

e3a PSI A un corrigé.

Questions d'application du cours.

Aucune justification n'était demandée. Je donne cependant des contre-exemples dans le cas d'une réponse fautive et des bribes de preuve dans le cas contraire.

- Q.1.** Une suite géométrique non nulle a pour terme général $u_n = \lambda q^n$ avec $q, \lambda \in \mathbb{R}$ et λ non nul (q peut, lui, être nul et la suite est alors nulle à partir du rang 1, son terme d'indice 0 valant λ). Une telle suite est dans $\mathcal{E}_{a,b}$ si et seulement si (en divisant par $\lambda \neq 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, q^n(q^2 - aq - b) = 0$$

Si ceci a lieu alors $q^2 - aq - b = 0$ (prendre $n = 0$). Réciproquement, cette dernière condition donne $u \in \mathcal{E}_{a,b}$. La condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \mathcal{E}_{a,b}$ est donc $q^2 = aq + b$.

- a. **FAUX.** $a = b = -1$ donne un contre-exemple car aucun réel n'est racine de $X^2 + X + 1$.
 - b. **VRAI.** $X^2 + 3X - 4 = (X + 4)(X - 1)$ et $((-4)^n)$ et (1) sont deux suites géométriques indépendantes de $\mathcal{E}_{-3,4}$.
 - c. **FAUX.** $\mathcal{E}_{0,1}$ contient les deux suites géométriques indépendantes (1) et $((-1)^n)$.
 - d. **FAUX.** $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ et les seules suites géométriques de $\mathcal{E}_{2,-1}$ sont les $(\lambda 1^n)$ c'est à dire les suites constantes (qui forment un espace vectoriel de dimension 1).
 - e. **VRAI.** Si $\mathcal{E}_{a,b}$ contient deux suites géométriques indépendantes, leurs raisons sont différentes (pour l'indépendance) et sont racines de $X^2 - aX - b$ (pour l'appartenance). Ce polynôme DOIT donc avoir deux racines réelles distinctes et on DOIT avoir $a^2 + 4b > 0$. A fortiori, il FAUT que $a^2 + 4b \geq 0$.
- Q.2.** Le cours indique que $\mathcal{E}_{a,b}$ est un espace vectoriel de dimension 2 et donne une méthode pratique pour en déterminer une base. Ce sont les points abordés ici.
- a. **FAUX.** f est bien linéaire. Elle est injective (si $u_0 = u_1 = 0$ alors tous les u_n sont nuls, par récurrence). Elle est surjective car à partir d'un couple (α, β) on peut construire (par récurrence) une suite $u \in \mathcal{E}_{a,b}$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. On peut ainsi dire que f est un ISOMORPHISME et que $\mathcal{E}_{a,b}$ est de dimension 2.
 - b. **VRAI.** g est toujours linéaire. Supposons $a \neq 0$ et soit $u \in \mathcal{E}_{a,b}$ telle que $g(u) = (0, 0)$. On a alors $au_1 = u_2 - bu_0 = 0$ et donc $(a \neq 0) u_1 = 0$. f étant injective, on en déduit que $u = 0$. g est alors injective et, par argument de dimension, est un isomorphisme.
 - c. **FAUX.** On a vu que $\mathcal{E}_{a,b}$ est TOUJOURS de dimension 2.
 - d. Soit $j = e^{2i\pi/3}$. La suite complexe (j^n) vérifie la relation de récurrence pour $a = b = -1$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient que $(\cos(2n\pi/3))$ et $(\sin(2n\pi/3))$ vérifient aussi la relation. Comme ce sont des suites réelles, elles sont dans $\mathcal{E}_{-1,-1}$. Leurs images par f sont $(1, -1/2)$ et $(0, \sqrt{3}/2)$. Ces images étant indépendantes, les suites le sont. Par dimension/cardinal elles forment une base de $\mathcal{E}_{-1,-1}$.
- Q.3.** Pour étudier la série entière, on peut utiliser la définition (avec le Lemme d'Abel) ou la règle de D'Alembert. Dans le premier cas, on remarque (formule de Stirling) que $a_n \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$; ainsi, $(a_n x^n)$ est bornée si $|xe| < 1$ et non bornée si $|xe| > 1$ et le rayon de convergence vaut $R = 1/e$. Avec la seconde méthode, on remarque que les a_k sont non nuls et que pour $x \neq 0$, $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e|x|$; si $|xe| < 1$, $\sum (a_n x^n)$ converge absolument et si $|xe| > 1$, la même série diverge grossièrement ce qui redonne $R = 1/e$.
- a. **FAUX.** Le rapport tend vers e .

b. **FAUX.** C'est la déduction qui est erronée.

c. **VRAI.** $e > 2$ et donc $R = 1/e < 1/2$. Sans calculer le rayon de convergence, il suffirait de montrer que $(a_n/2^n)$ est non bornée pour conclure.

Q.4.

a. **FAUX.** $b_n = \frac{1}{n!}$ vérifie $|b_n| \leq \frac{1}{n}$ pour tout n mais le rayon de convergence de la série entière associée est infini et donc strictement plus grand que 1. On a effectivement $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ et donc $(a_n x^n)$ est bornée si $|x| \leq 1$. On peut en déduire que $r \geq 1$.

b. **VRAI.** On vient de le justifier.

c. **Vrai.** $(\sin(n)x^{n-1})$ est bornée si $|x| < 1$ et non bornée si $|x| > 1$ (car $(\sin(n))$ n'est pas de limite nulle, ce que l'on pourrait prouver par l'absurde) et $\sum (\sin(n)x^{n-1})$ a donc un rayon de convergence qui vaut 1. $\sum (a_n x^n)$ étant la série entière primitive, elle a le même rayon de convergence $r = 1$.

d. **VRAI.** 1 est bien supérieur à $1/2$. Il nous suffit de remarquer que $(a_n/2^n)$ est bornée pour conclure que $r \geq 1/2$.

e. **FAUX.** L'égalité est fausse en $x = 0$ car $\arctan(-\cos(1)/\sin(1)) \neq 0$.

f. **FAUX.** Pour $|x| < 1$, on a $\sum_{n \geq 1} \sin(n)x^{n-1}$ qui est la partie imaginaire de $\sum_{n \geq 1} e^{in}x^{n-1}$ qui vaut (somme de série géométrique de raison xe^i) $\frac{e^i}{1-xe^i}$. On a donc $\sum_{n \geq 1} \sin(n)x^{n-1} = \frac{\sin(1)}{x^2 - 2x \cos(1) + 1}$. Par ailleurs, $-\ln(|1-xe^i|) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2-2x \cos(1))$ se dérive en $-\frac{x-\cos(1)}{1-2x \cos(1)+x^2}$. Ce terme n'étant pas égal à $\frac{\sin(1)}{x^2-2x \cos(1)+1}$ (par exemple en 0), l'égalité proposée est fausse (si elle avait lieu, les dérivées devraient être égales).

g. **FAUX.** Sauf erreur de calcul de ma part, on conclut de manière similaire. La fonction proposée ressemble plus à la somme de la série entière de terme général $\frac{\cos(n)}{n}$ (fais-je une erreur?).

Problème.

Partie A.

1.1 Comme $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, on a immédiatement $\lambda_{n+2} = -\lambda_n$ et $\mu_{n+2} = -\mu_n$ pour tout n . Ainsi, $\lambda, \mu \in \mathcal{S}_0$.

1.2 On en déduit que pour tout n , $\lambda_{n+4} = \lambda_n$ et $\mu_{n+4} = \mu_n$. λ et μ sont donc périodiques de période 4.

2. $\mathcal{S}_0$ est non vide (il contient la suite nulle) et stable par combinaisons linéaires. Comme c'est un sous-ensemble de E , c'est donc un sous-espace vectoriel de E .

3. Les éléments de $\mathcal{S}_0$ sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. Les solutions de cette dernière étant $e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$, le cours indique que (λ, μ) est une base de $\mathcal{S}_0$ et que cet espace est de dimension 2.

4.1 Soit $u \in \mathcal{S}_0$. u est combinaison linéaire de λ et μ . En regardant les termes d'indice 0 et 1, on trouve les coefficients de la combinaison et on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + u_1 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

u étant non nulle u_0 ou u_1 est non nul. Or, $u_{4n} = u_0$, $u_{4n+1} = u_1$, $u_{4n+2} = -u_0$ et $u_{4n+3} = -u_1$. On trouve donc deux extraites qui convergent vers des limites différentes. La suite u ne converge donc pas.

4.2 La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente (le terme général n'est pas de limite nulle).

4.3 u est bornée et donc $\forall x \in [-1, 1]$, $(u_n x^n)$ est bornée. Par ailleurs si $x > 1$, l'une des extraites de $(|u_n x^n|)$ est de limite infinie $((|u_{4n} x^{4n}|)$ ou $(|u_{4n+1} x^{4n+1}|)$ selon que $u_0 \neq 0$ ou $u_1 \neq 0$) et $(u_n x^n)$ n'est donc pas bornée. f est donc la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1. Comme $f(1)$ et $f(-1)$ n'existent pas (divergence grossière de série), le domaine de définition de f est $] -1, 1[$.

On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -1, 1[, \sum_{k=0}^{4n+3} u_k x^k = u_0 \left(\sum_{p=0}^n x^{4p} - \sum_{p=0}^n x^{4p+2} \right) + u_1 \left(\sum_{p=0}^n x^{4p+1} - \sum_{p=0}^n x^{4p+3} \right)$$

On sait calculer les sommes (géométriques de raison x^4) et un passage à la limite donne

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \frac{(1-x^2)(u_0+u_1x)}{1-x^4} = \frac{u_0+u_1x}{1+x^2}$$

Partie B.

- 1.1** Supposons, par l'absurde, que $u \in \mathcal{S}$ et notons a le réel associé. On a $2a = u_2 + u_0 = 2$ et $2a = u_1 + u_3 = -2$ ce qui amène une contradiction. Ainsi $u \notin \mathcal{S}$.
- 1.2** On a ici $u_{4n} = u_{4n+1} = 1$ et $u_{4n+2} = u_{4n+3} = -1$ pour tout n . On en déduit que $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout n (par exemple en distinguant suivant la congruence modulo 4 de n). On a donc $u \in \mathcal{S}$ et la constante correspondante est nulle.
- 1.3** On a ici $u_n = u_{n+2} = 10$ pour tout n . On a donc $u \in \mathcal{S}$ et la constante correspondante est 5.
- 2.** Le même calcul montre que toute suite constante est dans $\mathcal{S}$ avec une constante égale à u_0 .
- 3.** Soit u une suite géométrique. Il existe des réels q et λ tels que $\forall n, u_n = \lambda q^n$.
- Si $u \in \mathcal{S}$ alors $u_0 + u_2 = u_1 + u_3$ et donc $\lambda(1 + q^2) = \lambda q(1 + q^2)$. On en déduit que $\lambda = 0$ ou $q = 1$. Dans les deux cas, u est constante.
 - Réciproquement, les suites constantes sont dans $\mathcal{S}$.

Les suites géométriques qui sont dans $\mathcal{S}$ sont exactement les suites constantes.

- 4.** On sait déjà que $\mathcal{S}$ est non vide et inclus dans E . Si u et v sont dans $\mathcal{S}$ associées à des constantes a et b et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour tout n , $(u + \lambda v)_{n+2} + (u + \lambda v)_n = a + \lambda b$. Ainsi $u + \lambda v \in \mathcal{S}$ et la constante associée est $a + \lambda b$. $\mathcal{S}$ est donc aussi stable par combinaisons linéaires et c'est finalement un sous-espace vectoriel de E .
- 5.** De façon immédiate, on a $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ (est élément de $\mathcal{S}_0$ est dans $\mathcal{S}$ de constante associée nulle). L'inclusion réciproque est fautive puisque la suite constante égale à 1 est dans $\mathcal{S}$ sans être dans $\mathcal{S}_0$.
- 6.** On a immédiatement $\varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$ c'est à dire la linéarité de φ . Comme φ est à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire. On notera que c'est l'application qui à un élément de $\mathcal{S}$ associe la constante correspondante de la définition. Les éléments du noyau de φ sont les éléments de $\mathcal{S}$ correspondant à une constante nulle et donc

$$\ker(\varphi) = \mathcal{S}_0$$

- 7.** v est dans $\mathcal{S}$ mais pas dans l'hyperplan $\ker(\varphi)$. C'est donc un vecteur qui engendre un supplémentaire de cet hyperplan (les hyperplans sont les sous-espaces de codimension 1) :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \text{Vect}(v)$$

- 8.** Soit $u \in \mathcal{S}$ et $a = \frac{u_0+u_2}{2}$. $u - av$ est alors un élément de $\mathcal{S}_0$ et est donc combinaison linéaire de λ et de μ définies en partie A. Les termes d'indice 0 et 1 donnent les valeurs des constantes et on obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{u_0 + u_2}{2} + \frac{u_0 - u_2}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2u_1 - u_0 - u_2}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

9. Un élément de $\mathcal{S}$ est combinaison linéaire des trois suites v, λ, μ qui sont périodique de période 4. Tout élément de $\mathcal{S}$ est donc aussi périodique de période 4.
10. $\mathcal{S}$ est de dimension 3 (comme somme directe d'un espace de dimension 2 et d'un autre de dimension 3). θ est immédiatement linéaire. De plus, si $u \in \ker(\theta)$ alors les trois premiers termes de u sont nuls. On a aussi $u_1 + u_3 = u_0 + u_2$ et donc $u_3 = 0$. Par 4-périodicité, les u_n sont tous nuls. θ est donc une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension : c'est un isomorphisme.
11. Si $u \in \mathcal{S}$, $u_3 = u_0 + u_2 - u_1$. On peut alors continuer par 4-périodicité

$$I = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots), \quad J = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots), \quad K = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$$

- 12.1 La linéarité de T_k est immédiate ($(u + \lambda v)_{kn} = u_{kn} + \lambda v_{kn}$ est vrai pour tout n). T_k allant de E dans E , c'est un endomorphisme de E .
- 12.2 $w = T_2(I) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ n'est pas dans $\mathcal{S}$ ($w_0 + w_2 = 0 \neq w_1 + w_3$). $\mathcal{S}$ n'est donc pas stable par T_2 .
- 12.3 $T_3(I) = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots) = I + J$, $T_3(J) = (0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots) = -J$ et $T_3(K) = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots) = J + K$. Les éléments d'une base de $\mathcal{S}$ étant envoyés dans $\mathcal{S}$ par l'application linéaire T_3 , $\mathcal{S}$ est stable par T_3 .
- 12.4 Le calcul précédente donne

$$\text{Mat}(T_3, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 12.5 $I - K$ et $I + J + K$ sont vecteurs propres indépendants de T_3 associés à la valeur propre 1. J est vecteur propre de T_3 associé à la valeur propre -1 . Les sous-espaces propres étant en somme directe, on doit avoir les égalités

$$\text{Sp}(T_3) = \{1, -1\}, \quad E_1(T_3) = \text{Vect}(I - K, I + J + K), \quad E_{-1}(T_3) = \text{Vect}(J)$$

- 12.6 T_3 est la symétrie par rapport à $\text{Vect}(I - K, I + J + K)$ de direction $\text{Vect}(J)$.

13. Soit $u \in \mathcal{S}$ et $a = \frac{u_0 + u_2}{2}$. On a $w = u - av \in \mathcal{S}_0$. On en déduit que (toutes les quantités écrites existent)

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k x^k + a \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Avec la question 4.3 de la partie A, la première somme vaut $\frac{w_0 + w_1 x}{1 + x^2}$. La seconde vaut $\frac{a}{1 - x}$. Avec les valeurs de w_0 et w_1 on obtient donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad h(x) = \frac{u_0 + u_2}{2(1 - x)} + \frac{(u_0 - u_2) + (2u_1 - u_0 - u_2)x}{2(1 + x^2)}$$

On imagine que l'énoncé veut ensuite parler de prolongement par continuité en 1 et -1 , c'est à dire qu'il faut voir si h admet une limite finie en 1 ou -1 .

C'est toujours le cas en -1 , la limite valant $\frac{3u_0 - 2u_1 + u_2}{4}$.

Il y a une limite finie en 0 si et seulement si $u_0 + u_2 = 0$ c'est à dire $u \in \mathcal{S}_0$ et dans ce cas, la limite vaut alors $\frac{u_0 + u_1}{2}$.

Partie C.

1. Il s'agit de généraliser le résultat vu en question 9 de la partie B (cas $p = 2$). Soit $u \in \mathcal{S}_p$ et a la constante associée; pour tout entier n , on a

$$u_{n+p} + u_n = a = u_{n+2p} + u_{n+p}$$

et ainsi $u_{n+2p} = u_n$, ce qui montre que u est $2p$ -périodique.

2.1 Un développement par rapport à la dernière ligne donne

$$\det(F - xI_{p+1}) = (1-x) \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

où le déterminant est de taille p . On développe ce dernier par rapport à la première colonne pour obtenir

$$\det(F - xI_{p+1}) = (1-x)((-x)^p - (-1)^{p+1}) = (-1)^{p+1}(x-1)(x^p+1)$$

2.2 Les valeurs propres de F sont les racines de son polynôme caractéristique.

- Les valeurs propres complexes sont 1 et les racines p -ièmes de -1 et on a donc

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(F) = \{1\} \cup \{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{p}} / 0 \leq k \leq p-1\}$$

- Si p est pair, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}$. Si p est impair, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1, -1\}$.

2.3 0 n'étant pas valeur propre de F , $F \in GL_{p+1}(\mathbb{R})$.

2.4 F possède $p+1$ valeurs propres complexes et est de taille $p+1$. Elle est donc $\mathbb{C}$ -diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1 (car les sous-espaces propres sont en somme directe).

Il y a au plus deux sous-espaces propres réels qui sont au plus de dimension 1 (car la multiplicité de chaque valeur propre est égale à 1). Ainsi, la somme des dimension des sous-espaces propres réels de F est au plus 2 et donc différente de $p+1$. F n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. δ est immédiatement linéaire.

Si $u \in \ker(\delta)$ alors $u_0 = \dots = u_{p-1} = u_0 + u_p = 0$. La constante a associée à u vaut $(u_0 + u_p)/2 = 0$ et on a donc $\forall n, u_{n+p} = -u_n$. On en déduit que $u_p = \dots = u_{2p-1} = 0$. u est $2p$ -périodique et ses $2p$ premiers termes sont nuls. u est donc la suite nulle. δ est donc injective (noyau restreint à la suite nulle).

Réciproquement, soit $(a_0, \dots, a_{p-1}, x) \in \mathbb{R}^{p+1}$. On définit u de manière récurrente par

$$\forall i \in [0, p-1], u_i = a_i ; \forall n \geq p, u_n = 2x - u_{n-p}$$

Il est aisé de voir que cette suite est bien définie. Par définition, $u \in \mathcal{S}_p$ (associée à la constante x) et $\delta(u) = (a_0, \dots, a_{p-1}, x)$. On a donc montré la surjectivité de δ .

δ est finalement un isomorphisme et

$$\dim(\mathcal{S}_p) = \dim(\mathbb{R}^{p+1}) = p+1$$

4.1 ψ est linéaire. Si $u \in \mathcal{S}_p$ (avec une constante a) et $t = \psi(u)$ alors $\forall n, t_n + t_{n+p} = u_{n+1} + u_{n+p+1} = 2a$. On a donc $t \in \mathcal{S}_p$ (avec la même constante a).

ψ est donc un endomorphisme de $\mathcal{S}_p$.

4.2 Les éléments de $\mathcal{S}_p$ étant $2p$ -périodiques, on a $\psi^{2p} = Id_{\mathcal{S}_p}$.

4.3 Soit $x = (x_0, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$; on a (les termes non précisés n'ayant pas d'importance)

$$\delta^{-1}(x) = (x_0, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, 2x_p - x_1, \dots)$$

$$\psi(\delta^{-1}(x)) = (x_1, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, 2x_p - x_1, \dots)$$

$$\delta(\psi(\delta^{-1}(x))) = (x_1, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, x_p)$$

En notant $(e_0, \dots, e_p)$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ et $E_i = \delta^{-1}(e_i)$, on a donc

$$\psi(\delta^{-1}(x)) = x_1 E_0 + \dots + x_{p-1} E_{p-2} + (2x_p - x_0) E_{p-1} + x_p E_p$$

La première colonne de la matrice cherchée est constituée des coefficients obtenus quand $x = e_0$ c'est à dire $x_0 = 1$ et $x_1, \dots, x_p = 0$.

Plus généralement la colonne i de la matrice cherchée est constituée des coefficients obtenus quand $x = e_i$ c'est à dire $x_k = \delta_{i,k}$.

Avec les formules obtenues, on obtient que la matrice cherchée est F .

4.4 F n'étant pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ψ n'est pas diagonalisable.

4.5 F étant inversible, ψ est un isomorphisme. χ_F annule ψ et donc $\psi^{p+1} - \psi^p + \psi - Id = 0$. Ainsi

$$\psi^{-1} = \psi^p - \psi^{p-1} + Id$$

On a donc $\psi^{-1}(u) = w$ avec $w_n = u_{n+p} - u_{n+p-1} + u_n$.