

Problème

Partie I

1°. (a) La fonction $h : \theta \mapsto \cos(x \sin(\theta))$ est paire de période π ; par suite

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) \, d\theta = 2 \int_0^\pi h(\theta) \, d\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(\theta) \, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} h(\theta) \, d\theta.$$

(b) Soit $f(x, \theta) = \cos(x \sin(\theta))$; alors $J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x, \theta) \, d\theta$. f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ donc d'après les théorèmes concernant les intégrales dépendant d'un paramètre, J est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et l'on peut obtenir J' et J'' en dérivant sous l'intégrale.

Comme $f(-x, \theta) = f(x, \theta)$, J est paire.

(c) $|J(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(x \sin(\theta))| \, d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \, d\theta = 1$ donc J est bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) La restriction de la fonction $\sin$ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est concave puisque $(\sin(\theta))'' = -\sin(\theta) < 0$.

La courbe est donc d'une part au-dessous de sa tangente en $\theta = 0 : \sin(\theta) \leq \theta$ et d'autre part au-dessus de la corde $[OA]$ où A est le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) : \sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$.

Finalement, $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}\theta \leq \sin(\theta) \leq \theta$.

Pour $x \in]0, 2]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \frac{2x\theta}{\pi} \leq x \sin(\theta) \leq x\theta \leq \pi$. Comme la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, \pi]$, on en déduit que $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x\theta) \, d\theta \leq J(x) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{2x\theta}{\pi}\right) \, d\theta$.

Finalement, $\forall x \in]0, 2], \frac{\sin(x\pi/2)}{x\pi/2} \leq J(x) \leq \frac{\sin x}{x}$.

(e) $J(0) = 1$.

D'après (b), $J'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta)) \, d\theta$, donc $J'(0) = 0$.

De plus, $\forall \theta \in [0, \pi], \sin(\theta) \geq 0$, donc $\forall x \in [0, \pi], 0 \leq x \sin(\theta) \leq \pi$ d'où $\sin(x \sin(\theta)) \geq 0$ et $J'(x) \leq 0$. Finalement, J est décroissante sur $[0, \pi]$.

2°. (a) En intégrant par parties, pour $n \in \mathbb{N}$, on trouve que

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \sin^{2n+1}(\theta) \, d\theta = [-\cos(\theta) \sin^{2n+1}(\theta)]_0^{\pi/2} + (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) \sin^{2n}(\theta) \, d\theta = (2n+1)(I_n - I_{n+1}).$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+1)I_n = 2(n+1)I_{n+1}$.

(b) On raisonne par récurrence. $I_0 = \frac{\pi}{2}$ donc la formule proposée est vraie pour $n = 0$ et si l'on suppose qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ alors $I_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n)! \pi}{2(n+1)(n!)^2 2^{2n+1}} = \frac{(2n+2)! \pi}{((n+1)!)^2 2^{2n+3}}$ donc elle est vraie aussi pour $n+1$ ce qui termine la démonstration par récurrence.

3°. (a) La fonction $\cos$ est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \cos(x \sin(\theta))$ est également développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x \sin(\theta)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!} x^{2n}.$$

(b) Soit $u_n(\theta) = (-1)^n \frac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!} x^{2n}$; pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $N_\infty(u_n) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Or c'est le terme général d'une série convergente puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Il y a donc convergence normale de $\sum u_n(\theta)$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut ainsi intégrer terme à terme et l'on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

Partie II

4°. D'après I1.(b), $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x(J(x) + J''(x)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(1 - \sin^2(\theta)) \cos(x \sin(\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(\theta) \cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} [\sin(x \sin(\theta)) \cos(\theta)]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin(\theta)) (-\sin(\theta)) d\theta = -J'(x). \end{aligned}$$

On a donc bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $x(J(x) + J''(x)) + J'(x) = 0$.

5°. Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit une série entière de rayon $R > 0$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$,

$$\begin{aligned} 0 = xy'' + y' + xy &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} = \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^{n-1}. \end{aligned}$$

On en déduit par unicité du développement en série entière que $a_1 = 0$ puis que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et que $a_{2p} = -\frac{1}{4p^2} a_{2p-2} = \dots = \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0$ c'est-à-dire que $y(x) = a_0 J(x)$ ce qui montre le résultat cherché.

6°. $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ car J et $K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, W'(x) &= J''(x)K(x) - J(x)K''(x) = \left[-\frac{J'(x)}{x} - J(x) \right] K(x) - \left[-\frac{K'(x)}{x} - K(x) \right] J(x) = \\ &= -\frac{1}{x} [J'(x)K(x) - J(x)K'(x)] = -\frac{1}{x} W(x). \end{aligned}$$

De $xW'(x) + W(x) = 0$, on déduit $[xW(x)]' = 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 0, W(x) = \frac{\lambda}{x}$.

7°. (a) $\frac{H_{n+1}}{H_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)H_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ puisque $H_n \geq 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_{n+1}}{H_n} = 1$.

(b) Soit $b_n = \frac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2}$. Alors $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{1}{4(n+1)^2} \frac{H_{n+1}}{H_n}$ a pour limite 0 donc, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\varphi(x)$ est bien égal à $+\infty$.

Le calcul fait au 5° donne (puisque l'on a ici $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = b_p$)

$$x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (4p^2 b_p + b_{p-1}) x^{2p-1}.$$

Or $4p^2b_p + b_{p-1} = \frac{(-1)^{p+1}H_p}{4^{p-1}((p-1)!)^2} + \frac{(-1)^pH_{p-1}}{4^{p-1}((p-1)!)^2} = \frac{(-1)^{p+1}}{4^{p-1}p!(p-1)!}$ puisque $H_p - H_{p-1} = \frac{1}{p}$.

On obtient ainsi $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x) = -2J'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & x[\ln(x)J(x)]'' + [\ln(x)J(x)]' + x\ln(x)J(x) = \\ & x\left[-\frac{1}{x^2}J(x) + \frac{2}{x}J'(x) + \ln(x)J''(x)\right] + \frac{1}{x}J(x) + \ln(x)J'(x) + x\ln(x)J(x) = \\ & [xJ''(x) + J'(x) + xJ(x)]\ln(x) + 2J'(x) = 2J'(x) = -x\varphi''(x) - \varphi'(x) - x\varphi(x) \\ & \text{d'où } xK''(x) + K'(x) + xK(x) = 0. \end{aligned}$$

D'après 6°, on a $W(x) = \frac{\lambda}{x}$ d'où $\lambda = xK(x)J'(x) - xK'(x)J(x)$

$$\lambda = x\ln(x)J(x)J'(x) + x\varphi(x)J'(x) - xJ(x)\left[\frac{1}{x}J(x) + \ln(x)J'(x) + \varphi'(x)\right]$$

$$\lambda = -J(x)^2 + x[\varphi(x)J'(x) - \varphi'(x)J(x)]$$

Puisque J et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en faisant tendre x vers 0, on obtient que $\lambda = -J(0)^2 = -1$.

Donc $W(x) = -\frac{1}{x}$ ne s'annule pas. Comme c'est le Wronskien associé aux solutions J et K , on peut en déduire que (J, K) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie III

8°. (a) Comme $y > 0$, toutes les fonctions considérées sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{y}$

et pour $n \geq 1$, on suppose le résultat vrai pour $n - 1$ et on intègre par parties :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy} dx = \left[x^n \frac{-e^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} + \frac{n}{y} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-xy} dx = \frac{n}{y} \frac{(n-1)!}{y^n} = \frac{n!}{y^{n+1}}.$$

(b) D'après 1°. (c), $0 \leq e^{-xy}|J(\sqrt{x})| \leq e^{-xy}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale considérée existe.

$$\text{D'après 3°. (b), } J(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^n \text{ d'où } \int_0^{+\infty} e^{-xy} J(\sqrt{x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} x^n dx.$$

$$\text{On pose donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = e^{-xy} \frac{(-1)^n x^n}{4^n(n!)^2}.$$

$$\text{Alors, d'après la question précédente, } \int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{1}{4^n(n!)^2} \frac{n!}{y^{n+1}} = \frac{1}{y} \frac{1}{n!} \frac{1}{(4y)^n}.$$

Puisque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{1}{y} e^{1/(4y)}$ converge, on peut intervertir l'intégrale et la série pour obtenir l'égalité demandée.

9°. (a) $|e^{-xy}J(x)| \leq e^{-xy}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $y > 0$ donc $e^{-xy}J(x)$ l'est aussi et $L(y)$ existe.

(b) $\forall a > 0, \forall b > a, \forall y \in [a, b], |e^{-xy}J(x)| \leq e^{-ax}$ qui est indépendante de y et intégrable sur $[0, +\infty[$.

De plus, $(x, y) \mapsto e^{-xy}J(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer le théorème sur les intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (avec hypothèse de domination sur tout segment) qui permet d'affirmer que L est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Enfin, } |L(y)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}, \text{ donc } \lim_{y \rightarrow +\infty} L(y) = 0.$$

10°. (a) $h(u) = (1 + u^2)^{-1/2}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ comme $(1 + x)^a$.

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} u^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} u^{2n}.$$

(b) Le calcul du 8°. (b) peut être repris en changeant x^n en x^{2n} , d'où

$$L(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{1}{y^{2n+1}} = \frac{1}{y} h\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y\sqrt{1+(1/y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ car } \frac{1}{y} \in]0, 1[\text{ puisque } y \in]1, +\infty[.$$

$$11^\circ. (a) |L_n(y) - L(y)| = \left| \int_n^{+\infty} e^{-xy} J(x) dx \right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-xy} dx = \left[\frac{e^{-xy}}{-y} \right]_{x=n}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{e^{-ny}}{y}.$$

$$(b) \frac{\pi}{2} L_n(y) = \frac{\pi}{2} \int_0^n e^{-xy} J(x) dx = \int_0^n e^{-xy} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(\theta)) d\theta \right) dx = \\ \Re e \left(\int_0^n e^{-xy} \left(\int_0^{\pi/2} e^{ix \sin(\theta)} d\theta \right) dx \right).$$

Or $(x, \theta) \mapsto e^{-xy+ix \sin \theta}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc on peut appliquer le théorème de Fubini et intervertir les intégrales :

$$\frac{\pi}{2} L_n(y) = \Re e \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^n e^{x(-y+i \sin(\theta))} dx \right) d\theta \right) = \Re e \left(\int_0^{\pi/2} \left[\frac{e^{x(-y+i \sin(\theta))}}{-y+i \sin(\theta)} \right]_{x=0}^{x=n} d\theta \right) = \\ \Re e \left(\int_0^{\pi/2} \frac{e^{n(-y+i \sin(\theta))}}{-y+i \sin(\theta)} d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{y-i \sin(\theta)} d\theta \right)$$

car on peut couper l'intégrande en deux puisqu'il s'agit de fonctions continues que l'on intègre sur un segment.

$$(c) \left| \int_0^{\pi/2} \frac{e^{n(-y+i \sin(\theta))}}{-y+i \sin(\theta)} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-ny} |e^{in \sin(\theta)}|}{|-y+i \sin(\theta)|} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-ny}}{\sqrt{y^2 + \sin^2(\theta)}} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-ny}}{y} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-ny}}{y}.$$

$$(d) \text{ D'après } 11^\circ. (a), L(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(y). \text{ Donc d'après } 11^\circ. (c), L(y) = \frac{2}{\pi} \Re e \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{y-i \sin(\theta)} d\theta \right).$$

$$L(y) = \frac{2y}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{y^2 + \sin^2(\theta)} d\theta = \frac{2y}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\frac{y^2}{\cos^2(\theta)} + \tan^2(\theta) \right) \cos^2(\theta)} d\theta. \text{ On pose alors } u = \tan(\theta) \text{ d'où}$$

$$L(y) = \frac{2y}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{y^2(1+u^2) + u^2} = \frac{2y}{\pi} \frac{1}{y^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right) u^2} = \frac{2}{\pi y} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \left[\arctan \frac{u\sqrt{1+y^2}}{y} \right]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} = \\ \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

*** FIN ***