

Question préliminaire

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ et $\sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$.

Raisonnons par récurrence.

On a pour tout $x \in]0, 1]$, $\lambda_1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_1} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_1 = 0$.

Soit $m \in [[1, n - 1]]$, supposons que pour tout $k \in [[1, m]]$, $\lambda_k = 0$ alors $\sum_{k=m+1}^n \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$

et donc pour tout $x \in]0, 1]$, $\lambda_{m+1} + \sum_{k=m+2}^n \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_{m+1}} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_{m+1} = 0$. Ainsi pour tout $k \in [[1, n]]$, $\lambda_k = 0$ puis la famille $(\phi_{\lambda_k})_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $C([0, 1])$.

Enfin la famille $(\phi_{\lambda})_{\lambda \geq 0}$ est une famille libre de $C([0, 1])$.

A. Déterminants de Cauchy.

2) On suppose $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k}$.

On multiplie la dernière colonne C_n par A_n et on lui ajoute la combinaison linéaire des autres colonnes $\sum_{i=1}^{n-1} A_i C_i$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 A_n D_n &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \dots & R(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On développe par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

3)

S'il existe $(k_1, k_2) \in [[1, n]]$ tel que $k_1 \neq k_2$ et $a_{k_1} = a_{k_2}$ ou $b_{k_1} = b_{k_2}$ alors $D_n = 0$, et alors

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$$

Supposons maintenant que les termes de la suite $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux à deux distincts ainsi pour la suite $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Par récurrence montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$.

Pour $n = 1$ on a $D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$.

Soit $n \geq 2$, supposons que $D_{n-1} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} (a_i + b_j)}$.

On a d'après la question précédente

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

On a $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k}$ donc $A_n = ((X + b_n)R(X))_{x=-b_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (-b_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (-b_n + b_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)}$

et $R(a_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k)}$ donc puisque $A_n \neq 0$

$$D_n = \frac{R(a_n) D_{n-1}}{A_n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$$

4) Soit

$d(x, A) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A, \|x - a\| < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \iff x$ est adhérent à A .

5) Supposons que $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E telle que $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$.

Soit $x \in E$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = d(x, A_n)$ et $\beta = d(x, A)$.

Puisque $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante et $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$, alors $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante minorée par β , donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel α , on a $\beta \leq \alpha$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $\beta \leq \|y - x\| < \beta + \varepsilon$

$y \in A$ donc il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_{n_o}$ et alors $\alpha_{n_o} \leq \|y - x\| < \beta + \varepsilon$.

donc $\alpha < \beta + \varepsilon$.

On fait tendre ε vers 0, on a $\alpha \leq \beta$.
 Enfin $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V de dimension finie de E , et on note $B = \{y \in E; \|y - x\| \leq \|x\|\}$.

6) On a la partie B est un fermé de E et $B \subset \bar{B}(0, 2\|x\|)$ donc B est bornée.
 Ainsi $B \cap V$ fermée bornée de V qui est de dimension finie, donc $B \cap V$ est compacte.
 Soit $x \in E$, on a $B \cap V \subset V$ donc $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$.
 Soit $y \in V$,
 si $y \in B$ alors $y \in B \cap V$ et donc $d(x, B \cap V) \leq d(x, y)$.
 si $y \notin B$ alors $\|y - x\| > \|x\| = \|x - 0\| \geq d(x, B \cap V)$ car $0 \in B \cap V$
 donc pour tout $y \in V$, $d(x, B \cap V) \leq d(x, y)$, donc $d(x, B \cap V) \leq d(x, V)$.
 Ainsi $d(x, B \cap V) = d(x, V)$.

7) On a l'application
$$\begin{array}{ccc} B \cap V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|y - x\| \end{array}$$
 est continue sur le compact $B \cap V$, donc bornée et atteint sa borne inférieure sur $B \cap V$, alors il existe $y \in B \cap V$ tel que $d(x, B \cap V) = \|x - y\|$.
 D'après la question **6)** $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ donc $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien.

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(. | .)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

8) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , et π la projection orthogonale sur V (elle existe car V est de dimension finie donc il admet un supplémentaire orthogonal)
 Soit $x \in E$, on a pour tout $v \in V$, $\|x - v\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x) - v\|^2$ car $x - \pi(x) \in V^\perp$ et $\pi(x) - v \in V$.
 donc pour tout $v \in V$ $\|x - \pi(x)\|^2 \leq \|x - v\|^2$ et alors $\|x - \pi(x)\| \leq d(x, V)$
 Comme $\pi(x) \in V$ alors $d(x, V) = \|x - \pi(x)\|$.
 Supposons qu'il existe $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$, alors $\|x - \pi(x)\| = \|x - y\|$
 On a $\|x - y\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|y - \pi(x)\|^2$ car $x - \pi(x) \in V^\perp$ et $y - \pi(x) \in V$.
 donc $\|y - \pi(x)\|^2 = 0$ et alors $y = \pi(x)$.
 D'où l'unicité.

9) Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et V un sous espace vectoriel de E de dimension n contenant $Vect(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de V et $M = Mat_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. la matrice du système de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B}_0 .

On a $M(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^t M.M$.

En effet, posons pour tout $j \in [[1, n]]$, $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, on a $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons ${}^t M.M = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = (x_i | x_j)$.

Donc $rg(M(x_1, x_2, \dots, x_n)) = rg({}^t M.M) = rg(M) = rg(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ainsi $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est liée.

10) On suppose que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Soit $x \in E$.

On a

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = \begin{vmatrix} & & & (x_1 | x) \\ & & & \vdots \\ M(x_1, x_2, \dots, x_n) & & & (x_n | x) \\ (x | x_1) & \cdots & (x | x_n) & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

Soit π le projecteur orthogonal sur V .

$\forall i \in [[1, n]]$, $(x_i | x) = (x_i | \pi(x)) + (x_i | x - \pi(x)) = (x_i | \pi(x))$ car $x - \pi(x) \in V^\perp$.

$$\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2.$$

donc

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) &= \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ M(x_1, x_2, \dots, x_n) & & & 0 \\ (\pi(x) | x_1) & \cdots & (\pi(x) | x_n) & \|x - \pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} & & & (x_1 | \pi(x)) \\ & & & \vdots \\ M(x_1, x_2, \dots, x_n) & & & (x_n | \pi(x)) \\ (\pi(x) | x_1) & \cdots & (\pi(x) | x_n) & \|\pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \|x - \pi(x)\|^2 G(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1, x_2, \dots, x_n, \pi(x)) \end{aligned}$$

On a d'après 9) $rg(M(x_1, x_2, \dots, x_n, \pi(x))) = rg(x_1, x_2, \dots, x_n, \pi(x))$

Donc $G(x_1, x_2, \dots, x_n, \pi(x)) = 0$ car $\pi(x) \in V = Vect(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ainsi

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = \|x - \pi(x)\|^2 G(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

D'autre part $d(x, V) = \|x - \pi(x)\|$ et $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ car la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre, donc

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

11) Soit $f \in C([0, 1])$, on a

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = N_\infty(f).$$

Soit A une partie de $C([0, 1])$ et $f \in \overline{A}^{-\infty}$ alors il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$.

Comme $0 \leq N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(f_n - f) = 0$ et donc $f \in \overline{A}^{-2}$.

Ainsi $\overline{A}^{-\infty} \subset \overline{A}^{-2}$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0, 1]); f(0) = 0\}$

12) ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ de $C([0, 1])$ définie par :

$$\forall n \geq 1, f_n(x) = \begin{cases} n \cdot x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in V_0$.

$$(N_2(f_n - \phi_0))^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - 1|^2 dx = \frac{1}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\phi_0 \in \overline{V_0}^{-2}$.

13) Soit $g \in C([0, 1])$ et f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc $f \in V_0$ et $g = f + g(0)\phi_0$.

On a $\phi_0 \in \overline{V_0}^{-2}$ donc il existe une suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de V_0 telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0.$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(g(0)\varphi_n - g(0)\phi_0) = |g(0)| \lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g_n = f + g(0)\varphi_n$, on a $g_n \in V_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_2(g_n - g) = 0$.

Donc $g \in \overline{V_0}^{-2}$ et alors V_0 est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 .

On a $\phi_0 \notin \overline{V_0}^{-\infty}$, en effet, sinon il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ de V_0 qui converge uniformément vers ϕ_0 .

En particulier $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers ϕ_0 sur $[0, 1]$ et donc $\phi_0(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$ ce qui est absurde.

Donc V_0 n'est pas dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .

14) Supposons que V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.

On a $V \subset \overline{V}$ donc $\overline{V} \neq \emptyset$.

Soient x et y deux éléments de \overline{V} et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y .

On a la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de V converge vers $x + \lambda y$.

Donc $x + \lambda y \in \overline{V}$ et alors \overline{V} est également un espace vectoriel.

15) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$.

On suppose que V est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \bar{V}^{-\infty} = C([0, 1])$.

Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \bar{V}^{-\infty}$ et soit $f \in C([0, 1])$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définie sur $[0, 1]$ telle que

$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \bar{V}^{-\infty}$ et $\bar{V}^{-\infty}$ est un espace vectoriel, on a $P \in \bar{V}^{-\infty}$ et alors f appartient à l'adhérence de $\bar{V}^{-\infty}$ pour la norme N_∞ qui est égal à $\bar{V}^{-\infty}$.

Ainsi V est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .

16) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$.

On suppose que V est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \bar{V}^{-2} = C([0, 1])$.

Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \bar{V}^{-2}$ et soit $f \in C([0, 1])$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définies sur $[0, 1]$ telle que

$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$

D'après la question 11) on alors

$$N_2(P - f) \leq \varepsilon$$

Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \bar{V}^{-2}$ et \bar{V}^{-2} est un espace vectoriel, on a $P \in \bar{V}^{-2}$ et alors f appartient à l'adhérence de \bar{V}^{-2} pour la norme N_2 qui est égal à \bar{V}^{-2} .

Ainsi V est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 .

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$. W est le sous espace vectoriel de $C([0, 1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

17) On a la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $C([0, 1])$ et $W = \bigcup_{n \geq 0} W_n$ donc d'après la question 5) pour tout entier $\mu \geq 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = d(\phi_\mu, W)$.

Supposons que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 et soit ϕ_μ telle que μ entier positif, on a d'après la question 4) $d(\phi_\mu, W) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ alors

$d(\phi_\mu, W) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ et donc d'après la question 4) pour tout entier entier

$\mu \geq 0$, $\phi_\mu \in \bar{W}^{-2}$ l'adhérence de W pour la norme N_2 et alors d'après la question 16) W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 .

18) On a d'après les questions 1) et 10)

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$, on a $(\phi_\alpha | \phi_\beta) = \int_0^1 x^\alpha \cdot x^\beta dx = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$

Posons $\forall k \in [[0, n]] \quad \beta_k = \lambda_k + 1$ et $\beta = \mu + 1$.

On a $\forall k \in [[0, n]] \quad \lambda_k + \beta_k \neq 0$ et $\mu + \beta \neq 0$.

On a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_0 + \beta_0} & \frac{1}{\lambda_0 + \beta_1} & \dots & \frac{1}{\lambda_0 + \beta_n} & \frac{1}{\lambda_0 + \beta} \\ \frac{1}{\lambda_1 + \beta_0} & \frac{1}{\lambda_1 + \beta_1} & & \frac{1}{\lambda_1 + \beta_n} & \frac{1}{\lambda_1 + \beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n + \beta_0} & \frac{1}{\lambda_n + \beta_1} & & \frac{1}{\lambda_n + \beta_n} & \frac{1}{\lambda_n + \beta} \\ \frac{1}{\mu + \beta_0} & \frac{1}{\mu + \beta_1} & & \frac{1}{\mu + \beta_n} & \frac{1}{\mu + \beta} \end{vmatrix}$$

D'après la partie **A)** on a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} (\lambda_i + \beta_j)} \times \frac{\prod_{0 \leq i \leq n} (\mu - \lambda_i)(\beta - \beta_i)}{(\mu + \beta) \prod_{0 \leq i \leq n} (\mu + \beta_i) \prod_{0 \leq i \leq n} (\lambda_i + \beta)}$$

De même on a

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \dots, \phi_{\lambda_n}) = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} (\lambda_i + \beta_j)}$$

donc

$$\begin{aligned} d(\phi_\mu, W_n)^2 &= \frac{\prod_{0 \leq k \leq n} (\mu - \lambda_k)(\beta - \beta_k)}{(\mu + \beta) \prod_{0 \leq k \leq n} (\mu + \beta_k) \prod_{0 \leq i \leq n} (\lambda_k + \beta)} \\ &= \frac{\prod_{0 \leq k \leq n} (\mu - \lambda_k)^2}{(2\mu + 1) \prod_{0 \leq k \leq n} (\lambda_k + \mu + 1) \prod_{0 \leq i \leq n} (\lambda_k + \mu + 1)} \end{aligned}$$

et par suite

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

19) Soit $\mu \geq 0$. Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

alors il est clair que la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.

Réciproquement, supposons que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1

Soit $\mu > 0$.

Considérons la fonction $h(x) = \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$ pour tout $x \in [0, \mu]$.

On a h est dérivable sur $[0, \mu]$ et pour tout $x \in [0, \mu]$ $h'(x) = -\frac{1+2x}{(x+\mu+1)^2} \leq 0$.

Donc $\forall x \in [0, \mu], 0 \leq h(x) \leq \frac{\mu}{\mu+1} = h(0)$.

Soit $\alpha = \frac{2\mu+1}{2(\mu+1)}$, on a $\alpha \in \left] \frac{\mu}{\mu+1}, 1 \right[$.

La suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$ on ait

$$h(\lambda_k) = \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} > \frac{2\mu+1}{2(\mu+1)} .$$

donc $\forall k \geq k_0, \lambda_k > \mu$.

Ainsi la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

20) D'après la question 17) l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.

Donc il suffit de montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0 \iff$ la série

$\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

On a la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels > 0 deux à deux distincts.

Supposons pour tout entier $\mu \geq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ alors en particulier pour $\mu = 0$

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 1} = 0$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda_k} \right) = +\infty$.

D'autre part on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ln(1+x) \leq x$.

Donc $\sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda_k} \right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k}$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$.

Ainsi la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

Réciproquement supposons la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente et soit μ un entier positif .

La suite $(d(\phi_\mu, W_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, donc converge , soit $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n)$.

On a $\alpha = 0$.

Car sinon $\alpha > 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(\phi_\mu, W_n)}{d(\phi_\mu, W_{n-1})} = 1.$$

D'après la question 19) on a la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0, \lambda_k > \mu$.

Posons $\forall k \geq 0, u_k = \ln \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_k} \right) - \ln \left(1 + \frac{\mu+1}{\lambda_k} \right)$.

On a $u_k = -\frac{2\mu+1}{\lambda_k} + o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \right)$ donc $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2\mu+1}{\lambda_k}$.

Comme la série $\sum_k -\frac{2\mu+1}{\lambda_k}$ diverge et à termes de signe constant, alors la série $\sum_k u_k$ diverge et vaut $-\infty$.

D'autre part, en posant $A = \sum_{k=0}^{k_0-1} \ln\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ on a

$$\ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\frac{1}{2} \ln(2\mu + 1) + A + \sum_{k=k_0}^n u_k.$$

et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\infty$, donc $\alpha = 0$ ce qui est absurde.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞ .

21) Supposons que W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ alors d'après la question 11) W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 et donc d'après la question

20) on a la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n . On suppose que $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, et soit $\mu \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} N_\infty(\phi_\mu - \psi) &= \sup_{x \in [0,1]} \left| x^\mu - \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^{\lambda_k} \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \mu \int_0^x t^{\mu-1} dt - \sum_{k=0}^n a_k \cdot \lambda_k \int_0^x t^{\lambda_k-1} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \cdot \lambda_k t^{\lambda_k-1} \right| dt \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz on a

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq \left(\int_0^1 \left| \mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \cdot \lambda_k t^{\lambda_k-1} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = N_2 \left(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \cdot \lambda_k \phi_{\lambda_k-1} \right)$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) : & \lambda_0 = 0 \\ (ii) : & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

et que la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

On pose $\forall k \geq 1, \lambda'_k = \lambda_k - 1$, on a $(\lambda'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts.

On a $\forall k \geq 1 \quad \frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda'_k}$ donc la série $\sum_k \frac{1}{\lambda'_k}$ est divergente.

Posons W' le sous espace vectoriel de $C([0, 1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda'_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$, on a d'après la question 20) W' est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 .

Soit μ un entier ≥ 1 , on a $\mu \cdot \phi_{\mu-1} \in C([0, 1])$ et soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in W'$ tel que $N_2(\mu \cdot \phi_{\mu-1} - g) \leq \varepsilon$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ de réels tels que $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_{\lambda'_k}$.

On a d'après la question 22) $N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2 \left(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_{\lambda'_k} \right) \leq \varepsilon$ où $\psi = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k}$.

Il est clair que $\psi \in W_n \subset W$.

Ainsi pour tout entier $\mu \geq 1$ on a $\phi_\mu \in \bar{W}^{-\infty}$.

On a $\lambda_0 = 0$, donc $\phi_0 \in W \subset \bar{W}^{-\infty}$.

D'après la question 16) W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .

24) Si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii') : \inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0$$

Posons $\alpha = \inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0$ alors pour tout $k \geq 1$, on a $\lambda_k \geq \alpha$ et alors $\frac{\lambda_k}{\alpha} \geq 1$, $\frac{\lambda_0}{\alpha} = 0$ et la série $\sum_k \frac{\alpha}{\lambda_k}$ diverge

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = \frac{\lambda_k}{\alpha}$ et $V = Vect(\phi_{\beta_k})_{k \in \mathbb{N}}$, on a d'après la question 23), V est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .

Soit $f \in C([0, 1])$ et $\varepsilon > 0$, on a la fonction $g : x \mapsto f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ est un élément de $C([0, 1])$, donc il existe $h \in V$ tel que

$$N_\infty(h - g) \leq \varepsilon$$

$h \in V$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(a'_k)_{0 \leq k \leq n}$ de réels tels que $h = \sum_{k=0}^n a'_k \phi_{\beta_k}$.

On a en faisant le changement de variable $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$

$$N_\infty(h - g) = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{k=0}^n a'_k x^{\beta_k} - f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| = \sup_{y \in [0, 1]} \left| \sum_{k=0}^n a'_k y^{\lambda_k} - f(y) \right| = N_\infty(P - f)$$

Où $P = \sum_{k=0}^n a'_k \phi_{\lambda_k} \in W$

donc

$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$

Ainsi W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .