ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1990

OPTIONS M, P' ET T.A.

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

, Les candidats sont autorisés à se servir de toutes tables ou instruments de calcul. Ils indiqueront, en tête de leur copie, le matériel utilisé.

Pour les calculs de valeurs approchées, on fournira toutes les justifications utiles pour l'obtention de la précision demandée.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

On étudie la fonction f, somme de la série entière (1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$$

dont la fonction dérivée s'exprime à l'aide de fonctions élémentaires.

La troisième et la quatrième questions proposent des méthodes de calcul approché de la solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $f''(x) = 0$, ce qui permet dans la cinquième question de trouver des valeurs approchées de l'ordonnée et de la pente de la tangente au point d'inflexion de la courbe représentative (C) de f.

La sixième question étudie une méthode de calcul approché de l'intégrale généralisée qui représente la limite de f en $+\infty$.

Les premières questions fournissent des résultats utiles dans la suite.

1°) Etude sommaire de la fonction f

a) Prouver que la série entière (1) converge pour tout nombre réel x et que la fonction f est impaire.

b) Déterminer la fonction dérivée f' et exprimer cette fonction à l'aide de fonctions élémentaires.
En déduire le sens de variation de f .

c) Prouver que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx$ est convergente.

Que peut-on en déduire relativement à la fonction f ?

2°) Calcul de valeurs de f

Pour tout nombre réel x strictement positif donné et pour tout entier n strictement positif, on pose

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} b_k x^{4k-1} \quad \text{avec } b_k = \frac{1}{k!(4k-1)} .$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

a) Définir, pour un nombre x donné, des valeurs de l'entier n pour lesquelles $|f(x) - s_n(x)| \leqslant b_{n+1} x^{4n+3}$.

b) Les nombres x et n étant donnés, écrire un algorithme, s'inspirant du schéma de Horner, aboutissant au calcul de $s_n(x)$.

c) Déterminer des valeurs approchées de f(1) et de f(3/2) à $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$ près.

3°) <u>Recherche d'un zéro de f". Première approximation</u>

a) Calculer f"(x) et montrer qu'il existe un nombre réel unique α appartenant à $]0, +\infty[$ tel que $f''(\alpha) = 0$.

Prouver que $1 < \alpha < \sqrt[4]{3/2}$.

Pour la suite, on pose $\beta = \alpha^4$ et on considère la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(u) = \ln(1 + 2u)$.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout entier n positif, par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
On pose $e_n = u_n - \beta$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et prouver qu'elle converge vers le nombre β .

c) Déterminer la limite de $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}$ en fonction de β .

d) Déterminer un nombre K vérifiant $0 < K < 1$ tel que, pour tout entier n, $e_n < K^n$.

En déduire un nombre N tel que u_n soit, pour $n > N$, une valeur approchée de β à la précision donnée 10^{-4} .

e) Définir un test indiquant, après le calcul de u_n, si la précision donnée est atteinte.

4°) <u>Deuxième approximation de β (Accélération de la convergence)</u>

Soient χ et D les fonctions définies sur l'intervalle $[\beta, +\infty[$ par

$$\chi(u) = u - \varphi(u)$$

$$D(u) = \varphi(\varphi(u)) - 2\varphi(u) + u = \varphi(\varphi(u)) - \varphi(u) + \chi(u) .$$

a) Prouver que, pour tout réel u de $[\beta, +\infty[$,

$$D(u) = \chi(u) \int_0^1 [1 - \varphi'(u - \chi(u)\, v)]\, dv .$$

En déduire la solution de l'équation $D(u) = 0$ et le signe de $D(u)$.

On définit à présent sur $[\beta, +\infty[$ la fonction ψ par

$$\begin{cases} \psi(u) = u - \dfrac{[\chi(u)]^2}{D(u)} & \text{si } u \neq \beta \\ \psi(\beta) = \beta & \end{cases}$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

et la suite (β_n) par son premier terme $\beta_0 = 1,5$ et, pour tout entier n, par la relation $\beta_{n+1} = \psi(\beta_n)$.

b) Prouver que ψ est de classe C^2 sur $[\beta, +\infty[$; calculer $\psi'(\beta)$ puis $\psi''(\beta)$ à l'aide de β .

c) Prouver que la suite (β_n) converge vers β .

d) On pose $\varepsilon_n = \beta_n - \beta$. Déterminer la limite de $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{(\varepsilon_n)^2}$.

Quelle conclusion en tirez-vous pour la comparaison des suites (u_n) et (β_n) ?

e) Déterminer à l'aide de cette suite (β_n) une valeur approchée de β, puis une valeur approchée de α à 10^{-4} près .

5°) Calcul approché de $f'(\alpha)$ et de $f(\alpha)$

a) Calculer une valeur approchée de $f'(\alpha)$ en utilisant la valeur approchée de α obtenue précédemment.

b) Déterminer un nombre réel positif M tel que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, on ait $|f'''(x)| \leqslant M$. (On pourra par exemple dériver $f''(x)$ mise sous la forme $\dfrac{1}{x^3}\, g(u)$ où $u = x^4$.)

c) En utilisant la valeur approchée de f(1) trouvée dans la question 2°)c), déterminer à l'aide de ce qui précède une valeur approchée de $f(\alpha)$ et indiquer la précision obtenue.

6°) Calcul approché de la limite de f(x) en $+\infty$

Soit a un nombre réel strictement positif.

a) Prouver l'existence de deux nombres réels γ_0 et γ_1 tels que

$$\frac{\gamma_0\, e^{-a^4}}{a^5} - \frac{\gamma_1\, e^{-a^4}}{a^9} < \int_a^{\infty} \frac{e^{-x^4}}{x^2}\, dx < \frac{\gamma_0\, e^{-a^4}}{a^5} .$$

En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_a^{\infty} f'(x)\, dx$.

b) En utilisant la valeur approchée de f(1,5) trouvée dans 2°)c), déduire de ce qui précède une valeur approchée de la limite ℓ de f en $+\infty$.

Indiquer la précision obtenue.

7°) Résumer les résultats obtenus en traçant la courbe (C) représentative de f .

FIN DU PROBLEME