

I. Deux exemples simples de supplémentaires.

1. Soit G le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions impaires. La seule fonction paire et impaire étant la fonction nulle, F et G sont en somme directe. Par ailleurs,

$$\forall x, f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

permet d'écrire $f \in E$ comme élément de $F + G$. On a donc $F \oplus G = E$.

2. L'équation différentielle proposée est linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace-vectoriel de dimension 2 (d'où l'existence de f_1 et f_2). L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ et admet les complexes $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ comme solutions. Le cours indique (et c'est facile à vérifier) que

$$f_1 : x \mapsto e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto e^{-x/2} \sin(\sqrt{3}x/2)$$

sont deux solutions indépendantes.

3. En prenant la valeur en 0 de $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2$ et de la dérivée, on obtient

$$\alpha_f = f(0) \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha_f}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_f = f'(0)$$

En résolvant le système, on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

4. Par définition, G est un sous-espace de E . De plus $f_1, f_2 \in E$ et F est donc aussi un sous-espace de E .

La matrice A étant inversible, le seul élément de $F \cap G$ est l'application nulle (si $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2 = 0$ avec $f(0) = f'(0) = 0$ alors $\alpha_f = \beta_f = 0$ et donc $f = 0$). F et G sont donc en somme directe.

Soit $g \in E$ et $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2$ avec $\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} g(0) \\ g'(0) \end{pmatrix}$. On a alors $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$ (toujours par inversibilité de A) et donc $g - f \in G$. Ceci montre que $g \in F + G$ et donc $E \subset F + G$. L'inclusion réciproque est évidente et

$$F \oplus G = E$$

II. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation.

5. On voit que $(1, 1, 0)$ et $(-2, 0, 1)$ sont vecteurs propres associés à la valeur propre -1 . Avec la trace, la dernière valeur propre est nulle. En résolvant au brouillon, on voit que $(4, 5, 1)$ est dans le noyau de f . Par dimension (et comme les sous-espaces propres sont en somme directe) on a

$$E_{-1}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0), (-2, 0, 1)) \quad \text{et} \quad E_0(f) = \text{Vect}((4, 5, 1))$$

f est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3).

6. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') = f(x, y, z) = (3x - 4y + 8z, 5x - 6y + 10z, x - y + z)$. On a

$$x' - y' + z' = -x + y - z$$

Ainsi, si $(x, y, z) \in (P)$ alors $(x', y', z') \in (P)$ et (P) est stable par f .

7. Un supplémentaire de (P) est une droite. Il suffit donc de trouver un vecteur propre qui n'est pas dans (P) (il engendrera une droite stable supplémentaire de l'hyperplan (P) puisque non incluse dans celui-ci). $Vect((-2, 0, 1))$ convient.
8. On a deux implications à prouver.
- Supposons f diagonalisable et notons $(f_1, \dots, f_n)$ une base de diagonalisation de f . Soit G un sous-espace de E . D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter une base de G par des f_i de façon à obtenir une base de E . Le sous-espace engendré par les f_i utilisés est stable (chaque vecteur d'une base étant propre) et est par construction un supplémentaire de G dans E .
 - Supposons que tout sous-espace de E ($\dim(E) = n$) admette un supplémentaire stable. On construit, par récurrence, une famille libre $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs propres et ainsi f est diagonalisable.
 - Il existe un hyperplan H_1 dans E . H_1 admet un supplémentaire stable qui est une droite $D_1 = Vect(f_1)$ avec f_1 vecteur propre de f .
 - Supposons construits $(f_1, \dots, f_k)$ famille libre de vecteurs propres avec $k \leq n - 1$. Il existe un hyperplan H de E contenant $Vect(f_1, \dots, f_k)$. Il existe alors une droite $Vect(f_{k+1})$ stable par f . f_{k+1} est vecteur propre et n'est pas dans $Vect(f_1, \dots, f_k)$. Comme $(f_1, \dots, f_k)$ est libre, il en est donc de même de $(f_1, \dots, f_{k+1})$.

III. Supplémentaires et calcul différentiel.

9. Toute sous-famille finie de $(f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est une sous famille de $\mathcal{F}_n = (f_{i,j})_{i,j \in [0..n]}$ pour n assez grand. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}_n$ est libre pour tout n (une sous-famille d'une famille libre est libre). Soit $n \geq 0$; supposons que

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n+1} \alpha_{i,j} f_{i,j} = 0$$

On a, en particulier, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \underbrace{\left(\sum_{j=0}^n \alpha_{i,j} y^j \right)}_{=P_i(y)} x^i = 0$$

La famille $(1, t \mapsto t, \dots, t \mapsto t^n)$ étant libre dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est du cours), on a donc la nullité de $P_i(y)$ pour tout y . Le même argument d'indépendance donne alors $\alpha_{i,j} = 0$ pour tout i et tout j . On a donc bien indépendance de $\mathcal{F}_n$.

10. La dérivation (même partielle) étant linéaire, Δ et Φ sont linéaires. Comme

$$(*) : \forall i, j \quad \Delta(f_{i,j}) = i(i-1)f_{i-2,j} - j(j-1)f_{i,j-2} \quad \text{et} \quad \Phi(f_{i,j}) = ijf_{i-1,j-1}$$

avec la convention $f_{u,v} = 0$ si $u < 0$ ou $v < 0$. Les éléments d'une famille génératrice de F étant envoyés dans F , F est stable par les applications linéaires Δ et Φ qui induisent donc sur F des endomorphismes $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Phi}$.

11. Soit $f \in F$. Il existe une famille $(\alpha_{i,j})$ de scalaires dont un nombre fini seulement est non nul tel que

$$f = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \alpha_{i,j} f_{i,j}$$

La somme ci-dessus est en fait finie d'après la propriété des $\alpha_{i,j}$. Il n'ya donc pas de problème pour écrire (en utilisant $(*)$) que

$$\Phi(f) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \alpha_{i,j} \Phi(f_{i,j}) = \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{i+1,j+1} (i+1)(j+1) f_{i,j}$$

La famille $(f_{i,j})$ étant libre on a donc

$$\phi(f) = 0 \iff \forall i, j \geq 1, \alpha_{i,j} = 0$$

ce que l'on peut écrire

$$Ker(\tilde{\Phi}) = Vect((f_{0,i}, f_{i,0})_{i \in \mathbb{N}})$$

12. Soit $f \in F$. Il existe une famille $(\alpha_{i,j})$ de scalaires dont un nombre fini seulement est non nul tel que

$$f = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \alpha_{i,j} f_{i,j}$$

On a alors (les sommes sont en fait finies)

$$f = xy \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \alpha_{i+1,j+1} f_{i,j} + \underbrace{\alpha_{0,0} f_{0,0} + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \alpha_{i,0} f_{i,0} + \alpha_{0,i} f_{0,i}}_{=g \in Ker(\tilde{\Phi})} \in xyF + Ker(\tilde{\Phi})$$

Par ailleurs, si $f \in xyF \cap Ker(\tilde{\Phi})$ alors f s'écrit comme combinaison des $f_{i,j}$ pour $i, j \geq 1$ ($f \in xyF$) et comme combinaison des $f_{i,0}, f_{0,i}$. En écrivant $f - f = 0$, on obtient une combinaison nulle des $f_{i,j}$ et donc des coefficients tous nuls ce qui donne alors $f = 0$. La somme est donc directe et on a bien

$$F = xyF \oplus Ker(\tilde{\Phi})$$

13. w est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ par théorèmes généraux. Ainsi, si $f \in E$, $f \circ w \in E$. En particulier, $L(F) \subset E$.

Le déterminant de w vaut $-1/4$. w est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Si $L(f) = L(g)$ alors, en composant par w^{-1} à droite on obtient $f = g$. L est donc injective sur E et a fortiori sur F .

Comme $(f + \lambda g) \circ w = f \circ w + \lambda g \circ w$ par définition de la loi $\circ$, L est linéaire (on aurait donc pu prouver l'injectivité avec le noyau).

L est finalement un automorphisme de F dans $L(F)$. Or, par linéarité,

$$L(F) = Vect((L(f_{i,j}))_{i,j \in \mathbb{N}})$$

Mais $f_{i,j} \circ w(x, y) = \frac{1}{2^{i+j}} (x+y)^i (x-y)^j \in F$ (développer par la formule du binôme) et donc $L(F) \subset F$.

Réciproquement, soit $g \in F$, on a aussi $f = g \circ w^{-1} \in F$ (même preuve puisque w^{-1} est linéaire) et $L(f) = g$ ce qui prouve que $F \subset L(F)$.

L est donc un automorphisme de F .

14. Soit $f \in E$ et $g = f \circ w$. On a $g(x, y) = f(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$. Ainsi, en notant $(u, v) = w(x, y)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, v) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u, v) \right) \end{aligned}$$

Les termes se simplifient et donnent $\frac{1}{4} \Delta(f)(u, v)$.

On a donc $\Phi(g)$ qui est nul si et seulement si $\Delta(f)$ l'est ((u, v) parcourt $\mathbb{R}^2$ quand (x, y) parcourt $\mathbb{R}^2$). On a donc

$$L(Ker(\tilde{\Delta})) = Ker(\tilde{\phi})$$

15. Soit $f \in F$ et $g = (x^2 - y^2)f$. On a

$$L(g)(u, v) = g \circ w(u, v) = \left(\left(\frac{u+v}{2} \right)^2 - \left(\frac{u-v}{2} \right)^2 \right) f \circ w(u, v) = 2uv(f \circ w)(u, v) = 2uvL(f)(u, v)$$

On a montré ici que

$$\forall f \in F, L((x^2 - y^2)f) = \frac{1}{2}xyL(f) = xyL(f/2) \in xyF$$

Comme L est un automorphisme de F , on peut écrire que

$$\forall f \in F, xyf = 2L((x^2 - y^2)L^{-1}(f)) = L(2(x^2 - y^2)L^{-1}(f)) \in L((x^2 - y^2)F)$$

On a ainsi

$$L((x^2 - y^2)F) = xyF$$

16. Soit $f \in F$. $L(f) \in F$ et avec la question 12 on trouve $f_1 \in xyF$ et $f_2 \in \text{Ker}(\tilde{F})$ tels que $L(f) = f_1 + f_2$. La question 14 donne $g_2 \in \text{Ker}(\tilde{\Delta})$ tel que $f_2 = L(g_2)$. La question 15 donne $g_1 \in F$ tel que $L((x^2 - y^2)g_1) = f_1$. Par bijectivité de L , on en déduit que

$$f = (x^2 - y^2)g_1 + g_2 \in (x^2 - y^2)F + \text{Ker}(\tilde{\Delta})$$

Par ailleurs, comme xyF et $\text{Ker}(\tilde{\Phi})$ sont en somme directe et comme L est bijective, les images par L^{-1} de ces sous-espaces sont en somme directe. On a finalement montré que

$$F = (x^2 - y^2)F \oplus \text{Ker}(\tilde{\Delta})$$

IV. Supplémentaires et géométrie.

17. On a deux équivalences à prouver.

- Supposons que $f = h \circ g$. Si $g(x) = 0$ alors $f(x) = h(0) = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(f)$. Ainsi,

$$\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$$

- Supposons $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}(g)$ dans E . D'après le théorème du rang, la restriction g_1 de g à H réalise un isomorphisme de H dans $\text{Im}(g)$. Notons Z un supplémentaire de $\text{Im}(g)$ dans G . Il existe une unique application linéaire h (on la définit linéairement sur deux sous-espaces supplémentaires) de G dans E telle que

$$\forall x \in Z, h(x) = 0 ; \forall x \in \text{Im}(g), h(x) = f \circ g_1^{-1}(x)$$

On a alors $\forall x \in E, h(g(x)) = f \circ g_1^{-1}(g(x)) = f(x)$ et donc $f = h \circ g$.

18. Soit ϕ définie par

$$\forall x \in E, \phi(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

Par définition, on a

$$\text{Ker}(\phi) = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) = \bigcap_{i=1}^k H_i$$

- Si (i) est vérifiée, $\text{Ker}(\phi) \subset \text{Ker}(f_{k+1})$ et la question 17 donne l'existence de $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ telle que $f_{k+1} = h \circ \phi$. h étant une forme linéaire de $\mathbb{R}^k$, il existe des scalaires $a_1, \dots, a_k$ tels que

$$h(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k a_i x_i$$

$f_{k+1} = h \circ \phi$ s'écrit alors

$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^k a_i f_i$$

- Réciproquement, si (ii) a lieu alors en posant

$$h(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k a_i x_i$$

on trouve $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ telle que $f_{k+1} = h \circ \phi$ et la question 17 donne $\text{Ker}(\phi) \subset \text{Ker}(f_{k+1})$ ce qui prouve (i).

19. Rappelons tout d'abord qu'en (x_0, y_0, z_0) , le plan tangent est normal à $(2x_0 - 2, 2y_0 - 6, 2z_0 - 4)$ (on prend le gradient de la fonction $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 10$). Une équation cartésienne de ce plan est donc

$$(x_0 - 1)(x - x_0) + (y_0 - 3)(y - y_0) + (z_0 - 2)(z - z_0) = 0$$

c'est à dire

$$(x_0 - 1)x + (y_0 - 3)y + (z_0 - 2)z = (x_0 - 1)x_0 + (y_0 - 3)y_0 + (z_0 - 2)z_0 = x_0 + 3y_0 + 2z_0 - 10$$

Remarquons qu'un plan (P) contenant (D) passe par l'origine; Une équation cartésienne de ce plan est donc du type $ax + by + cz = 0$. (P) et (D) passant par l'origine, on peut les considérer comme des sous-espaces vectoriels.

On a $(D) = \text{Ker}(f_1) \cap \text{Ker}(f_2)$ et $(P) = \text{Ker}(f_3)$ avec $f_1(x, y, z) = z$ et $f_2(x, y, z) = x - y$. D'après la question précédente, $(D) \subset (P)$ équivaut à f_3 de la forme $\alpha f_1 + \beta f_2$.

A ce niveau, on a l'équation générale des plans contenant (D) :

$$(P) : \beta x - \beta y + \alpha z = 0 \text{ avec } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Un tel plan est normal à $\text{Vect}((\beta, -\beta, \alpha))$.

Si (P) est tangent à (S) en (x_0, y_0, z_0) alors les vecteurs $(\beta, -\beta, \alpha)$ et $(2x_0 - 2, 2y_0 - 6, 2z_0 - 4)$ sont colinéaires et donc $x_0 + y_0 = 4$. De plus le plan tangent doit passer par l'origine et donc

$x_0 + 3y_0 + 2z_0 = 10$. On doit donc avoir (résolution aisée) $\begin{cases} x_0 = 4 - y_0 \\ z_0 = 3 - y_0 \end{cases}$. La condition

$(x_0, y_0, z_0) \in S$ donne alors $3y_0^2 - 14y_0 + 15 = 0$ dont les solutions sont 3 et 5/3.

Réciproquement, le plan tangent en $(1, 3, 0)$ admet pour équation

$$z = 0$$

celui en $(7/3, 5/3, 4/3)$ admet pour équation

$$4x - 4y - 2z = 0$$

et ces deux plans contiennent (D) .