n=0$, ce qui revient à poser :

$y_0 = u_0$, $y_1 + \frac{15}{4}y_0 = u_1$, $y_2 + \frac{15}{4}y_1 + 3y_0 = u_2$, $y_n + \frac{15}{4}y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} = u_n$ pour $n \geq 3$

Cette équation (E) associe donc à toute suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ une suite unique $y=(y_n)_{n\geq 0}$.

Soit P le polynôme défini par: $P(x)=1+\frac{15}{4}x+3x^2-x^3$

1) Exprimer la fonction $G_y(x)$ à l'aide de $G_u(x)$.

2) Montrer que $P(x)$ possède une racine double a et la calculer (on pourra diviser $P(x)$ par $P'(x)$).

En déduire l'autre racine b et la factorisation de $P(x)$.

3) Déterminer, par développement en série entière convergent au voisinage de 0, les suites $p=(p_n)_{n\geq 0}$, $q=(q_n)_{n\geq 0}$, $r=(r_n)_{n\geq 0}$, telles que $G_p(x)=\frac{1}{x-a}$, $G_q(x)=\frac{1}{(x-a)^2}$, $G_r(x)=\frac{1}{x-b}$

4) On prend ici dans (E) la suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$, $u_n=0$ si $n>0$.

a- Déterminer $G_y(x)$

b- Calculer les coefficients α, β, γ tels que $G_y(x)=\alpha G_p(x)+\beta G_q(x)+\gamma G_r(x)$

c- Montrer que la solution $y=(y_n)_{n\geq 0}$ de (E) s'écrit $(-2)^n(c\,n+d)+e\,\frac{1}{4^n}$ et calculer les constantes c, d, e.