

Présentation du problème

Étant donnée une suite $(S_0, S_1, \dots, S_{2n-1})$ de $2n$ nombres complexes (avec $n \geq 1$), on appelle $E_n(S_0, S_1, \dots, S_{2n-1})$ ou plus simplement E_n le système des $2n$ équations :

$$\sum_{j=1}^n A_j a_j^k = S_k \quad (\text{pour } k = 0, 1, \dots, 2n - 1)$$

dont les inconnues sont les $2n$ nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n, A_1, A_2, \dots, A_n$; voici explicitement les premières et la dernière équation de ce système E_n :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \dots + A_n = S_0 \\ A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n = S_1 \\ A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + \dots + A_n a_n^2 = S_2 \\ \dots \\ A_1 a_1^{2n-1} + A_2 a_2^{2n-1} + \dots + A_n a_n^{2n-1} = S_{2n-1} \end{cases}$$

Une solution $(a_1, \dots, a_n, A_1, \dots, A_n)$ est dite dégénérée si l'un au moins des nombres A_1 ou A_2 ou A_n est nul, ou si deux au moins parmi les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont égaux ; dans le cas contraire elle est dite non dégénérée. Au système E_n on associe la matrice carrée

d'ordre n

$$C_n = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} \end{bmatrix}$$

et le déterminant D_n de C_n est appelé le déterminant de E_n ; en cas de nécessité, on pourra préciser $D_n(S_0, S_1, \dots, S_{2n-2})$.

A) Préliminaires

A1) On suppose que $(a_1, \dots, a_n, A_1, \dots, A_n)$ est une solution de E_n ; calculez D_n en fonction de $a_1, \dots, a_n, A_1, \dots, A_n$. On vous suggère de décomposer C_n en un produit de deux matrices, celle de gauche étant :

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Vous pouvez considérer comme bien connu, ou sinon admettre sans démonstration, le fait que le déterminant de cette matrice V_n est le produit de toutes les différences $(a_j - a_h)$ avec $j > h$.

A2) Déduisez-en que si E_n admet des solutions, ou bien elles sont toutes dégénérées, ou bien aucune n'est dégénérée.

Voici maintenant quelques précisions sur le langage utilisé dans la suite, et sur les objectifs des parties suivantes. Si vous connaissez une solution non dégénérée de E_n , vous en déduisez $n!$ solutions en effectuant des permutations à la fois sur les nombres a_j et les nombres A_j associés ; vous compterez ces $n!$ solutions comme une seule solution à permutation près. Quand on vous demande le calcul d'une solution de E_n , vous répondrez par une suite de $2n$ nombres, d'abord les n nombres a_j , puis les n nombres A_j dans l'ordre correspondant.

Si $D_n \neq 0$, le système E_n est dit non dégénéré ; sauf dans la dernière partie F, nous n'étudierons que des systèmes non dégénérés.

La suite se compose de trois études indépendantes ; la partie B présente une première méthode de résolution, seulement développée dans le cas où $n = 2$, pour limiter les calculs ; les parties C, D et E présentent une deuxième méthode de résolution, traitée de façon plus approfondie. Enfin, on propose une rapide étude des systèmes dégénérés dans la partie F.

B) Cas où $n = 2$

Nous allons étudier, lorsque $n = 2$, une méthode de résolution qui pourrait certes fonctionner pour tout entier n supérieur, mais au prix de calculs laborieux ; c'est pourquoi nous étudierons plus tard une méthode de résolution plus performante, mais aussi plus sophistiquée.

Au système E_2 (S_0, S_1, S_2, S_3) supposé non dégénéré, on associe le polynôme $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$ donné par le déterminant que voici :

$$P(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$$

Notez que $p_2 = D_2(S_0, S_1, S_2) \neq 0$.

B1) Démontrez les égalités $p_0 S_0 + p_1 S_1 + p_2 S_2 = 0$,

$$p_0 S_1 + p_1 S_2 + p_2 S_3 = 0.$$

B2) Calculez les polynômes $P(x)$ associés aux systèmes $E_2(2, 1, 1, 1)$ et $E_2(1, 1, 0, 0)$.

B3) Vérifiez que toute solution (a_1, a_2, A_1, A_2) de E_2 est aussi solution du système d'équations

$$E_2 \begin{cases} P(a_1) = P(a_2) = 0 \\ A_1 + A_2 = S_0 \\ A_1 a_1 + A_2 a_2 = S_1. \end{cases}$$

B4) Expliquez comment trouver les solutions (a_1, a_2, A_1, A_2) de E_2 telles que $a_1 \neq a_2$, et indiquez selon les cas, le nombre de ces solutions. On ne vous demande ici ni le calcul explicite de ces solutions, ni le calcul d'aucune quantité qui interviendrait dans la discussion de leur nombre.

B5) Démontrez réciproquement que toute solution (a_1, a_2, A_1, A_2) de E_2 est une solution de E_2 . On vous suggère de poser $S_k = A_1 a_1^k + A_2 a_2^k$ et de démontrer les égalités :

$$p_0 S_k + p_1 S_{k+1} + p_2 S_{k+2} = 0.$$

B6) Trouvez explicitement les solutions de $E_2(2, 1, 1, 1)$ et celles de $E_2(1, 1, 0, 0)$.

C) Un détour par les fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles considérées ici sont des quotients de polynômes N et M à coefficients complexes en une indéterminée x ; le degré d'un polynôme N sera noté $d^\circ N$. Pour tout n entier ≥ 0 , on appelle F_n l'ensemble des fonctions rationnelles f qui peuvent s'écrire comme quotient N/M de deux polynômes N et M tels que $d^\circ N < n$, $d^\circ M \leq n$ et $M(0) \neq 0$; pour $n = 0$ il faut comprendre que F_0 est réduit au seul élément 0 . Si $n \geq 1$, un élément de F_n est dit non dégénéré si il n'est pas dans F_{n-1} , ce qui signifie que les deux polynômes précédents N et M doivent être premiers entre eux, et que, ou bien $d^\circ N = n-1$, ou bien $d^\circ M = n$, ces deux éventualités ne s'excluant pas.

C1) Expliquez pourquoi l'hypothèse $M(0) \neq 0$, relative aux dénominateurs des fonctions rationnelles dans F_n , entraîne que tout élément f de F_n possède un développement en série entière au point 0 ; on ne vous demande pas de calculer cette série entière, mais de rappeler les quelques propriétés des fonctions rationnelles et des séries entières qui justifient l'existence de ce développement. On vous demande aussi son rayon de convergence ; justifiez votre réponse.

C2) Pour tout f dans F_n , on appelle développement tronqué à l'ordre k de f au point 0 , la somme des termes d'ordre inférieur ou égal à k dans son développement en série entière au point 0 . Ecrivons $f = N/M$, avec $M(0) \neq 0$, comme ci-dessus, et considérons un polynôme Q de degré $\leq k$; démontrez que Q est le développement tronqué à l'ordre k de f au point 0 , si et seulement si le polynôme $N - MQ$ est divisible par x^{k+1} .

C3) Démontrez que deux éléments de F_n sont égaux si ils ont même développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 .

C4) On se donne n nombres distincts a_1, a_2, \dots, a_n et n nombres non nuls A_1, A_2, \dots, A_n et l'on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{1 - a_j x}.$$

Démontrez que φ est un élément non dégénéré de F_n . Quel est son développement en série entière au point 0 ?

On dira qu'un élément de F_n est de type normal si il est égal à une telle fonction φ pour un choix convenable des a_j et des A_j .

C5) On suppose qu'un élément non dégénéré f de F_n a été écrit comme quotient N/M de deux polynômes premiers entre eux ; quelles conditions doivent satisfaire N et M pour que f soit de type normal ? Par exemple, la fonction rationnelle $x^2/(1-x^2)$ est-elle de type normal dans F_3 ?

C6) On suppose le système $E_n(S_0, S_1, \dots, S_{2n-1})$ non dégénéré. Expliquez comment résoudre E_n si l'on connaît un élément f de F_n dont le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 est $S_0 + S_1x + \dots + S_{2n-1}x^{2n-1}$.

D) Recherche d'une fonction rationnelle connaissant un développement tronqué

On suppose toujours le système $E_n(S_0, S_1, \dots, S_{2n-1})$ non dégénéré et l'on pose :

$$Q(x) = S_0 + S_1x + \dots + S_{2n-1}x^{2n-1} ;$$

on cherche l'éventuel élément de F_n dont le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 est Q . Tout élément f de F_n peut s'écrire comme quotient de deux polynômes N et M tels que ceux-ci :

$$N(x) = v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots + v_{n-1}x^{n-1} ,$$

$$M(x) = 1 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n ;$$

et si f est non dégénéré, ces polynômes N et M sont uniques.

D1) Démontrez qu'il existe un unique polynôme $M(x) = 1 + \sum_{j=1}^n u_j x^j$ tel que le produit MQ

ne contienne aucun monôme de degré compris entre n et $(2n-1)$ inclus, c'est-à-dire, tel que MQ

soit de la forme $\sum_{j=0}^{n-1} v_j x^j + \sum_{j=2n}^{3n-1} w_j x^j$.

D2) Existe-t-il dans F_n un élément f dont le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 est Q ? Si oui, comment peut-on le calculer ? Est-il non dégénéré ?

D3) Utilisez C6 et D2 pour trouver les solutions de E_3 $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$.

E) Systèmes non dégénérés sans solution

Après le lemme préliminaire dont la démonstration est demandée dans E1, on se contentera d'étudier dans E2 et E3 des cas où $n=3$.

E1) Soit a un nombre non nul, et soit p un entier ≥ 1 ; démontrez que toute fonction rationnelle $\frac{N(x)}{(1-ax)^p}$, où N est un polynôme de degré $< p$, peut s'écrire :

$$\frac{A_1}{1-ax} + \frac{A_2x}{(1-ax)^2} + \frac{A_3x^2}{(1-ax)^3} + \dots + \frac{A_px^{p-1}}{(1-ax)^p}$$

avec des nombres A_1, A_2, \dots, A_p convenablement choisis.

E2) Soit f un élément non dégénéré de F_3 qui n'est pas du type normal défini dans C4 ; démontrez que f est égal à une fonction de l'un des deux types suivants :

$$\psi(x) = \frac{A_1}{1-a_1x} + \frac{A_2}{1-a_2x} + \frac{A_3x}{(1-a_2x)^2} \quad (\text{avec } A_1 \neq 0, A_3 \neq 0, \text{ et } a_1 \neq a_2)$$

ou

$$\chi(x) = \frac{A_1}{1-a_1x} + \frac{A_2x}{(1-a_1x)^2} + \frac{A_3x^2}{(1-a_1x)^3} \quad (\text{avec } A_3 \neq 0).$$

De quel type sont respectivement x^2 et $x^2/(1-x)$, qui sont deux éléments non dégénérés de F_3 ?

E3) Trouvez les développements en série entière au point 0 des fonctions ψ et χ écrites ci-dessus. Déduisez-en une description des systèmes non dégénérés E_3 (S_0, S_1, \dots, S_5) qui n'ont pas de solution ; vous devez aboutir à un énoncé du type suivant : pour que ce système soit non dégénéré et sans solution, il faut et il suffit que S_0, S_1, \dots, S_5 s'expriment au moyen de 4 ou 5 paramètres que vous préciserez, selon des formules que vous préciserez.

F) Systèmes dégénérés

Soit $(a_1, \dots, a_n, A_1, \dots, A_n)$ une solution de E_n ; pour tout $h = 1, 2, \dots, n$, on note A'_h la somme des A_j correspondant aux indices j tels que $a_j = a_h$: par définition le rang r de cette solution est le cardinal de l'ensemble formé par les a_h tels que $A'_h \neq 0$; il faut comprendre que chaque élément a_h de cet ensemble compte pour une unité, même si dans la suite (a_1, \dots, a_n) il apparaît plusieurs fois. Ce rang vaut n si et seulement si la solution est non dégénérée ; il vaut 0 si et seulement si tous les A'_h sont nuls.

F1) Soit r un entier tel que $0 < r < n$; démontrez que E_n possède une solution dégénérée de rang r si et seulement si le système $E'_{n,r}$ formé par les $2n$ équations

$$\sum_{j=1}^r A_j a_j^k = S_k \quad (\text{pour } k = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

possède une solution $(a_1, \dots, a_r, A_1, \dots, A_r)$ non dégénérée, c'est-à-dire telle que les A_1, \dots, A_r soient non nuls et les a_1, \dots, a_r distincts.

F2) On suppose que E_n possède une solution de rang r (ici $0 \leq r \leq n$) ; que pouvez-vous dire de $D_r = D_r(S_0, S_1, \dots, S_{2r-2})$ (lorsque $r > 0$), et des déterminants $D_{r+1}, D_{r+2}, \dots, D_n$ (lorsque $r < n$) ? Que pouvez-vous dire du rang des autres solutions de E_n ?

F3) Utilisez les résultats de F1 et F2 pour discuter selon les valeurs de S_4 et S_5 l'existence et le rang des solutions de $E_3(1, 0, 0, 0, S_4, S_5)$.

Fin de l'énoncé.