Concours E3A 2018

Épreuve de mathématiques 2 PSI, trois heures

Corrigé

Partie 1

1.

1. Les solutions de l'équation homogène $y' - ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec $K \in \mathbb{R}$. De plus, la méthode de la variation de la constante permet de démontrer que l'application $x \mapsto -e^{ax} \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ est une solution particulière de l'équation $y' - ay + f = 0$. On en déduit que les solutions de (E_a^f) sur I sont de la forme :
$$x \mapsto Ke^{ax} - e^{ax} \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t, \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$
Après factorisation par e^{ax}, on obtient la forme voulue.

2. Soient z_1 et z_2 deux solutions de (E_a^f) bornées sur I. Alors $z_1 - z_2$ est également bornée ; or, d'après la question précédente, il existe des réels K_1 et K_2 tels que :
$$\forall x \in I,\ z_1(x) = e^{ax}\left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right), \text{ et } z_2(x) = e^{ax}\left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right),$$
donc : $\forall x \in I,\ z_1(x) - z_2(x) = e^{ax}(K_1 - K_2)$. Comme $e^{ax} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ pour $a > 0$, cette application ne peut être bornée qu'à la condition que $K_1 - K_2 = 0$, c'est-à-dire $K_1 = K_2$ et donc $z_1 = z_2$. Ainsi il y a au plus une solution de (E_a^f) bornée sur I.

3. L'application $t \mapsto e^{-at} f(t)$ est continue en tant que produit d'applications continues : nous allons démontrer son intégrabilité par relation de comparaison.
L'application f est bornée sur I ; soit, donc, un réel $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$. Alors :
$$\forall t \in I, \quad \left|e^{-at} f(t)\right| \leqslant Me^{-at}.$$
Comme $a > 0$, l'application $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur I et donc $t \mapsto e^{-at} f(t)$ également par comparaison. Ceci implique en particulier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

4. L'unicité a déjà été établie dans la question 1.2. Il s'agit donc seulement de vérifier que F est une solution de (E_a^f) bornée. Pour montrer que F est solution de (E_a^f), on peut se contenter de vérifier qu'elle est de la forme explicitée dans la question 1.1, avec $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$.
En effet, d'après la relation de Chasles :
$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ F(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t &= e^{ax}\left(\int_x^1 e^{-at} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{ax}\left(\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t - \int_1^x e^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Montrons à présent que F est bornée : comme dans la question précédente, soit $M > 0$ un réel tel que $|f| \leqslant M$. Alors :

$$\forall x \in I,\ |F(x)| \leqslant e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\mathrm{d}t \leqslant Me^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t = Me^{ax} \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty} = \frac{M}{a},$$

donc F est bornée (par la constante $\frac{M}{a}$). Ceci démontre le résultat.

2. 1. L'application 1 est bien sûr continue et bornée (par 1), donc $1 \in \mathscr{E}$ et $U_a(1)$ existe. Soit $x \in I$. Alors :

$$U_a(1)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t = e^{ax} \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{a},$$

donc $U_a(1)$ est la fonction constante égale à $\frac{1}{a}$.

2. Soit $f \in \mathscr{E}$. Comme f est continue sur I, l'application $t \mapsto e^{-at}f(t)$ est continue sur I en tant que produit d'applications continues, donc sa primitive $x \mapsto \displaystyle\int_{+\infty}^x e^{-at}f(t)dt$ l'est également (elle est même de classe C^1). Par conséquent $U_a(f) : x \mapsto e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur I en tant que produit d'applications continues. De plus elle est bornée d'après la question 1.4 : ceci montre que $U_a(f) \in \mathscr{E}$; ainsi l'image de U_a est bien incluse dans $\mathscr{E}$. La linéarité de U_a provient de la linéarité de l'intégrale, donc $U_a : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est un endomorphisme.

3. (a) Pour déterminer si U_a est injectif, on étudie son noyau : soit $f \in \ker(U_a)$. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t = 0$$

(on divise l'égalité $U_a(f)(x) = 0$ par $e^{ax} \neq 0$). En dérivant cette égalité, on obtient :

$$\forall x \in I, \quad -e^{-ax}f(x) = 0.$$

Or l'exponentielle ne s'annule jamais, donc cela implique $f = 0$. Ceci démontre que $\ker(U_a) = \{0\}$, c'est-à-dire : U_a est un endomorphisme injectif.

(b) On reprend l'argumentation de la question 2.2. Si $f \in \mathscr{E}$, il a été mentionné que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I en tant que primitive d'une application continue, et $x \mapsto e^{ax}$ l'est également, donc leur produit $U_a(f)$ aussi.

(c) La question précédente démontre que $U_a(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{E}_1$, or $\mathscr{E}_1 \neq \mathscr{E}$ puisqu'il existe des applications continues qui ne sont pas de classe C^1 sur I : l'application $x \mapsto \sqrt{x-1}$ en est un exemple (elle n'est pas dérivable en 1). Par conséquent $U_a(\mathscr{E}) \neq \mathscr{E}$ et U_a n'est pas surjectif.

4. Tout d'abord, les applications cos et sin sont continues et bornées (par 1), donc appartiennent à $\mathscr{E}$; cet ensemble étant stable par combinaison linéaire, $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos, \sin)$ est inclus dans $\mathscr{E}$, et il est donc possible de discuter de l'image par U_1 de cet espace vectoriel. Pour montrer que $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos, \sin)$ est stable par U_1, il suffit de vérifier que $U_1(\cos) \in \mathscr{F}$ et $U_1(\sin) \in \mathscr{F}$. Pour cela, nous avons besoin de calculer $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$. Or, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t + i\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} e^{(i-1)t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1}\right]_x^{+\infty}\\ &= -\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\\ &= -\frac{(-i-1)e^{(i-1)x}}{2}\\ &= \frac{i+1}{2}e^{-x}(\cos(x) + i\sin(x)).\end{aligned}$$

En développant et en identifiant parties réelles et imaginaires, on en déduit, pour tout $x \in I$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{2}\left(\cos(x) - \sin(x)\right), \quad \int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right).$$

On en déduit :

$$U_1(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin) \in \mathscr{F}, \quad U_1(\sin) = \frac{1}{2}(\cos + \sin) \in \mathscr{F},$$

donc $\mathscr{F}$ est bien stable par U_1 ; si on note V l'endomorphisme induit par U_1 sur $\mathscr{F}$, alors la matrice de V relativement à la base $(\cos, \sin)$ est $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on note $\Omega = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors Ω est la matrice d'une rotation planaire de mesure d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ (avec la convention que $(\cos, \sin)$ est une base directe de $\mathscr{F}$), et on a $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Omega$.

3. 1. Soit $r \geqslant 0$. L'application $f_r : x \mapsto e^{-rx}$ est continue et bornée sur I (par e^{-r} par exemple), donc $f_r \in \mathscr{E}$ et $U_a(f_r)$ existe. Alors :

$$\forall x \in I,\ U_a(f_r)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+r)t}\mathrm{d}t = e^{ax}\left[\frac{e^{-(a+r)t}}{-(a+r)}\right]_x^{+\infty} = e^{ax}\frac{e^{-(a+r)x}}{a+r} = \frac{e^{-rx}}{a+r},$$

donc : $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r}f_r$. Comme $f_r \neq 0$, on a montré que f_r est un vecteur propre de U_a pour la valeur propre $\frac{1}{a+r}$.

2. Soit $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$. Comme $\lambda \leqslant \frac{1}{a}$, on a $\frac{1}{\lambda} \geqslant a$, et il existe donc $r \geqslant 0$ tel que $\lambda = \frac{1}{a+r}$: on prend pour cela $r = \frac{1}{\lambda} - a \geqslant 0$. Nous avons démontré dans la question précédente que pour tout $r \geqslant 0$, le réel $\frac{1}{a+r}$ est valeur propre de U_a : donc λ est valeur propre de U_a.
3. Soit $r \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_a^n(f_r) = \left(\frac{1}{a+r}\right)^n f_r$ d'après la question 3.1. Donc, pour tout $x \in I$, on a :

$$U_a^n(f_r)(x) = \left(\frac{1}{a+r}\right)^n e^{-rx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } a+r>1, \\ e^{-rx} & \text{si } a+r=1, \\ +\infty & \text{si } a+r<1, \end{cases}$$

donc la suite de fonctions $\left(U_a^n(f_r)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I si et seulement si $a+r \geqslant 1$; elle converge vers la fonction identiquement nulle si $a+r>1$, et vers f_r si $a+r=1$.
4. Soit $r \geqslant 0$, et soit $x \in I$. À une constante multiplicative non nulle près, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)(x)$ est la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{a+r}\right)^n$; elle converge donc si et seulement si $\dfrac{1}{a+r} < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $a+r>1$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)$ converge simplement sur I si et seulement si $a+r>1$ (il y a même convergence normale). Dans ce cas, on a :

$$\forall x \in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r)(x) = e^{-rx}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a+r}\right)^n = e^{-rx}\frac{1}{1-\frac{1}{a+r}} = e^{-rx}\frac{a+r}{a+r-1},$$

donc : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1} f_r$.

4. Soit $f \in \mathscr{E}$, et soit $x \in I$. On fait le changement de variable affine $u = t - x$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$. Alors :

$$U_a(f)(x) = e^{ax}\int_0^{+\infty} e^{-a(u+x)} f(u+x)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-au} f(u+x)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t+x)\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.

5. 1. Il est tentant de proposer $(g_0, \ldots, g_p)$ pour base de $\mathscr{F}_p$; par définition de cet espace vectoriel, c'en est une famille génératrice. Montrons donc qu'elle est libre : soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k g_k = 0$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k e^{-x} = 0.$$

En multipliant cette égalité par e^x, on obtient :

$$\forall x \in I, \quad \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k = 0.$$

Pour tout $x \in I$, le réel x est donc racine du polynôme $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$; or I est infini, donc ce polynôme admet une infinité de racines et doit être nul, c'est-à-dire : $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k = 0$, ou encore : $\alpha_0 = \cdots = \alpha_p = 0$. Ceci montre que la famille $(g_0, \ldots, g_p)$ est libre en plus d'engendrer $\mathscr{F}_p$, donc c'est une base de $\mathscr{F}_p$ qu'on note désormais $\mathscr{B}_p$.

2. Pour montrer que l'espace vectoriel $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(g_0, \ldots, g_p)$ est inclus dans $\mathscr{E}$, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ on a $g_k \in \mathscr{E}$. Il est clair que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'application g_k est continue : il reste à montrer qu'elle est bornée sur I.

   Soit, donc, $k \in [\![0, p]\!]$. Notons d'abord que $g_k \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Alors, par définition de la limite, il existe $x_0 \in I$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, on ait $|g_k(x)| \leqslant 1$. De plus, l'application $|g_k|$ étant *continue* sur le *segment* $[1, x_0]$, elle est bornée, disons par un réel m. En considérant $M = \max(m, 1)$, on a : $\forall x \in I$, $|g_k(t)| \leqslant M$, donc g_k est bornée sur I.

   (*Il est aussi possible d'étudier les variations de g_k grâce au signe de g_k', facile à déterminer puisque pour tout $x \in I$, on a : $g_k'(x) = x^{k-1}(k - x)e^{-x}$. Le maximum de g_k est atteint en k, donc pour tout $x \in I$ on a $0 \leqslant g_k(x) \leqslant g_k(k) = k^k e^{-k}$: l'application g_k est bornée.*)

   On a donc bien l'inclusion $\mathscr{F}_p \subseteq \mathscr{E}$, et on peut considérer l'action de U_a sur ce sous-espace vectoriel. Nous allons montrer par récurrence sur k que $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.

   (*L'idée de procéder par récurrence provient du fait qu'en intégrant par parties, une primitive de l'exponentielle étant elle-même à peu de choses près, on ramène l'étude de $U_a(g_k)$ à celle de $U_a(g_k')$; or $g_k' = kg_{k-1} - g_k$ d'après ce qui précède, faisant le lien entre $U_a(g_{k-1})$ et $U_a(g_k)$.*)

   Si $k = 0$, on a $U_a(g_0) = U_a(f_1) = \frac{1}{1+a} g_0 \in \mathscr{F}_p$ d'après la question 3.1. À présent, soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, et supposons que $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$. Alors, en dérivant g_{k+1} et en intégrant $x \mapsto e^{-ax}$ (on vérifie préalablement que le terme $\left[t^{k+1} e^{-t} \frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty}$ est bien défini, et égale $x^{k+1} \frac{e^{-(1+a)x}}{a}$ grâce aux croissances comparées), on obtient :

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ U_a(g_{k+1})(x) &= e^{ax} \left(x^{k+1} \frac{e^{-(1+a)x}}{a} - \int_x^{+\infty} \left((k+1)t^k - t^{k+1} \right) e^{-t} \frac{e^{-at}}{-a} \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{a} x^{k+1} e^{-x} + \frac{k+1}{a} e^{ax} \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} e^{-at} \mathrm{d}t - \frac{1}{a} e^{ax} \int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} e^{-at} \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

   donc : $\left(1 + \frac{1}{a}\right) U_a(g_{k+1}) = \frac{1}{a} g_{k+1} + \frac{k+1}{a} U_a(g_k)$. Or $g_{k+1} \in \mathscr{F}_p$ et, par hypothèse de récurrence, $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$ donc $\left(1 + \frac{1}{a}\right) U_a(g_{k+1}) \in \mathscr{F}_p$. On a $1 + \frac{1}{a} \neq 0$, donc $U_a(g_{k+1}) \in \mathscr{F}_p$.

   Par principe de récurrence, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on a $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$. Comme la famille $(g_0, \ldots, g_p)$ engendre $\mathscr{F}_p$, on en déduit que $\mathscr{F}_p$ est stable par U_a.

3. Une analyse attentive de la démonstration par récurrence de la question précédente montre que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\left(1 + \frac{1}{a}\right) U_a(g_k) - \frac{1}{a} g_k \in \mathscr{F}_{k-1}$, ou encore $U_a(g_k) - \frac{1}{1+a} g_k \in \mathscr{F}_{k-1}$. On a de plus montré que $U_a(g_0) = \frac{1}{1+a} g_0$, donc la matrice de l'endomorphisme induit par

U_a sur $\mathscr{F}_p$, dans la base $\mathscr{B}_p = (g_0, \ldots, g_p)$, est triangulaire supérieure et de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+a} & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{1+a} \end{pmatrix},$$

et son déterminant égale le produit des coefficients diagonaux, c'est-à-dire : $\left(\dfrac{1}{1+a}\right)^{p+1}$.

6. Soit $f \in \mathscr{E}$. Pour tout $x \in I$ on a, d'après la question 4 et l'inégalité triangulaire :

$$|U_a(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |e^{-at} f(x+t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-at}|f(x+t)|\mathrm{d}t = U_a(|f|)(x),$$

donc : $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

7. Soit $f \in \mathscr{E}$. Si $f \geqslant 0$, alors pour tout $x \in I$ et tout $t \in [0, +\infty[$ on a $e^{-at} f(x+t) \geqslant 0$ parce que l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $U_a(f)(x) \geqslant 0$ en intégrant cette inégalité sur $[0, +\infty[$, l'intégrale étant croissante.

8. Soit $f \in \mathscr{E}$ décroissante. Pour tout $x \in I$ et tout $t \in [0, +\infty[$ on a donc $f(x+t) \leqslant f(x)$. En multipliant cette inégalité par $e^{-at} \geqslant 0$, et en intégrant sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$\forall x \in I,\ U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x)\mathrm{d}t = f(x)\left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^{+\infty} = f(x) \times \frac{1}{a},$$

donc, a étant un réel strictement positif : $aU_a(f) \leqslant f$.

Montrons à présent que $U_a(f)$ est décroissante : soient $x, x' \in I$ tels que $x \leqslant x'$. L'application f étant décroissante, pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $f(x+t) \geqslant f(x'+t)$. En multipliant cette inégalité par $e^{-at} \geqslant 0$, et en intégrant sur $[0, +\infty[$, on obtient $U_a(f)(x) \geqslant U_a(f)(x')$: ceci démontre que $U_a(f)$ est décroissante sur I.

9.

1. Soit $f \in \mathscr{H}$. Alors $U_a(f')$ est bien défini ; en intégrant par parties (on intègre $x \mapsto f'(x+t)$ en choisissant la primitive $x \mapsto f(x+t)$, et on dérive $t \mapsto e^{-at}$; le terme $[e^{-at} f(x+t)]_0^{+\infty}$ est bien défini et égale $-f(x)$), pour tout $x \in I$ on a :

$$U_a(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f'(x+t)\mathrm{d}t = -f(x) + \int_0^{+\infty} a e^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t,$$

donc : $U_a(f') = -f + aU_a(f)$, ce qu'il fallait démontrer.

2. D'après la question 1.4, $U_a(f)$ est solution de (E_a^f), donc vérifie :

$$U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0,$$

et il vient d'être établi que $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$. En comparant ces deux égalités, on obtient $U_a(f') = U_a(f)'$, ce qu'on peut réécrire ainsi :

$$U_a(D(f)) = D(U_a(f)).$$

Ceci vaut pour toute application $f \in \mathscr{H}$, donc U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

10. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition P_n suivante :

$$\text{« } \forall f \in \mathscr{E},\ \forall x \in I,\ U_a^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t. \text{ »}$$

On a P_0 par définition même de $U_a(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. À présent, soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons P_n. Soit $f \in \mathscr{E}$; on a $U_a^{n+2}(f) = U_a^{n+1}(U_a(f))$ et $U_a(f) \in \mathscr{E}$, donc d'après P_n :

$$\forall x \in I,\ U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U_a(f)(t) \mathrm{d}t.$$

Intégrons par parties, en intégrant $t \mapsto \dfrac{(t-x)^n}{n!}$ et en dérivant $t \mapsto e^{-at} U_a(f)(t)$ (notons que $U_a(f)$ est bien dérivable d'après la question 2.3.b). Rappelons que pour tout $x \in I$, on a $e^{-ax} U_a(f)(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t$, donc la dérivée de $t \mapsto e^{-at} U_a(f)(t)$ est $t \mapsto -e^{-at} f(t)$. Si l'on met provisoirement de côté le terme entre crochets, l'intégration par parties donne donc :

$$\forall x \in I,\ U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \left(\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t \right).$$

Inspectons de plus près le terme $\left[\dfrac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right]_x^{+\infty}$: nous avons démontré dans la question 1.4 que $U_a(f)$ est bornée pour toute application $f \in \mathscr{E}$, disons par une constante $M > 0$. Donc :

$$\left| \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} (t-x)^{n+1} e^{-at} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées : ceci démontre que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) = 0$ d'après le théorème des gendarmes. De plus, ce terme égale 0 quand $t = x$, donc $\left[\dfrac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right]_x^{+\infty}$ est bien défini et égale 0. On en déduit :

$$\forall x \in I,\ U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t,$$

et ceci vaut pour toute application $f \in \mathscr{E}$, donc on a P_{n+1}.
Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

11. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge, et on a $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. On en déduit :

$$\forall x \in I,\ \forall t \geqslant x, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) = e^{-at} f(t) e^{t-x}.$$

2. Soient $x \in I$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. D'après la question 10, et en faisant le changement de variable affine $u = t - x$, on a :

$$U_a^n(f)(x) = e^{ax} \int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a(u+x)} f(u+x)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-au} f(u+x)\mathrm{d}u.$$

Or, f étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$, et on a alors :

$$|U_a^n(f)(x)| \leqslant \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-au}\mathrm{d}u.$$

Calculons cette dernière intégrale : on fait le changement de variable linéaire $v = au$ pour se ramener à l'intégrale dont la valeur nous est donnée dans l'énoncé. On a :

$$\int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-au}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{a}\right)^{n-1} e^{-v} \frac{\mathrm{d}v}{a} = \frac{(n-1)!}{a^n},$$

donc finalement : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $|U_a^n(f)(x)| \leqslant \dfrac{M}{a^n}$. Puisque, par hypothèse, on a $a > 1$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{a^n}$ converge. Par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_a^n(f)(x)$ converge absolument, donc converge.
Ceci vaut pour tout $x \in I$, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_a^n(f)$ converge simplement sur I.

3. Soit $x \in I$. Nous allons calculer explicitement $S(x) = e^{ax} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \dfrac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t$ grâce à la question 11.1 : pour cela, nous avons besoin d'intervertir somme et intégrale. Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme :
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \dfrac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[x, +\infty[$, et on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \left|\frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\right| \mathrm{d}t = U_a^{n+1}(|f|)(x)$ d'après la question 10 ;
   — la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(t \mapsto \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\right)$ converge simplement sur I d'après la question 11.1, et sa somme $t \mapsto e^{-at} f(t) e^{t-x}$ est continue par morceaux sur I ;
   — la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_x^{+\infty} \left|\frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\right| \mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} U_a^{n+1}(|f|)(x)$ converge d'après la question 11.2.

   Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont donc vérifiées, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{t-x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Enfin : $S(x) = e^{(a-1)x}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{(1-a)t}f(t)\mathrm{d}t = U_{a-1}(f)(x)$: ceci vaut pour tout $x \in I$, donc $S = U_b(f)$ avec $b = a - 1$. La question 3.4 en est un cas particulier.

Partie 2

1. Si $g \in \mathscr{E}$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}g(t)\mathrm{d}t$ converge d'après la question 1.3 de la partie 1. Ici, par hypothèse, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$, donc $e^{-at}f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-at}g(t))$. D'après le résultat admis, on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}g(t)\mathrm{d}t\right).$$

Après multiplication par e^{ax}, on a $U_a(f)(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(U_a(g)(x))$, d'où le résultat.

2. Avec les hypothèses de la question, on a $f - g \underset{+\infty}{=} o(g)$ et g est à valeurs positives. Donc, d'après la question précédente, on a $U_a(f-g) \underset{+\infty}{=} o(U_a(g))$. L'application U_a étant linéaire, cela implique $U_a(f) = U_a(g) + \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$, c'est-à-dire : $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.

3. Soit $f \in \mathscr{E}$ ayant une limite finie en $+\infty$.
Si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, cela signifie précisément que $f \underset{+\infty}{=} o(1)$ et donc, d'après la question 1 de cette partie, on en déduit $U_a(f) \underset{+\infty}{=} o(U_a(1))$. Or $U_a(1)$ est une application constante d'après la question 2 de la partie 1, donc $U_a(f) \underset{+\infty}{=} o(1)$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = 0$.
Si $\lim\limits_{+\infty} f = L \neq 0$, alors $f \underset{+\infty}{\sim} L$ et donc, d'après la question 1 de cette partie, on en déduit $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(L)$. Or $U_a(L) = LU_a(1) = \frac{L}{a}$ d'après la question 2 de la partie 1, donc $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} \frac{L}{a}$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \frac{L}{a}$.

Dans tous les cas, $U_a(f)$ admet une limite finie en $+\infty$: on a plus précisément $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \dfrac{\lim\limits_{+\infty} f}{a}$.

4.
1. Soit $x \in I$. Intégrons par parties, en dérivant $h_\omega : t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et en intégrant $t \mapsto e^{-at}$; le terme $\left[\dfrac{e^{-at}}{-a}\dfrac{1}{t^\omega}\right]_x^{+\infty}$ est bien défini et égale $\dfrac{e^{-ax}}{ax^\omega}$, donc :
$$H_\omega(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\omega}\mathrm{d}t = e^{ax}\left(\frac{e^{-ax}}{ax^\omega} - \frac{\omega}{a}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^{\omega+1}}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{x^\omega} - \frac{\omega}{a}e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^{\omega+1}}\mathrm{d}t,$$
donc : $H_\omega(x) = \dfrac{1}{a}h_\omega(x) - \dfrac{\omega}{a}H_{\omega+1}(x)$.
2. Pour tout $x \in I$, l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\omega+1}}$ étant décroissante, on a d'après la question 8 de la partie 1 :
$$0 \leqslant H_{\omega+1}(x) \leqslant \frac{1}{ax^{\omega+1}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\omega}\right).$$
On en déduit : $H_\omega(x) = \dfrac{1}{a}h_\omega(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(h_\omega(x))$, donc : $H_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a}h_\omega(x)$.

5. 1. Soit $x \in I$. Pour tout $t \in [1, x]$, on a $e^{-at} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^k}{k!}$, et donc :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t$$
$$= \ln(x) + \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t.$$

On aimerait permuter intégrale et somme ; c'est un problème d'interversion. Or la série entière $\sum_{k\geqslant 1} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}$ est de rayon de convergence infini : c'est, au terme constant près et à multiplication par t près, une série exponentielle (*on peut aussi invoquer la règle de D'Alembert*). En particulier, elle converge normalement (donc uniformément) sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence, qui est $\mathbb{R}$; elle converge donc uniformément sur le segment $[1, x]$, ce qui permet d'intégrer terme à terme :

$$\int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^x \frac{a^k t^{k-1}}{k!}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^k}{k!} \left[\frac{t^k}{k}\right]_1^x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!k} \left(x^k - 1\right).$$

On en déduit :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!k} \left(x^k - 1\right).$$

2. Soit $x \in I$. Par définition, et d'après la question précédente, on a :

$$H_1(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t = e^{ax} \left(\int_x^1 \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t\right)$$
$$= e^{ax} \left(-\ln(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!k} \left(x^k - 1\right) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t\right),$$

d'où le résultat.

Partie 3

1. On a $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r} f_r$ d'après la question 3.1 de la première partie. Or $\int_1^{+\infty} f_r = \int_1^{+\infty} e^{-rt}\mathrm{d}t$ converge pour $r > 0$ (c'est une intégrale de référence), donc $\int_1^{+\infty} U_a(f_r)$ converge.

2. Tout d'abord, H_ω est continue sur I d'après la question 2.3.b de la première partie. Ensuite, il a été démontré que $H_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a} h_\omega(x)$ dans la question 4.2 de la deuxième partie. Or $h_\omega : x \mapsto \frac{1}{x^\omega}$ est positive sur $[1, +\infty[$ et intégrable sur ce même intervalle si et seulement si $\omega > 1$, donc par comparaison de fonctions positives l'application H_ω est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\omega > 1$.

3. 1. Soit $x \in I$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, Φ est dérivable et on a $\Phi' = F$. Alors :

$$\Phi'(x) - F(1) = F(x) - F(1) = \int_1^x F'(t)\mathrm{d}t$$

et comme, d'après la question 1.4 de la première partie, l'application F est solution de (E_a^f), on a $F' = -f + aF$, donc :

$$\Phi'(x) - F(1) = -\int_1^x f(t)\mathrm{d}t + a\int_1^x F(t)\mathrm{d}t = -\varphi(x) + a\Phi(x),$$

d'où le résultat.

2. Puisque f est positive et intégrable sur I par hypothèse, pour tout $x \in I$ on a :

$$0 \leqslant \varphi(x) = \int_1^x f \leqslant \int_1^{+\infty} f.$$

Ceci montre que φ est bornée, et cette application est continue en tant que primitive de l'application continue f, donc $\varphi \in \mathscr{E}$.

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ converge revient précisément à démontrer que la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x F(t)\mathrm{d}t$ existe, et est finie.

Tout d'abord, puisque f est supposée positive, l'application $F : x \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est également positive, et donc l'application $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_1^x F(t)\mathrm{d}t$ est croissante. Par conséquent, Φ admet nécessairement une limite en $+\infty$, soit finie, soit infinie. Montrons par l'absurde qu'elle ne peut pas être infinie : si tel est le cas, alors l'égalité :

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = F(1) - \Phi'(x) + a\Phi(x)$$

implique, quand $x \to +\infty$, que $\varphi(x) \to +\infty$, car $a \neq 0$ et $\Phi' = F$ est bornée d'après la question 2.2 de la partie 1. Mais c'est impossible, puisque $\varphi \in \mathscr{E}$. Par l'absurde, on en déduit que Φ admet une limite finie, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\mathrm{d}t$ converge.

4. Soit $f \in \mathscr{E}$ une application intégrable ; alors $|f| \in \mathscr{E}$ est à valeurs positives et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f|$ converge. D'après les questions 3.1 à 3.3 de cette partie, on en déduit que $U_a(|f|)$ est intégrable sur I. Or, d'après la question 6 de la partie 1, on a $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$; par comparaison, l'application $U_a(f)$ est intégrable sur I.