

I. Détermination de $\text{Rac}(A)$ dans quelques exemples.

Exemple 1 : Cas où A possède n valeurs propres distinctes.

1. Comme A possède n valeurs propres réelles deux à deux distinctes, A est R -diagonalisable (cours classique) i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Il vient alors que $R^2 = A$ si et seulement si (puisque P est inversible) $P^{-1}R^2P = D$ soit si et ssi $(P^{-1}RP)^2 = D$. $\square$
Ainsi $\text{Rac}(A) = P \text{Rac}(D) P^{-1}$.
2. a. Soit S une racine carrée de D . On a $SS^2 = S^2S (= S^3)$ donc $SD = DS$. $\square$
2. b. Comme S commute avec D , tout sous-espace propre de D est stable par S . Or comme les valeurs propres de D sont deux à deux distinctes, les sous-espaces propres de D sont des droites. Il en découle que les n droites propres de D sont stables par S ce qui prouve que S est diagonale. $\square$
2. c. On a évidemment $s_i^2 = \lambda_i$. $\square$
2. d. Si A admet une valeur propre strictement négative, il en découle que $\text{Rac}(A)$ est l'ensemble vide. $\square$
2. e. Il découle de ce qui précède que si toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles alors :
 $\text{Rac}(D) = \{ \text{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}) \}$. $\square$
3. Compte tenu de ce qui précède A admet au moins une racine carrée si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles et alors $\text{Rac}(A) = \{ P \text{diag}(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}) P^{-1} \}$.
Il y en a alors donc 2^n si les valeurs propres sont toutes strictement positives et 2^{n-1} si 0 est valeur propre. $\square$
4. Notons déjà que comme A est symétrique réelle, elle est orthodagonalisable.
En outre en faisant la somme des deux dernières colonnes on constate que 0 est valeur propre et que $(0, 1, 1)$ est vecteur propre associé.
En exploitant cette remarque, on remplace dans le polynôme caractéristique la dernière colonne par elle-même plus la seconde ce qui permet de factoriser X . On se ramène alors classiquement à un déterminant d'ordre 2 (une fois qu'on a factorisé par X , on remplace la deuxième ligne par elle-même moins la troisième). Il vient ainsi très rapidement que le polynôme caractéristique est $X(X^2 - 17X + 16) = X(X - 1)(X - 16)$.
On peut d'ailleurs vérifier que la trace de A est bien égale à 17.
Un calcul immédiat montre que $(1, 1, -1)$ est vecteur propre relatif à 1.
Soit par calcul direct soit par produit vectoriel (puisque A est ortho-diagonalisable) il vient que $(2, -1, 1)$ est vecteur propre relatif à 16.

Ainsi les racines carrées de A sont les 4 matrices $P \text{diag}(0, \varepsilon_2, 4\varepsilon_3)^t P$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. $\square$
($P^{-1} = {}^tP$ car P est orthogonale, ce qui permet déconomiser le calcul de P^{-1} .)

Exemple 2 : Cas où A est la matrice nulle.

5. a. $f^2 = 0$ si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. Il en découle immédiatement par le théorème du rang que $\text{rg } f \leq \frac{n}{2}$. $\square$
5. b. Remarquons une faute dans l'énoncé : il faut lire "un" vecteur u_i et non pas "le" vecteur : les vecteurs en question formant un sous-espace affine de dimension $n - r \geq \frac{n}{2}$.

Remarquons aussi que la complétion d'une base de $\text{Im } f$ en une base de $\text{Ker } f$ est bien possible car $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ (et bien sûr le théorème de la base incomplète).

Soit alors une famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}, \beta_1, \dots, \beta_r)$ de n réels telle que $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^r \beta_j u_j = 0$ (1).

En appliquant f , et en tenant compte du fait que $f(e_i) = 0$ pour tout i , il vient que $\sum_{j=1}^r \beta_j f(u_j) = 0$.

Comme la famille $(e_j)_{j=1, \dots, r}$ est libre on obtient que les β_j sont nuls.

En reportant dans (1) il vient que $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i = 0$ donc que les α_i sont nuls également puisque la famille $(e_i)_{i=1, \dots, n-r}$ est libre.

Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est-elle libre donc une base de $\mathbb{R}^n$ puisque de cardinal n . $\square$

La matrice de f dans cette base est la matrice bloc $M_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

6. a. Il découle de ce qui précède que si M est de carré nul alors soit $M = 0$ soit M est semblable à une matrice de type M_r avec $r \leq \frac{n}{2}$. Réciproquement si $r \leq \frac{n}{2}$ un calcul facile prouve que $M_r^2 = 0$ (car $r \leq n/2$) donc que toute matrice semblable à M_r est de carré nul.
En conclusion les racines carrées de la matrice nulle sont la matrice nulle et les matrices semblables à une matrice M_r avec $r \leq \frac{n}{2}$. $\square$
6. b. En particulier les matrices carrées d'ordre 4 de carré nul sont la matrice nulle et les matrices semblables à M_1 ou à M_2 . $\square$

Exemple 3 : Cas où A est la matrice identité.

7. b. On a $R^2 = I_n$ donc $\det R = \pm 1$ ce qui prouve que R est inversible (d'ailleurs d'inverse elle-même). $\square$
7. b. R est annulé par le polynôme $X^2 - 1$ scindé à racines simples sur R donc R -diagonalisable et les valeurs propres sont à rechercher parmi $\{-1, 1\}$. Donc R est semblable à une matrice $J_p = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ avec p fois 1 ($0 \leq p \leq n$). $\square$
8. Réciproquement on a bien sûr $J_p^2 = I_n$ donc également pour toute matrice semblable.
Ainsi les racines carrées de l'identité sont les matrices semblables à l'une des $n + 1$ matrices J_p avec $0 \leq p \leq n$. $\square$
En d'autres termes ce sont les symétries par rapport à un sous-espace parallèlement à un sous-espace supplémentaire.

Exemple 3 : Cas où A est une matrice symétrique réelle.

9. Une matrice symétrique n'admet pas forcément de racine carrée comme le prouve l'exemple de la matrice (-1) avec $n = 1$! $\square$
10. Soit M symétrique réelle positive. Elle est, par théorème de cours, ortho-diagonalisable donc $M = PDP^{-1} = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 0$ pour tout i puisque M est positive. Soit alors $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.
La matrice $R = P\Delta^tP$ est alors symétrique. En outre elle est positive puisque semblable à Δ donc à valeurs propres positives ou nulles. Enfin on a $R^2 = (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = M$.
Ainsi une matrice symétrique positive admet-elle au moins une racine carrée également symétrique positive. $\square$

II. Étude topologique de $\text{Rac}(A)$.

Commençons par noter que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, on pourra utiliser (pour ce qui est des propriétés topologiques) n'importe quelle norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'elles sont toutes équivalentes.

11. En tant qu'application bilinéaire sur un produit de deux espaces de dimension finie, le produit matriciel est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il en découle que l'application $M \mapsto M^2$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Ainsi $\text{Rac}(A)$ est-elle une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{A\}$ par une application continue. $\square$
12. a. Il est immédiat que $\{S_q\}_{q \in \mathbb{N}} \subset \text{Rac}(I_2)$ ce qui prouve que $\text{Rac}(I_2)$ est non borné. $\square$
12. b. D'une manière générale, pour $n \geq 3$, soit M_q la matrice bloc $\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & S_q \end{pmatrix}$.
Un calcul par blocs montre que $M_q \in \text{Rac}(I_n)$. Or $N(M_q) = q$ donc $\text{Rac}(I_n)$ est une partie non bornée pour tout $n \geq 2$. $\square$
12. c. Supposons qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur-multiplicative sur $GL_n(\mathbb{R})$.
On aurait en particulier $\|I_n\| = \|M_q^2\| \geq \|M_q\|^2$ pour tout entier q . Ce qui est impossible car en vertu de l'équivalence des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\|M_q\| \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} +\infty$. $\square$

III. Intérieur de $\text{Rac}(A)$.

13. a. $B_\infty(a, r) = \prod_{i=1}^p]a_i - r, a_i + r[$. $\square$
13. b. Si $A \subset B$ il est immédiat que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ puisque $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert inclus dans A donc dans B . Il en découle que si $\underline{F}$ ou $\underline{G}$ est d'intérieur vide, il en va a fortiori de $\underline{F} \cap \underline{G}$. $\square$
14. a. On sait qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines (immédiate conséquence par exemple du théorème de division euclidienne qui prouve que a est racine de P si et seulement si $X - a$ divise P).
Donc le polynôme nul est le seul polynôme à une variable tel que $Z(P)$ soit infini. $\square$
14. b. $Z(P)$ est la droite d'équation $y = 2x - 1$ et $Z(Q)$ la parabole d'équation $y = x^2$. Ces deux ensembles sont donc infinis. $\square$

- 15.a.** On raisonne par récurrence sur p , le résultat étant vrai pour $p = 1$ d'après 14.a. Supposons le vrai jusqu'au rang p avec $p \geq 1$ et soit $P \in \Gamma_{p+1}$ tel que P s'annule sur $I_1 \times \cdots \times I_{p+1}$ avec I_i partie infinie de $\mathbb{R}$. Supposons que P soit non nul i.e. qu'il existe $(a_1, \dots, a_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $P(a_1, \dots, a_{p+1}) \neq 0$. Pour $\alpha \in I_1$ notons Q_α le polynôme à p variables défini par $Q_\alpha(x_2, \dots, x_{p+1}) = P(\alpha, x_2, \dots, x_{p+1})$. Ce polynôme s'annule sur $I_2 \times \cdots \times I_{p+1}$ donc est nul par hypothèse de récurrence. En particulier $Q_\alpha(a_2, \dots, a_{p+1}) = P(\alpha, a_2, \dots, a_{p+1}) = 0$ pour tout $\alpha \in I_1$. Soit alors R le polynôme à une variable défini par $R(x) = P(x, a_2, \dots, a_{p+1})$. Ce polynôme est nul pour tout $\alpha \in I_1$ et admet donc une infinité de racines donc est nul. En particulier $R(a_1) = P(a_1, a_2, \dots, a_{p+1}) = 0$. Contradiction qui prouve que le résultat est vrai au rang $p + 1$. $\square$
- 15.b.** Immédiate conséquence de la question précédente et de la question 13a. $\square$
- 15.c.** Ainsi si P n'est pas le polynôme nul alors $Z(P)$ est d'intérieur vide. $\square$
- 16.a.** Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors les coefficients de M^2 sont des polynômes $Q_{i,j}$ à p^2 variables $m_{i,j}$. Notons $P_{i,j} = Q_{i,j} - a_{i,j}$. Il vient alors que $Rac(A) = \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} Z(P_{i,j})$. $\square$
- 16.b.** En remarquant que les polynômes $Q_{i,j}$ sont non nuls et donc également les polynômes $P_{i,j}$ (et cela pour toute matrice A) il découle de la question 15. que l'intérieur de $Rac(A)$ est vide pour toute matrice A . $\square$

————— *FIN* —————