

Corrigé Mines-Ponts 2001 Maths 1 - PSI

François Jaboeuf - Lycée JOFFRE - MONTPELLIER

12 juin 2001

PARTIE I

Remarquons d'abord que la définition de la semi-linéarité de u est équivalente aux propriétés :

$$u \text{ est un morphisme additif de } E \text{ tel que : } \forall (a, x) \in \mathbb{C} \times E, u(ax) = \bar{a}x$$

(dans la définition de l'énoncé prendre $a=1$ pour le morphisme additif ; prendre $y=0$ pour la deuxième propriété - la réciproque est immédiate).

1 Question N° 1 : Premières propriétés :

1.a) : C'est immédiat puisque l'égalité $(\mu - \lambda)x = 0$ entraîne, sachant que x est non nul, $(\mu - \lambda) = 0$.

1.b) : Si x est un vecteur co-propre de u associé à μ et α un réel alors :

$$u(e^{i\alpha}x) = e^{-i\alpha}u(x) = e^{-i\alpha}\mu x = (\mu e^{-2i\alpha})e^{i\alpha}x$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = -\frac{\theta}{2}$ et $y = e^{-i\frac{\theta}{2}}x$ qui est bien non nul et vérifie : $u(y) = \mu e^{i\theta}y$; y est donc un vecteur co-propre de u associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$.

Cette propriété prouve donc que dès qu'une application semi-linéaire u admet une valeur co-propre non nulle, elle en admet une infinité (de même module) dont une réelle positive (en prenant $\theta = -\arg(\mu)$). De plus il suffit de connaître les valeurs co-propres réelles positives pour les avoir toutes : le "co-spectre" de u sera la réunion dans le plan complexe des cercles centrés en 0 et de rayon les valeurs co-propres réelles positives : **La notion d'éléments co-propres d'une application semi-linéaire semble donc sensiblement différente, malgré la définition, de la notion d'éléments propres d'une application linéaire.**

1.c) : Puisque u est un morphisme additif de E , l'ensemble $E_\mu = (u - I_d)^{-1}\{0\}$ est un sous-groupe additif de E . Etudions la stabilité pour la loi externe : Soit x un vecteur de E_μ et a dans $\mathbb{C}$.

$$ax \in E_\mu \Leftrightarrow u(ax) = \mu ax \Leftrightarrow \bar{a}\mu x = \mu ax \Leftrightarrow (x = 0) \text{ ou } (\bar{a} - a = 0) \text{ ou } (\mu = 0)$$

On en déduit immédiatement que E_μ est toujours un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et qu'il n'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ que si $\mu = 0$, puisqu'il n'est pas réduit au vecteur nul quand μ est une valeur co-propre.

1.d) : $u \circ v$ est un morphisme additif de E dans E puisque u et v le sont ; de plus par involution de la conjugaison : $\forall (a, x) \in \mathbb{C} \times E, (u \circ v)(ax) = u(\bar{a}v(x)) = a(u \circ v)(x)$. L'application $u \circ v$ est donc linéaire.

2 Question N° 2 : Matrice associée à une application semi-linéaire :

Introduisons ici une deuxième structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour E :

On définit une loi externe $*$ par : $\forall (a, x) \in \mathbb{C} \times E, a * x = \bar{a}x$ et il est aisé de vérifier, compte tenu des propriétés de la conjugaison (automorphisme du corps $\mathbb{C}$ stabilisant $\mathbb{R}$), que $(E; +, *)$ est encore un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel que nous noterons $\tilde{E}$. Ainsi $\tilde{E}$ est le même ensemble que E mais sa structure d'espace vectoriel est différente. De plus pour toute famille $(t_1, \dots, t_k)$ de E et toute famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de $\mathbb{C}$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i * t_i = \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i t_i$; on en déduit aussitôt que E et $\tilde{E}$ ont les mêmes bases, la même dimension n et que tout vecteur x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E a pour coordonnées dans cette même base, mais considérée comme base de $\tilde{E}$, $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Enfin si u est une application semi-linéaire de E dans E ,

le même u devient une application linéaire de $\tilde{E}$ dans E , ou de E dans $\tilde{E}$ puisque u est un morphisme additif et que pour tout x dans E : $u(a * x) = u(\bar{a}x) = \overline{au(x)}$ ou $u(ax) = \bar{a}u(x) = a * u(x)$ (la réciproque étant également vraie).

On retrouve ainsi aisément le résultat du 1.d, puisque v est linéaire de E dans $\tilde{E}$ et u linéaire de $\tilde{E}$ dans E : par composition l'application $u \circ v$ est bien linéaire de E dans E .

2.a) : Notons A la matrice carrée complexe d'ordre n de u considéré comme application linéaire de $\tilde{E}$ dans E : Les colonnes de A sont les coordonnées "habituelles" des vecteurs $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et la matrice colonne des coordonnées du vecteur x de $\tilde{E}$ dans cette même base est $\bar{X}$. On sait qu'alors la relation $y = u(x)$ est caractérisée matriciellement par $Y = A\bar{X}$.

2.b) : Si S est la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E à la base $(f_1, \dots, f_n)$ de E , ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne ; Considérons maintenant ces bases comme des bases de l'espace $\tilde{E}$, d'après les remarques ci-dessus, les coordonnées de ces nouveaux vecteurs dans l'ancienne base de $\tilde{E}$ sont les conjuguées de leurs coordonnées dans cette même ancienne base considérée dans E . Finalement la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\tilde{E}$ à la base $(f_1, \dots, f_n)$ de $\tilde{E}$ est donc $\boxed{\bar{S}}$. En appliquant la formule de changements de base pour les applications linéaires de $\tilde{E}$ dans E , on obtient :

$$\boxed{B = S^{-1}A\bar{S}}$$

3 Question N° 3 : Exemple :

3.a) : Pour $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$, la relation $A\bar{X} = \mu X$ est équivalente à $(\bar{b} = -\mu a, \bar{a} = \mu b)$.

D'où par conjugaison de la deuxième relation et report dans la première : $\bar{b} = -\mu\bar{\mu}\bar{b} = -|\mu|^2\bar{b}$.

Comme $1 + |\mu|^2 > 0$ on obtient nécessairement $b = 0$ puis $a = 0$ ce qui contredit la non nullité de X :

A n'a aucune valeur co-propre ni bien sur aucun vecteur co-propre.

3.b) : Si A est réelle et admet une valeur propre réelle λ , alors λ est une racine réelle du polynôme caractéristique de cette matrice et donc une valeur propre de A considérée dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il existe donc un vecteur propre réel X associé à λ : $AX = \lambda X = A\bar{X}$. Ainsi A admet λ comme valeur co-propre .

4 Question N° 4 : Correspondance entre les valeurs co-propres de A et les valeurs propres de $A\bar{A}$:

4.a) : Soit X un vecteur co-propre de A associé à μ : $A\bar{X} = \mu X$ et puisque la conjugaison, automorphisme involutif du corps $\mathbb{C}$, est compatible avec le produit matriciel : $A\bar{A}X = A\overline{A\bar{X}} = A\bar{\mu}\bar{X} = \bar{\mu}A\bar{X} = \bar{\mu}\bar{\mu}X = |\mu|^2X$. Puisque X est non nul c'est bien un vecteur propre de $A\bar{A}$ associé à la valeur propre $|\mu|^2$.

4.b) :

i) 1er cas : $A\bar{X}$ et X sont liés. Comme X est non nul, il existe un nombre complexe μ tel que : $A\bar{X} = \mu X$ et qui est donc une valeur co-propre de A . Les calculs du 4.a et l'unicité d'une valeur propre associée à un vecteur propre, montrent que $|\mu|^2 = \lambda$ et donc $\boxed{|\mu| = \sqrt{\lambda}}$. Utilisons maintenant la remarque rédigée à la question 1.b, valable ici pour l'application semi-linéaire u de $\mathbb{C}^n$ caractérisée par sa matrice A dans la base canonique (compte tenu des définitions, les éléments co-propres de u et de A sont les mêmes) : Tous les nombres complexes de même module que μ sont des valeurs co-propres de A et en particulier parmi eux $\boxed{|\mu| = \sqrt{\lambda}}$.

ii) 2ème cas : $A\bar{X}$ et X sont indépendants. Il est donc impossible d'obtenir X comme vecteur co-propre de A , mais cherchons une combinaison linéaire non triviale, $\boxed{\alpha A\bar{X} + \beta X}$ qui soit vecteur co-propre de A associé à la valeur co-propre $\boxed{\sqrt{\lambda}}$:

$$A(\alpha A\bar{X} + \beta X) = \sqrt{\lambda}(\alpha A\bar{X} + \beta X) \iff \bar{\alpha}A\bar{A}X + \bar{\beta}A\bar{X} = \beta\sqrt{\lambda}X + \alpha\sqrt{\lambda}A\bar{X} \iff (\bar{\beta} = \alpha\sqrt{\lambda} \text{ et } \bar{\alpha}\lambda = \beta\sqrt{\lambda})$$

puisque par hypothèse $A\bar{A}X = \lambda X$ et que la famille $(A\bar{X}, X)$ est libre.

Les valeurs $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{\lambda}$ vérifient les conditions ci-dessus ; on obtient alors le vecteur non nul (car la famille $(A\bar{X}, X)$ est libre) $Y = A\bar{X} + \sqrt{\lambda}X$ qui convient donc.

Dans tous les cas la valeur $\boxed{\sqrt{\lambda}}$ est bien une valeur co-propre de A .

4.c) : La condition est nécessaire d'après 4.a et suffisante d'après 4.b (μ étant un réel positif, $\sqrt{\mu^2} = \mu$).

4.d) : Il suffit, compte tenu du résultat précédent, d'étudier les valeurs propres réelles et positives de la matrice $A_m \overline{A_m} = A_m^2 = \begin{pmatrix} m^2 - 1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix}$ (m est réel).

Or le polynôme caractéristique $\chi_{A_m^2}(X) = X^2 - (m^2 - 2)X + 1$ est un trinôme de discriminant $\Delta = (m^2 - 2)^2 - 4 = m^2(m^2 - 4)$; les deux racines lorsqu'elles existent dans $\mathbb{R}$ sont de produit 1 et donc de même signe qui est aussi celui de leur somme $S = m^2 - 2$. Ainsi il y a des racines réelles (qui sont aussi les valeurs propres) si et seulement si $m = 0$ (-1 est alors valeur propre double) ou $m^2 \geq 4$ et dans ce dernier cas elles sont positives ($S = m^2 - 2 \geq 2$). compte tenu du 4.c, la condition

$|m| \geq 2$ est donc nécessaire et suffisante pour que la matrice A_m admette des valeurs co-propres réelles positives qui sont

$$\mu = \sqrt{\frac{m^2 - 2 + m\sqrt{m^2 - 4}}{2}} \text{ et } \frac{1}{\mu} \text{ (dans le cas } m = \pm 2, \text{ il y a une valeur propre double 1 et donc une valeur co-propre réelle de } A_m \text{ égale à 1).}$$

Remarquons que le cas $m = 0$ correspond à l'exemple du 3.a pour lequel la matrice A n'a pas de valeur co-propre conformément à 4.a et à l'étude ci-dessus.

5 Question N° 5 : Cas d'une matrice triangulaire supérieure :

Les résultats des questions 4.c et 1.b conduisent aux équivalences suivantes :

$$\forall \mu \in \mathbb{C}, (\mu \text{ valeur co-propre de } A) \iff (|\mu| \text{ valeur co-propre de } A) \iff (|\mu|^2 \text{ valeur propre de } A\overline{A})$$

Si maintenant A est une matrice triangulaire, d'éléments diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ qui en sont donc les valeurs propres, alors $A\overline{A}$ est encore triangulaire et d'éléments diagonaux $(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$ qui en sont les valeurs propres.

5.a) : D'après la caractérisation des valeurs co-propres que l'on vient de démontrer, les valeurs co-propres de A sont exactement les complexes μ tels que $|\mu|^2$ soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$ et donc ici tels que : $|\mu|$ soit de même module qu'une des valeurs propres de A ; c'est bien le cas de la valeur $\lambda e^{i\theta}$ proposée.

5.b) : De même si μ est une valeur co-propre de A , μ a même module qu'une valeur propre λ de A et donc sera de la forme : $\mu = \lambda e^{-i\theta}$ (avec θ réel).

Finalement pour une matrice A triangulaire, son "co-spectre" est la réunion dans le plan complexe des cercles centrés en 0 et rencontrant son spectre.

5.c) : A est ici triangulaire et d'après 5. les valeurs co-propres de A sont **exactement les complexes de module 1**, ce qui est le cas de 1. Cherchons un vecteur co-propre X associé à 1.

Si $a + ib$ et $c + id$ sont les écritures algébriques des coordonnées de X : $A\overline{X} = \begin{pmatrix} (b+c) + i(a-d) \\ d+ic \end{pmatrix}$, d'où

$$A\overline{X} = X \iff ((b+c) + i(a-d) = a+ib, d+ic = c+id) \iff (a=b+c, d=c) \iff X = \begin{pmatrix} b(1+i) + c \\ c(1+i) \end{pmatrix}.$$

Conformément à 1.c, l'espace $E_1(A)$ n'est autre que le plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$.

6 Question N° 6 : Une caractérisation des valeurs co-propres

B (respectivement C) est la matrice dont les coefficients sont les parties réelles (respectivement les parties imaginaires) des coefficients de A .

Remarquons tout d'abord, ce qui facilitera les calculs qui vont suivre, que d'après l'étude du 1.b, μ est valeur co-propre de A si et seulement si $|\mu|$ l'est. Soit X un vecteur non nul décomposé sous la forme $X = Y + iZ$, où Y et Z sont respectivement les parties réelles et imaginaires de X ; on a les équivalences suivantes :

$$(A\overline{X} = |\mu|X) \iff (BY + CZ + i(CY - BZ) = |\mu|Y + i|\mu|Z) \iff \begin{cases} BY + CZ = |\mu|Y \\ CY - BZ = |\mu|Z \end{cases}$$

par unicité des parties réelles et imaginaires et sachant que $|\mu|$ est réelle. Le système obtenu est équivalent au système de taille $2n$, défini par les blocs suivants :

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est non nul. Ce système n'est autre que celui qui caractérise les vecteurs propres $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ associé à la valeur propre $|\mu|$ pour la matrice "blocs" D . On a bien la caractérisation demandée.

PARTIE II

compte tenu de l'interprétation de la semi-linéarité étudiée au I)2., des résultats du I)2.b et des définitions de l'énoncé, sachant de plus que pour S dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$ puisque $\overline{SS^{-1}} = \overline{S^{-1}S} = \overline{SS^{-1}} = I_n$, les deux matrices A et B sont "co-semblables" (dans cet ordre) si et seulement si elle sont associées à une même application semi-linéaire u dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E ; S^{-1} étant la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ (dans laquelle A est la matrice de u) à l'autre base $\mathcal{B}'$.

1 Question N° 1 : Une relation d'équivalence :

La relation de "co-similitude" entre deux matrices carrées complexes d'ordre n est la même que la relation binaire "représenter une même application semi-linéaire de l'espace E dans deux bases" qui est clairement Reflexive, Symétrique et Transitive donc d'équivalence.

2 Question N° 2 : Indépendance des vecteurs co-propres :

Démontrons la propriété demandée par récurrence sur l'entier k :

- i) Pour $k=1$ c'est immédiat puisque, X_1 étant non nul, la famille (X_1) est libre .
- ii) Pour $k \geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $(k-1)$: la famille $(X_1, \dots, X_{k-1})$ est libre et ce sera donc le cas de la famille $(X_1, \dots, X_k)$ si et seulement si X_k n'est pas combinaison linéaire de $(X_1, \dots, X_{k-1})$. Supposons par l'absurde qu'il existe $(k-1)$ complexes $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ tels que $X_k = \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p X_p$ alors

$$A\overline{X_k} = \sum_{p=1}^{k-1} \overline{\alpha_p} A\overline{X_p} = \sum_{p=1}^{k-1} \overline{\alpha_p} \mu_p X_p = \mu_k X_k = \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p \mu_k X_p$$

et puisque la famille $(X_1, \dots, X_{k-1})$ est libre :

$$\forall p \in \{1, \dots, k-1\}, \mu_k \alpha_p = \mu_p \overline{\alpha_p} \text{ d'où } |\mu_k| |\alpha_p| = |\mu_p| |\alpha_p|$$

et puisque $p \neq k \Rightarrow |\mu_k| \neq |\mu_p|$, on en déduit que tous les α_p sont nuls ce qui contredit la non nullité du vecteur co-propre $X_k = \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p X_p$.

Remarquons que ce résultat devient faux avec des valeurs propres différentes et de même module comme on l'a vu au I)1.b.

Dans l'hypothèse où la matrice $A\overline{A}$ a n valeurs propres positives et distinctes, d'après I)4.c la matrice A admet les n co-valeurs propres réelles positives distinctes (donc de modules distincts) $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ auxquelles on peut associer une famille de n vecteurs co-propres $(X_1, \dots, X_n)$. L'étude précédente montre que cette famille est libre dans $\mathbb{C}^n$ et en est donc une base $\mathcal{B}'$. Soit u l'application semi-linéaire de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$; dans cette nouvelle base de vecteurs co-propres de u , la matrice B de u a pour colonnes les coordonnées des vecteurs $(u(X_k))_{1 \leq k \leq n} = (\sqrt{\lambda_k} X_k)_{1 \leq k \leq n}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}' = (X_1, \dots, X_n)$. (cf. I)2.) On a ainsi $B = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ diagonale : D'après II)1., A et B sont co-semblables : A est bien co-diagonalisable.

3 Question N° 3 : Quelques propriétés :

3.a) : compte tenu des propriétés déjà rappelées de la conjugaison dans $\mathbb{C}$, et du fait que (cf. II)1.)

$\forall S \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$, on obtient :

$$A\overline{A} = S\overline{S}^{-1}S^{-1} = I_n$$

Ainsi une matrice A co-semblable à I_n est inversible et d'inverse $\overline{A}$.

3.b) : $S(\theta) = e^{i\theta} (A + e^{-2i\theta} I_n)$ est donc inversible si et seulement si $(-e^{-2i\theta})$ n'est pas valeur propre de A, ce qui est toujours réalisable (pour une infinité de valeurs réelles de θ) puisque le spectre de A est fini et l'ensemble des complexes unitaires est infini. Pour un tel θ on peut écrire puisque $A\overline{A} = I_n$:

$$A\overline{S(\theta)} = e^{-i\theta} A\overline{A} + e^{i\theta} A = S(\theta)$$

et finalement puisque $S(\theta)$ inversible entraîne $\overline{S(\theta)}$ inversible : $A = S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$.

3.a et 3.b prouvent qu'une matrice A carrée complexe d'ordre n est co-semblable à I_n si et seulement si elle est inversible et $A^{-1} = \overline{A}$.

4 Question N° 4 : Une condition nécessaire :

Si $D = S^{-1}A\overline{S} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $A = SD\overline{S}^{-1}$ d'où : $\overline{A} = \overline{SD\overline{S}^{-1}}$ et $A\overline{A} = S(D\overline{D})S^{-1}$ ce qui prouve la diagonalisabilité de la matrice $A\overline{A}$ (semblable à la matrice diagonale $D\overline{D} = \text{Diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$) ainsi que $\text{Spectre}(A\overline{A}) = \text{Spectre}(D\overline{D}) = \{|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2\} \subset \mathbb{R}_+$. Ce résultat est compatible mais plus précis que celui du 1)4. De plus $\text{rang}(A\overline{A}) = \text{rang}(D\overline{D})$ est le nombre d'éléments diagonaux non nuls de $D\overline{D}$ qui est le même que celui de D, c'est-à-dire $\text{rang}(D)$. Or A et D ont le même rang car elles sont équivalentes (la multiplication par les matrices inversibles $\overline{S}$ et S^{-1} conserve le rang). Finalement $\boxed{\text{rang}(A\overline{A}) = \text{rang}(A)}$.

5 Question N° 5 : Exemples :

5.a) : A est donc diagonalisable et semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale D : il existe une matrice P dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ (et même dans $O_n(\mathbb{R})$) telle que $A = P^{-1}DP = P^{-1}D\overline{P}$: donc, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est co-semblable à une matrice diagonalisable : A est co-diagonalisable.

5.b) : A et C sont des matrices non scalaires n'ayant qu'une seule valeur propre :

A et C ne sont pas diagonalisables.

$A\overline{A} = I_2$ prouve que A est co-semblable à I_2 d'après 3.b : A est codiagonalisable;

Par contre $C\overline{C} = C^2 = 0$, donc $\text{rang}(C) = 1 \neq \text{rang}(C\overline{C}) = 0$ prouve d'après 4. que C n'est pas co-diagonalisable.

B et D ont le même polynôme caractéristique $x^2 - 2x + 2$ et les mêmes deux valeurs propres distinctes : $1 \pm i$ donc

B et D sont diagonalisables.

Or $B\overline{B} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$ qui ne sont pas réelles : la condition nécessaire du 4. n'est pas vérifiée par B : B n'est donc pas co-diagonalisable.

Enfin $D\overline{D} = 2I_2$ prouve, en appliquant la caractérisation du 3. (matrices co-semblables à I_2) à la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}}D$, que D est co-semblable à $\sqrt{2}I_2$: D est co-diagonalisable.
