

ENSAI

CORRIGE DE LA PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Erreurs d'énoncé signalées en début d'épreuve:

Partie I-exemple

Question 6-d : lire :

"en examinant  $\text{Tr } h$ , prouver que  $a = -m$ " et non  $a = m = \dim E - 1$ , comme indiqué dans le sujet.

Partie III-Etude de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  :

Question 4 : lire :

"Déterminer  $\mathcal{N}_{\theta, \mathcal{A}}$  (on utilisera la question II-3 c)" et non la question II-3 b, comme indiqué dans le sujet

Erreur signalée en cours d'épreuve:

Partie I -Exemple

Question 3 : lire :

" $\forall a \in \mathcal{L}_3$ " et non " $\forall a \in \mathcal{A}$ "

Petite erreur non signalée:

Partie I -Exemple

Question 2 : Rajouter  $(e, f, h) \neq (0, 0, 0)$

I - EXEMPLE.

1.a) Par un calcul simple, on obtient :  $[e, h](P) = e(h(P)) - h(e(P)) = 2P' = 2e(P)$  donc  $[e, h] = 2e$

De même,  $[f, h] = -2f$  et  $[e, f] = h$

1.b) Si  $P$  est un polynôme de degré  $r$ , alors, la famille  $(e^r(P), \dots, e^2(P), e(P), P, f(P), f^2(P), \dots, f^{n-r}(P))$  est une famille de  $n + 1$  polynômes échelonnée en degré. Comme  $F$  est un sous espace stable par  $e$  et  $f$ , c'est une famille d'éléments de  $F$ . On a donc une famille libre de  $n + 1$  éléments de  $F$ , sous espace vectoriel de  $E$  espace de dimension  $n + 1$ . Donc  $E = F$ .

2) On supposera pour cette question que  $(e, f, h) \neq (0, 0, 0)$ . On a alors,  $e \neq 0$ ,  $f \neq 0$  et  $h \neq 0$  d'après les relations vérifiées par  $e$ ,  $f$ , et  $h$ .

On remarque que le "crochet" est bilinéaire et que  $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad [u, u] = 0$ .

Considérons une combinaison linéaire nulle de  $e$ ,  $f$  et  $h$ :  $\alpha e + \beta f + \gamma h = 0$ .

$0 = [e, [\alpha e + \beta f + \gamma h]] = [e, \beta h + 2\gamma e] = 2\beta e$ , donc  $\beta = 0$ .

$0 = [e, \alpha e + \gamma h] = +2\gamma e$ , donc  $\gamma = 0$  puis  $\alpha = 0$ .

On en déduit que  $(e, f, h)$  est libre et que  $\dim \mathcal{L}_3 = 3$ .

3.a)  $x = \alpha e + \beta f + \gamma h \in \mathcal{J}$ , donc  $[e, [f, x]] = -2\gamma h \in \mathcal{J}$  donc  $h \in \mathcal{J}$  car  $\gamma \neq 0$ .

De même,  $[f, x] = -\alpha h - 2\gamma f \in \mathcal{J}$  donc  $f \in \mathcal{J}$ . et  $[e, x] = \beta h + 2\gamma e \in \mathcal{J}$  donc  $e \in \mathcal{J}$ .

$\mathcal{J}$  st un sous-espace de  $\mathcal{L}$  qui contient les trois vecteurs  $e$ ,  $f$  et  $h$  d'une base de  $\mathcal{L}$  donc  $\mathcal{J} = \mathcal{L}$ .

3.b) Si  $\mathcal{J} \neq \{0\}$ , alors, il contient un vecteur  $x = \alpha e + \beta f + \gamma h$  avec  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$  ou  $\gamma \neq 0$ .

Si  $\gamma \neq 0$ , alors on a montré que  $\mathcal{J} = \mathcal{L}$ .

On procède de même si  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$ .

4.a) Soit  $y$  un vecteur propre de  $h$  associé à une valeur propre  $\alpha$ :  $h(y) = \alpha y$ .

De  $eh - he = 2e$ , on déduit  $e(h(y)) - h(e(y)) = 2e(y)$  puis  $h(e(y)) = (\alpha - 2)e(y)$ .

$\boxed{\text{Si } e(y) \neq 0, e(y) \text{ est donc un vecteur propre de } h \text{ associé à la valeur propre } \alpha - 2}$

4.b)  $h$  est un endomorphisme d'un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel,  $h$  possède donc au moins un vecteur propre  $y$  associé à une valeur propre  $\alpha$ .

S'il n'existe aucun vecteur propre  $x$  de  $h$  tel que  $e(x) = 0$ , alors, d'après la question précédente,  $e(y)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\alpha - 2$ ,  $e(e(y))$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\alpha - 4$  etc.

On obtient ainsi une infinité de valeurs propres  $\alpha, \alpha - 2, \alpha - 4$  etc. ce qui est impossible car l'espace vectoriel  $E$  est de dimension finie.

**5.a)** Montrons par récurrence que  $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)$ .

C'est vrai pour  $k = 0$ .

Supposons le résultat vrai à un rang  $k$  et utilisons la relation  $fh - hf = -2f$ .

$$f(h(f^k(x))) - h(f(f^k(x))) = -2f(f^k(x))$$

$$(\alpha - 2k)f^{k+1}(x) - h(f^{k+1}(x)) = -2f^{k+1}(x)$$

On en déduit  $h(f^{k+1}(x)) = (\alpha + 2(k+1))f^{k+1}(x)$  et on peut conclure d'après le principe de récurrence.

$$\boxed{h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)}$$

**5.b)**  $f^0(x) = x \neq 0$ .

Si pour tout entier naturel  $m$ ,  $f^m(x) \neq 0$ , alors on déduit du **a)** l'existence d'une infinité de valeurs propres pour  $h$ , endomorphisme d'un espace de dimension finie.

C'est impossible, il existe donc  $m \in \mathbf{N}$  tels que  $f^m(x) \neq 0$  et  $f^{m+1}(x) = 0$ .

**5.c)** Montrons par récurrence que pour  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$

(cela servira dans la question **7)**).

Pour  $k = 1$ , de  $[e, f] = h$ , on déduit  $e(f(x)) - f(e(x)) = h(x)$ , or  $e(x) = 0$  et  $h(x) = \alpha x$  donc  $e(f(x)) = \alpha x$ . L'hypothèse de récurrence au rang 1 est vraie.

Supposons l'hypothèse de récurrence vraie à un rang  $k \in \mathbf{N}^*$ :  $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$

En appliquant la relation  $ef - fe = h$  au vecteur  $f^k(x)$ , on obtient:

$$e(f^{k+1}(x)) = (k(\alpha + k - 1) + \alpha + 2k)f^k(x) = (k+1)(\alpha + k)f^k(x), \text{ hypothèse de récurrence au rang } k+1$$

On peut conclure d'après le principe de récurrence que  $\boxed{\text{pour } k \in \mathbf{N}^*, e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)}$

On en déduit que  $\boxed{\text{pour } k \in \mathbf{N}^*, e(f^k(x)) \text{ est colinéaire à } f^{k-1}(x)}$ .

**6.a)**  $F = \text{Vect}\{x, f(x), \dots, f^m(x)\}$ , on utilise les résultats de la question **5)**

$f^{m+1}(x) = 0$  donc  $F$  est stable par  $f$ .

$\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x) \in F$ , on en déduit que  $F$  est stable par  $h$ .

$e(x) = 0$  et  $\forall k \in \mathbf{N}^*$ ,  $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x) \in F$ , on en déduit que  $F$  est stable par  $e$ .

$F$  est donc stable par  $e, f$  et  $h$

On sait que  $F \neq \{0\}$  car  $x \neq 0$ , or  $E$  ne contient aucun sous-espace stable par  $\mathcal{L}_3$  autre que  $\{0\}$  et  $E$ . On a donc  $\boxed{F = E}$

**6.b)** En **a)**, on a montré que  $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x))$  est une famille génératrice de  $E$ .

Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de  $\mathcal{B}$ :  $a_0x + a_1f(x) + \dots + a_mf^m(x) = 0$ .

$f^m(x) \neq 0$  et  $f^{m+1}(x) = 0$ , donc si on applique  $f^m$  à l'expression précédente, il reste:  $a_0f^m(x) = 0$ . On en déduit que  $a_0 = 0$ .

On recommence en appliquant  $f^{m-1}$  puis  $f^{m-2}$  etc. et on en déduit  $a_1 = 0$  puis  $a_2 = 0$  etc.

La famille  $\mathcal{B}$  est donc libre.

Finalement:  $\boxed{\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x)) \text{ est une base de } E}$

**6.c)** On a vu que  $\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)$ , la matrice dans la base  $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x))$  est donc la matrice diagonale d'ordre  $m+1$  dont les éléments diagonaux sont:  $\alpha, \alpha + 2, \dots, \alpha + 2m$

**6.d)** De **c)**, on déduit:  $\text{Tr } h = (m+1)\alpha + 2 \sum_{k=0}^m k = (m+1)\alpha + m(m+1) = (m+1)(\alpha + m)$

De  $[e, f] = h$ , on déduit:  $\text{Tr } h = \text{Tr}(ef - fe) = \text{Tr}(ef) - \text{Tr}(fe) = 0$

On a donc  $\boxed{\alpha = -m}$

- 7) On a montré que pour  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$ , de plus  $e(x) = 0$ , on en déduit que la matrice de  $e$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ 1 \leq j \leq m+1}}$  avec  $a_{ij} = (i+1)(\alpha + i)$  si  $j = i+1$  et  $a_{ij} = 0$  sinon.

## II - PRELIMINAIRE A L'ETUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

- 1) Notons  $n = \dim E$ .

Si  $a \in \mathcal{L}(E)$  possède une unique valeur propre  $\lambda$ , alors son polynôme caractéristique est  $(\lambda - X)^n$ .

Du théorème de Cayley-Hamilton, on déduit alors que  $(\lambda \text{Id} - a)^n = 0$ .  $(a - \lambda \text{Id})$  est donc nilpotent

- 2) Supposons  $u$  nilpotent d'ordre  $p$  et  $v$  nilpotent d'ordre  $q$ .

Comme  $u$  et  $v$  commutent, on peut utiliser le binôme de Newton:  $(u - v)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} C_{p+q}^k u^k v^{p+q-k}$ .

$u^p = 0$  donc tous les termes d'indice  $k \geq p$  sont nuls.

$v^q = 0$  donc tous les termes d'indice  $k \leq p$  sont nuls.

On a donc  $(u - v)^{p+q} = 0$ .  $u - v$  est bien nilpotent.

- 3.a)  $(\text{Ker } u^n) = (\bigcup_{p=0}^n \text{Ker } u^p)$  est une suite croissante de sous-espace de  $E$ ,  $E$  est de dimension finie, cette suite

est donc stationnaire, constante à partir d'un certain rang  $p_0$ . On a donc  $\mathcal{N}_u = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p_0}$ .

De même,  $(\text{Im } u^n) = (\bigcap_{p=0}^n \text{Im } u^p)$  est une suite décroissante de sous-espace de  $E$ , constante à partir du même

rang  $p_0$  car  $\dim \text{Ker } u^n + \dim \text{Im } u^n = E$ . On a donc  $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im } u^p = \text{Im } u^{p_0}$ .

- 3.b) Soit  $x \in \mathcal{N}_u \cup \mathcal{G}_u$ .  $u^{p_0}(x) = 0$  et il existe  $y \in E$  tel que  $x = u^{p_0}(y)$ .

On a alors  $u^{2p_0}(y) = 0$ , donc  $y \in \text{Ker } u^{2p_0}$ . Comme  $\text{Ker } u^{2p_0} = \text{Ker } u^{p_0}$ , on a  $u^{p_0}(y) = 0$  et donc  $x = 0$  d'où  $\mathcal{N}_u \cap \mathcal{G}_u = \{0\}$ .

De plus  $\dim \mathcal{N}_u + \dim \mathcal{G}_u = \dim \text{Ker } u^{p_0} + \dim \text{Im } u^{p_0} = \dim E$ .

On en déduit que  $\mathcal{N}_u \oplus \mathcal{G}_u = E$ .

$u$  commute avec  $u^{p_0}$  donc  $\text{Ker } u^{p_0}$  et  $\text{Im } u^{p_0}$  sont stables par  $u$ :  $\mathcal{N}_u$  et  $\mathcal{G}_u$  sont stables par  $u$ .

La restriction de  $u$  à  $\mathcal{N}_u$  est nilpotente d'ordre  $p_0$ .

La restriction de  $u$  à  $\mathcal{G}_u$  est bijective car son noyau est réduit à  $\{0\}$  et que l'on est en dimension finie.

- 3.c) Soit  $n$  tel que la restriction de  $u$  à  $F$  soit nilpotente d'ordre  $n$ .

Soit  $x \in E$ . On le décompose suivant la somme directe  $F \oplus G = E$ :  $x = x_F + x_G$ . ( $u^n(x_F) = 0$  et  $u(x_G) \in G$ )

$\forall k \geq n$ ,  $u^k(x) = u^k(x_G) \in G$ , donc  $\forall k \geq n$ ,  $\text{Im } u^k \subset G$ .

D'autre part, la restriction de  $u$  à  $G$  est bijective donc  $\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $G \subset \text{Im } u^k$ .

On en déduit que:  $\forall k \geq n$ ,  $\text{Im } u^k = G$  et comme la suite  $(\text{Im } u^n) = (\bigcap_{p=0}^n \text{Im } u^p)$  est décroissante,

$$\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im } u^p = G.$$

$\forall x \in F$ ,  $u^n(x) = 0$  donc  $F \subset \text{Ker } u^n$ . On en déduit que  $F \subset \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker } u^p = \mathcal{N}_u$ .

Or  $\dim F = \dim E - \dim G$ ,  $\dim \mathcal{N}_u = \dim E - \dim \mathcal{G}_u$  et  $G = \mathcal{G}_u$ . On en déduit  $F = \mathcal{N}_u$ .

## III - ETUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

- 1.a)** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  associée au vecteur propre  $X$  et  $M$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont chaque colonne est égale à  $X$ . On voit que  $\phi_A(M) = MA = \lambda A$ .  $\lambda$  est donc une valeur propre de  $\phi_A$ .  
Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\phi_A$  associée à  $M$ :  $\phi_A(M) = \lambda M$ . Chaque colonne non nulle de  $M$  est alors un vecteur propre de  $A$ .  $\lambda$  est donc une valeur propre de  $A$ .

Les valeurs propres de l'endomorphisme  $\phi_a$  sont bien les valeurs propres de  $A$ .

- 1.b)**  $\psi_A(M) = MA$ , or  $MA = \lambda A \Leftrightarrow {}^t A^t M = \lambda^t M$

D'après la question précédente, les valeurs propres de l'endomorphisme  $\psi_a$  sont les valeurs propres de  $A$ .

- 2.a)**  $(A - \lambda I_n)^\alpha$  commute avec  $A$  donc  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$  est stable par  $A$ .

$({}^t A - \mu I_n)^\beta$  commute avec  ${}^t A$  donc  $\text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$  est stable par  ${}^t A$ .

Si  $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$  et  $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$ , alors  $AU \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$  et  ${}^t AV \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$ .

On en déduit que  $\theta_A(U^t V) = AU^t V - U^t V A = (AU)^t V - V^t ({}^t AV) \in \mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ .  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$  est donc stable par  $\theta_A$ .

- 2.b)** La restriction de  $\phi_A - \lambda \text{Id}$  à  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$  est un endomorphisme nilpotent, en effet, pour  $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$  et  $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$ ,  $(\phi_A - \lambda \text{Id})^\alpha(U^t V) = (A - \lambda I_n)^\alpha U^t V = 0$  car  $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ .

De même, la restriction de  $\psi_A - \mu \text{Id}$  à  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$  est un endomorphisme nilpotent, en effet, pour  $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$  et  $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$ ,  $(\psi_A - \mu \text{Id})^\beta(U^t V) = U^t V (A - \mu I_n)^\beta = U^t ({}^t (A - \mu I_n)^\beta V) = 0$  car  $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$ .

De plus  $\phi_A$  et  $\psi_A$  commutent car pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ,  $\phi_A(\psi_A(M)) = \psi_A(\phi_A(M)) = AMA$ ,  $\phi_A - \lambda \text{Id}$  et  $\psi_A - \mu \text{Id}$  commutent donc également.

De la question **II 2)**, on déduit que la restriction de  $(\phi_A - \psi_A) - (\lambda - \mu) \text{Id}$  à  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$  est un endomorphisme nilpotent.

De la question **II 1)**, on déduit ensuite que la restriction de  $\theta_A = \phi_A - \psi_A$  à  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$  possède  $\lambda - \mu$  comme unique valeur propre.

Donc: la restriction de  $\theta_A$  à  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$  possède  $\lambda - \mu$  comme unique valeur propre.

- 3.a)** On suppose que les familles  $\mathcal{F} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$  et  $\mathcal{G} = (V_1, V_2, \dots, V_q)$  sont libres et on note  $(b_{kj})_{1 \leq k \leq n}$  les coefficients de la matrice  $V_j$ .

Considérons une combinaison linéaire nulle de la famille  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ :  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \alpha_{ij} U_i^t V_j = 0$ .

En séparant les deux sommes,  $\sum_{i=1}^p U_i^t \left( \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} V_j \right) = 0$

On obtient une matrice carrée d'ordre  $n$  dont la  $k$ ième colonne est:  $\sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} b_{kj} \right) U_i = 0$

Comme la famille  $\mathcal{F} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$  est libre, on en déduit que les scalaires  $\sum_{j=1}^q \alpha_{ij} b_{kj}$  sont tous nuls, puis

que pour tout  $i$ :  $\sum_{j=1}^q \alpha_{ij} V_j = 0$  et comme  $\mathcal{G} = (V_1, V_2, \dots, V_q)$  est libre, tous les  $\alpha_{ij}$  sont nuls.

La famille  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$  est donc libre

- 3.b)** Soit  $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$  et  $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$ . De la décomposition de  $U$  dans la base  $\mathcal{B}_\lambda$  et de la décomposition de  $V$  dans la base  $\mathcal{B}_\mu^*$ , on déduit immédiatement un décomposition de  $U^t V$  dans  $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$ , or  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu} = \text{Vect} \{U^t V, \quad U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha; \quad V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta\}$ .

$\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$  est donc une famille génératrice de  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ .

De **a)** on déduit que  $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$  est une famille libre.

$\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$  est bien une base de  $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ .

- 3.c)** On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $A$  de multiplicités respectives:  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ .  
On utilise le théorème de décomposition des noyaux pour  $A$  et pour  ${}^t A$ :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}({}^t A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$$

On note  $(U_1, \dots, U_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{C})$  adaptée à la première somme directe et  $(V_1, \dots, V_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{C})$  adaptée à la seconde somme directe.

De **3.a**), on déduit que  $(U_i {}^t V_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une famille libre de  $n^2$  vecteurs de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , c'est donc une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

On fait ensuite une partition de cette base:  $(\mathcal{B}_{\lambda_i} \otimes \mathcal{B}_{\lambda_j}^*)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  ou bien avec les notations de l'énoncé :

$$\left( \mathcal{B}_{\lambda} \otimes \mathcal{B}_{\mu}^* \right)_{(\text{Spec } A)^2} \text{ d'où l'on déduit : } \boxed{\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) = \bigoplus_{(\text{Spec } A)^2} \mathcal{L}_{\lambda\mu}}$$

4) On a montré que  $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$  est stable par  $\theta_A$  et que la restriction de  $\theta_A$  à  $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$  possède  $\lambda - \mu$  comme unique valeur propre.

La restriction de  $\theta$  à  $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$  est donc bijective si  $\lambda \neq \mu$ , et nilpotente si  $\lambda = \mu$ .

$$\text{Notons } F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } A} \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \text{ et } G = \bigoplus_{\substack{(\lambda\mu) \in (\text{Spec } A)^2 \\ \lambda \neq \mu}} \mathcal{L}_{\lambda\mu}$$

On a évidemment  $E = F \oplus G$ , de plus la restriction de  $\theta_A$  à  $F$  est nilpotente et la restriction de  $\theta_A$  à  $G$  est bijective.

$$\text{De la question II 3.c), on déduit alors que } \boxed{\mathcal{N}_{\theta_A} = F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } A} \mathcal{L}_{\lambda\lambda}}$$

5.a) Soient  $p_1, \dots, p_n$  des entiers positifs ou nuls tels que  $\sum_{k=1}^n p_k = n$ .

$$\sum_{k=1}^n p_k^2 - n = \sum_{k=1}^n (p_k^2 - p_k) = \sum_{k=1}^n p_k(p_k - 1)$$

$p_k$  est un entier naturel, donc  $p_k(p_k - 1) \geq 0$  et  $\sum_{k=1}^n p_k^2 \geq n$ .

De plus  $\sum_{k=1}^n p_k^2 = n$  si et seulement si les  $p_k$  sont tous égaux à 0 ou 1, comme  $\sum_{k=1}^n p_k = n$ , le seul cas possible

pour avoir  $\sum_{k=1}^n p_k^2 = n$  est  $\forall k, p_k = 1$ .

$$\boxed{\sum_{k=1}^n p_k^2 \text{ est bien minimal lorsque } \forall k, p_k = 1.}$$

5.b) En reprenant les notations de la question 4):  $\dim \mathcal{N}_{\theta_A} = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2$ , et  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = n$ .

On se ramène à la question précédente en posant  $\alpha_i = 0$  pour  $r < i \leq n$ .

On voit alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $\dim \mathcal{N}_{\theta_A}$  soit minimale est:

$$\forall i \in [1, n], \alpha_i = 1$$

Autrement dit :  $\boxed{\dim \mathcal{N}_{\theta_A} \text{ est minimale si et seulement si } A \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$