

I-1) $(S) \Leftrightarrow AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

I-2) $\det(A) = 4$. Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible.

I-3) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{Com}A) = \frac{1}{4} {}^t \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ donc $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

I-4) Comme $\det(A) \neq 0$, (S) est un système de Cramer.

Par suite, (S) admet une solution unique Q .

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}.B \text{ et } A^{-1}.B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ d'où } Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I-5.a) Si $J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $X - JX = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+2y-z \\ -y+2z \end{pmatrix}$

On en déduit que: $(S) \Leftrightarrow X = JX + K$ avec $K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

I-5.b) La matrice J est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que: $J = P.D.{}^tP$ (car $P \in O(3) \Leftrightarrow P^{-1} = {}^tP$).

I-5.c) $P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{2} = -\lambda \left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ donc $\text{sp}(J) = \left\{ 0_{(1)}, -\frac{\sqrt{2}}{2}_{(1)}, \frac{\sqrt{2}}{2}_{(1)} \right\}$.

En notant α le réel $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

- $(x, y, z) \in E_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ d'où $E_0 = \text{Vect}((1, 0, -1))$.
- $(x, y, z) \in E_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} -x\sqrt{2} + y = 0 \\ y - z\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z\sqrt{2} \end{cases}$ d'où $E_\alpha = \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$.
- $(x, y, z) \in E_{-\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} + y = 0 \\ y + z\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z\sqrt{2} \end{cases}$ d'où $E_{-\alpha} = \text{Vect}((1, -\sqrt{2}, 1))$.

La matrice étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Pour obtenir une matrice orthogonale P , on normalise les bases des droites vectorielles définissant les sous-espaces propres et on obtient:

$$J = P.D.^tP \text{ avec } P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

I-5.d) On vérifie par récurrence que: $\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = P.D^p.^tP$.

→ D'après la question précédente, ceci est vrai pour $p = 1$.

→ Si, pour un naturel p donné ($p \geq 1$), $J^p = P.D^p.^tP$
alors $J^{p+1} = J^p.J = (P.D^p.^tP).(P.D.^tP) = P.D^p.(^tP.P).D.^tP = P.D^{p+1}.^tP$
car $P \in O(3)$ donne $^tP.P = I_3$.

Pour $p = 0$, $J^0 = I_3$ et $P.D^0.^tP = P.I_3.^tP = P.^tP = I_3$ car $P \in O(3)$.

En conclusion: $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, J^p = P.D^p.^tP}$.

Note: On ne peut écrire $J^p = \frac{1}{2^p} P. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^p & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^p \end{pmatrix} .^tP$ que si $p \in \mathbb{N}^*$ car $0 \in \text{sp}(J)$.

I-6)
$$X^{(1)} = J.X^{(0)} + K = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \text{ donc } \boxed{X^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}} \text{ et } \boxed{\Delta^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

I-7) > `with(linalg):`
`X:=matrix(3,1,[1,2,0]):`
`J:=matrix(3,3,[0,1,0,1,0,1,0,1,0])/2:`
`K:=matrix(3,1,[3,-5,5])/2:`
`for p from 1 to 2008 do X:=evalm(J&*X+K) od:`
`evalm(X);`

I-8.a) Par définition: $\forall p \in \mathbb{N}, X^{(p+1)} = J.X^{(p)} + K$ et on a vu que: $Q = J.Q + K$.
Par soustraction membre à membre, il vient: $\forall p \in \mathbb{N}, X^{(p+1)} - Q = J.(X^{(p)} - Q)$
soit $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \Delta^{(p+1)} = J.\Delta^{(p)}}$.

On en déduit par récurrence que: $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \Delta^{(p)} = J^p.\Delta^{(0)}}$.

→ Pour $p = 0$, la propriété est vraie car elle s'écrit $\Delta^{(0)} = I_3.\Delta^{(0)}$.

→ Si, pour un naturel p donné ($p \geq 0$), $\Delta^{(p)} = J^p.\Delta^{(0)}$,
alors $\Delta^{(p+1)} = J.\Delta^{(p)} = J.J^p.\Delta^{(0)} = J^{p+1}.\Delta^{(0)}$ d'où l'hérédité.

En tenant compte de la relation: $\forall p \in \mathbb{N}, J^p = P.D^p.^tP$,

on obtient: $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \Delta^{(p)} = P.D^p.^tP.\Delta^{(0)}}$.

I-8.b) On fait une disjonction des cas.

$$\rightarrow \text{ Si } p = 0 \text{ alors } \|D^0.U\| = \|U\| \text{ car } D^0 = I_3 \text{ et } \frac{1}{2^{0/2}} = 1 \text{ donc } \|D^0.U\| \leq \frac{1}{2^{0/2}} \|U\|.$$

$$\rightarrow \text{ Si } p \in \mathbb{N}^* \text{ alors } D^p.U = \frac{1}{2^p} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2})^p & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt{2})^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2^p} \begin{pmatrix} 0 \\ b(\sqrt{2})^p \\ c(-\sqrt{2})^p \end{pmatrix}$$

$$\text{ et } \|D^p.U\| = \frac{1}{2^p} \sqrt{0^2 + b^2 \cdot 2^p + c^2 \cdot 2^p} = \frac{1}{2^{p/2}} \sqrt{b^2 + c^2} \leq \frac{1}{2^{p/2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{2^{p/2}} \|U\|.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \|D^p.U\| \leq \frac{1}{2^{p/2}} \|U\|}.$$

I-8.c) $\rightarrow {}^tU.U = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 \text{ donc } \boxed{\|U\| = \sqrt{{}^tU.U}}.$

$$\rightarrow \text{ Comme } P \text{ est une matrice orthogonale, } \boxed{\|P.U\| = \|U\|}.$$

$$\text{ En effet, } \|P.U\|^2 = (P.U) \cdot (P.U) = {}^tU \cdot {}^tP.P.U = {}^tU.U = \|U\|^2 \text{ car } {}^tP.P = I_3.$$

L'égalité des carrés entraîne l'égalité des normes car ce sont des réels positifs.

$$\text{ On vérifie de même que: } \boxed{\|{}^tP.U\| = \|U\|}.$$

I-8.d) $\rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, \|\Delta^{(p)}\| = \|P.(D^p \cdot {}^tP.\Delta^{(0)})\| = \|D^p.({}^tP.\Delta^{(0)})\| \leq \frac{1}{2^{p/2}} \|{}^tP.\Delta^{(0)}\| = \frac{1}{2^{p/2}} \|\Delta^{(0)}\|.$

$$\text{ Donc } \boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \|\Delta^{(p)}\| \leq \frac{1}{2^{p/2}} \|\Delta^{(0)}\|}.$$

$$\rightarrow \text{ Comme } \Delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \|\Delta^{(0)}\| = \sqrt{0^2 + 9 + 4} = \sqrt{13}.$$

$$\text{ Par suite: } \boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \|\Delta^{(p)}\| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}}.$$

I-9) Si $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \|U\| \\ |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \|U\| \\ |c| = \sqrt{c^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \|U\| \end{cases}$

$$\text{ Comme } \Delta^{(p)} = \begin{pmatrix} x^{(p)} - 1 \\ y^{(p)} + 1 \\ z^{(p)} - 2 \end{pmatrix}, \text{ par transitivité, la relation } \|\Delta^{(p)}\| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}$$

$$\text{ donne: } \boxed{\forall p \in \mathbb{N}, |x^{(p)} - 1| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}, |y^{(p)} + 1| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}} \text{ et } |z^{(p)} - 2| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}}.$$

I-10) $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{13}{2^p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{13} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p = 0 \text{ car } \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1.$

$$\text{ Par suite: } \boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} x^{(p)} = 1, \lim_{p \rightarrow +\infty} y^{(p)} = -1 \text{ et } \lim_{p \rightarrow +\infty} z^{(p)} = 2}.$$

I-11) La relation $\|\Delta^{(p)}\| \leq 10^{-3}$ est assurée dès que $\sqrt[p]{\frac{13}{2^p}} \leq 10^{-3}$.
 Celà se traduit par $\frac{13}{2^p} \leq 10^{-6}$ donc par $2^p \geq 13 \cdot 10^6$ ce qui donne $p \geq \frac{\ln 13 + 6 \ln 10}{\ln 2}$.
 Comme $\frac{\ln 13 + 6 \ln 10}{\ln 2} \approx 23,6$ il suffit de choisir $\boxed{p = 24}$.

Note: le programme de la question I-7 donne pour cette valeur
 $x^{(24)} \approx 0.999756$, $y^{(24)} \approx -0.999268$ et $z^{(24)} \approx 1.999756$

II-1) $\rightarrow M \in E \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = a \cdot I_3 + b \cdot A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
 donc $\boxed{E = \text{Vect}(I_3, A) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel, sev de } M_3(\mathbb{R})}$.

$\rightarrow$ La famille (I_3, A) est une famille génératrice de E et elle est libre
 car $aI_3 + bA = O_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{pour les termes diagonaux} \\ b = 0 & \text{pour les autres termes} \end{cases}$
 Par suite (I_3, A) est une base de E .
 On en déduit que: $\boxed{\dim(E) = 2}$.

II-2) On note tout d'abord que: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + A$.
 Soit $M = aI_3 + bA$ et $N = \alpha I_3 + \beta A$ deux matrices quelconques de E ,
 $MN = a\alpha I_3 + (a\beta + b\alpha)A + b\beta A^2 = (a\alpha + 2b\beta)I_3 + (a\beta + b\alpha + b\beta)A \in E$.
 Donc $\boxed{E \text{ est stable pour le produit matriciel}}$.

II-3) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, J(a, b)$ et $U(b)$ sont des matrices symétriques réelles.
 Par suite, $\boxed{J(a, b) \text{ et } U(b) \text{ sont diagonalisables}}$ (dans des bases orthonormales de vecteurs propres).

II-4) Les trois vecteurs colonnes de $U(b)$ sont égaux et non nuls car $b \neq 0$. Par suite: $\boxed{\text{rg}[U(b)] = 1}$.
 Le théorème du rang donne alors $\dim \text{Ker}[U(b)] = 3 - \text{rg}[U(b)]$ donc $\boxed{\dim \text{Ker}[U(b)] = 2}$.

II-5) $J(a, b) - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} a - \lambda & b & b \\ b & a - \lambda & b \\ b & b & a - \lambda \end{pmatrix}$.
 Par suite, $J(a, b) - \lambda I_3 = U(b) \Leftrightarrow a - \lambda = b \Leftrightarrow \boxed{\lambda = a - b}$.

II-6) Si $\lambda = a - b$ alors $\text{rg}[J(a, b)] = \text{rg}[U(b)] = 1 \neq 3$ donc $\boxed{a - b \in \text{Sp}(A) \text{ et } \dim E_{a-b} = 2}$.

II-7) $J(a, b)$ étant diagonalisable:
 • la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée,
 • la somme des valeurs propres est égale à la trace de $J(a, b)$.
 Par suite, si on note μ l'autre valeur propre (simple) de $J(a, b)$,
 $2(a - b) + \mu = 3a$ d'où $\boxed{\mu = a + 2b}$.

III-1.a) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ alors $l_1 = 5, l_2 = 1$ et $l_3 = 6$ d'où $\boxed{\varphi(A) = 6}$.

III-1.b) Si $U = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $\|U\|_\infty = \max\{2, 4, 3\}$ donc $\boxed{\|U\|_\infty = 4}$.

III-2.a) On a immédiatement
$$\begin{cases} x' = m_{1,1}.x + m_{1,2}.y + m_{1,3}.z \\ y' = m_{2,1}.x + m_{2,2}.y + m_{2,3}.z \\ z' = m_{3,1}.x + m_{3,2}.y + m_{3,3}.z \end{cases}.$$

III-2.b) $|x'| \leq |m_{1,1}|.|x| + |m_{1,2}|.|y| + |m_{1,3}|.|z| \leq (|m_{1,1}| + |m_{1,2}| + |m_{1,3}|) \times \|X\|_\infty$ car $\begin{cases} |x| \leq \|X\|_\infty \\ |y| \leq \|X\|_\infty \\ |z| \leq \|X\|_\infty \end{cases}$
donc $\boxed{|x'| \leq l_1 \times \|X\|_\infty}$.

On montre de même que: $\boxed{|y'| \leq l_2 \times \|X\|_\infty}$ et $\boxed{|z'| \leq l_3 \times \|X\|_\infty}$.

III-2.c) $\rightarrow \|M.X\|_\infty = \max\{|x'|, |y'|, |z'|\} \leq \max\{l_1 \times \|X\|_\infty, l_2 \times \|X\|_\infty, l_3 \times \|X\|_\infty\}$
donc $\|M.X\|_\infty \leq \max\{l_1, l_2, l_3\} \times \|X\|_\infty$ soit $\boxed{\|M.X\|_\infty \leq \varphi(M). \|X\|_\infty}$.

$\rightarrow \|M'.M.X\|_\infty = \|M'.(M.X)\|_\infty \leq \varphi(M'). \|M.X\|_\infty$
Comme $\varphi(M') \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que: $\varphi(M'). \|M.X\|_\infty \leq \varphi(M'). \varphi(M). \|X\|_\infty$
Donc $\boxed{\|M'.M.X\|_\infty \leq \varphi(M'). \varphi(M). \|X\|_\infty}$.

IV-1) Comme $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ et $a_{33} \neq 0$,
 $L_1 \leftarrow a_{11}L_1$
 $L_2 \leftarrow a_{22}L_2$ donne $(S_J) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}.x = -a_{12}.y - a_{13}.z + a \\ a_{22}.y = -a_{21}.x - a_{23}.z + b \\ a_{33}.z = -a_{31}.x - a_{32}.y + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}.x + a_{12}.y + a_{13}.z = a \\ a_{21}.x + a_{22}.y + a_{23}.z = b \\ a_{31}.x + a_{32}.y + a_{33}.z = c \end{cases}$
 $L_3 \leftarrow a_{33}L_3$
Donc $\boxed{(S) \Leftrightarrow (S_J)}$.

IV-2) Le système (S_J) s'écrit $X = J.X + K$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} \frac{a}{a_{11}} \\ \frac{b}{a_{22}} \\ \frac{c}{a_{33}} \end{pmatrix}$.

IV-3) $\rightarrow$ Par définition: $\forall p \in \mathbb{N}, X^{(p+1)} = J.X^{(p)} + K$ et Q vérifie: $Q = J.Q + K$.
Par soustraction membre à membre, il vient: $\forall p \in \mathbb{N}, X^{(p+1)} - Q = J.(X^{(p)} - Q)$
soit $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \Delta^{(p+1)} = J.\Delta^{(p)}}$.

$\rightarrow$ On en déduit que: $\boxed{\|\Delta^{(p+1)}\|_\infty = \|J.\Delta^{(p)}\|_\infty \leq \varphi(J). \|\Delta^{(p)}\|_\infty}$.

IV-4) Une récurrence donne alors: $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} \leq (\varphi(J))^p \cdot \|\Delta^{(0)}\|_{\infty}}$.
 $\rightarrow$ Pour $p = 0$, la relation est vraie car $(\varphi(J))^0 = 1$.
 $\rightarrow$ Si, pour un naturel p donné ($p \geq 0$), $\|\Delta^{(p)}\|_{\infty} \leq (\varphi(J))^p \cdot \|\Delta^{(0)}\|_{\infty}$
alors $\|\Delta^{(p+1)}\|_{\infty} \leq \varphi(J) \cdot \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} \leq \varphi(J) \cdot (\varphi(J))^p \cdot \|\Delta^{(0)}\|_{\infty} = (\varphi(J))^{p+1} \cdot \|\Delta^{(0)}\|_{\infty}$ d'où l'hérédité.

IV-5) On sait que $\varphi(J) \geq 0$. Si $\varphi(J) < 1$ alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\varphi(J))^p = 0$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} = 0$.

$\boxed{\text{La condition } \varphi(J) < 1 \text{ notée } (C_1) \text{ est suffisante pour que } \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} = 0}$.

IV-6.a) $\forall p \in \mathbb{N}, \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} = \max\{|\alpha^{(p)}|, |\beta^{(p)}|, |\gamma^{(p)}|\}$ d'où $\boxed{\begin{cases} |\alpha^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} \\ |\beta^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} \\ |\gamma^{(p)}| \leq \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} \end{cases}}$.

IV-6.b) $\forall p \in \mathbb{N}, X^{(p)} = \Delta^{(p)} + Q$ donc $\begin{pmatrix} x^{(p)} \\ y^{(p)} \\ z^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{(p)} + q_1 \\ \beta^{(p)} + q_2 \\ \gamma^{(p)} + q_3 \end{pmatrix}$.

Si (C_1) est vérifiée alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} = 0$ donc $\begin{cases} \lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha^{(p)} = 0 \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \beta^{(p)} = 0 \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} \gamma^{(p)} = 0 \end{cases}$

Par suite, $\boxed{\text{si } (C_1) \text{ est vérifiée alors } \begin{cases} \lim_{p \rightarrow +\infty} x^{(p)} = q_1 \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} y^{(p)} = q_2 \\ \lim_{p \rightarrow +\infty} z^{(p)} = q_3 \end{cases}}$.

IV-7) Si $J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $l_1 = l_3 = \frac{1}{2}$ et $l_2 = 1$ donc $\varphi(J) = 1$.

$\boxed{\text{La matrice } J \text{ de la partie I ne vérifie pas } (C_1)}$.

La condition (C_1) est donc une condition suffisante mais pas nécessaire de convergence.

IV-8.a) En utilisant le III-2.c, une récurrence immédiate donne: $\forall p \in \mathbb{N}, \|D^p \cdot X\|_{\infty} \leq (\varphi(D))^p \cdot \|X\|_{\infty}$.
Par suite, $\forall p \in \mathbb{N}, \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} = \|P \cdot (D^p \cdot P^{-1} \cdot \Delta^{(0)})\|_{\infty} \leq \varphi(P) \cdot \|D^p \cdot (P^{-1} \cdot \Delta^{(0)})\|_{\infty} \leq \varphi(P) \cdot (\varphi(D))^p \cdot \|P^{-1} \cdot \Delta^{(0)}\|_{\infty}$
et, finalement $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} \leq \varphi(P) \cdot (\varphi(D))^p \cdot \varphi(P^{-1}) \cdot \|\Delta^{(0)}\|_{\infty}}$.

IV-8.b) Si $\varphi(D) < 1$ alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\varphi(D))^p = 0$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} = 0$.

Si J est semblable à une matrice diagonale D ,

une condition (C_2) suffisante pour que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\Delta^{(p)}\|_{\infty} = 0$ est $\boxed{\varphi(D) < 1}$.

IV-8.c) Si $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors $\varphi(D) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

$\boxed{\text{La matrice } D \text{ de la partie I vérifie donc } (C_2)}$.

IV-9.a) Pour $J(a, b)$, $l_1 = l_2 = l_3 = |a| + 2|b|$ donc $\boxed{\varphi(J(a, b)) = |a| + 2|b|}$

et $D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi(D) = \max\{|a-b|, |a+2b|\}}$.

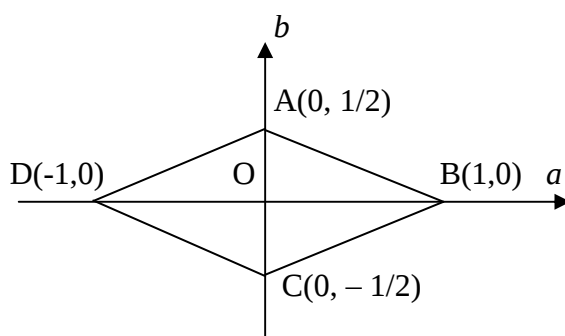
IV-9.b) Si $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{3}$

alors $\varphi\left(J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{6} > 1$ donc $\boxed{J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \text{ ne vérifie pas } (C_1)}$,

et $\varphi(D) = \max\left\{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right|, \left|\frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3}\right|\right\} = \max\left\{\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right\} = \frac{5}{6} < 1$ donc $\boxed{J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \text{ vérifie } (C_2)}$.

IV-9.c) → La condition (C_1) correspond à l'intérieur du losange ABCD ci-dessous frontière exclue

$$\text{car } |a| + 2|b| < 1 \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ et } a + 2b < 1 & (\text{OAB}) \\ a \leq 0 \text{ et } b \geq 0 \text{ et } -a + 2b < 1 & (\text{OAD}) \\ a \geq 0 \text{ et } b \leq 0 \text{ et } a - 2b < 1 & (\text{OBC}) \\ a \leq 0 \text{ et } b \leq 0 \text{ et } -a - 2b < 1 & (\text{OCD}) \end{cases}$$



→ La condition (C_2) correspond à l'intérieur du parallélogramme ABCD ci-dessous frontière exclue

$$\text{car } \max\{|a-b|, |a+2b|\} < 1 \Leftrightarrow \text{et} \begin{cases} -1 < a-b < 1 \\ -1 < a+2b < 1 \end{cases}$$

