

Exercice 1

- 1-) L'énoncé ne dit pas que f est définie sur \mathbb{R} .
On pourrait donc considérer que f est définie sur $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$
et, dans ce cas, $f(0)$ et $f(\pi)$ n'existeraient pas.

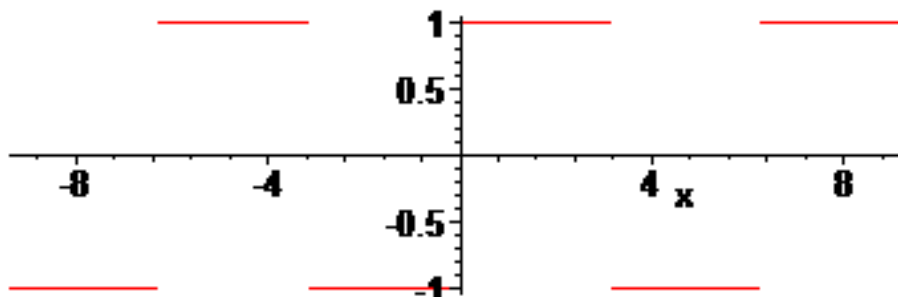
Si f est définie sur \mathbb{R} , par imparité et périodicité:

$$\rightarrow f(0) = -f(-0) = -f(0) \text{ d'où } 2f(0) = 0 \text{ et } \boxed{f(0) = 0}.$$

$$\rightarrow f(\pi) = -f(-\pi) = -f(-\pi + 2\pi) = -f(\pi) \text{ d'où } 2f(\pi) = 0 \text{ et } \boxed{f(\pi) = 0}.$$

Par ailleurs, $f\left(\frac{13\pi}{4}\right) = f\left(\frac{13\pi}{4} - 2 \times 2\pi\right) = f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ donc $\boxed{f\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -1}$ car $\frac{3\pi}{4} \in]0, \pi[$.

- 2-) > `f:=x->signum(x-floor((x+Pi)/(2*Pi))*2*Pi);`
`plot(f(x),x=-9.4..9.4,discont=true);`



- 3-a) $\rightarrow T = 2\pi$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donc $\boxed{\omega = 1}$.
 $\rightarrow f$ est impaire donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0}$.
 $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi}$
donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n} = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}}$.

- 3-b) \rightarrow La restriction de f à $]0, \pi[$ est la fonction constante égale à 1 sur cet intervalle.
Elle est prolongeable par continuité sur $[0, \pi]$ en une fonction de classe C^1 .
Par imparité, f est donc de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ intervalle d'amplitude 2π .
Comme f est 2π -périodique sur \mathbb{R} , $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}}$.
 $\rightarrow f$ est C^1 par morceaux sur \mathbb{R} et est 2π -périodique.
On peut donc utiliser le théorème de Dirichlet et dire que
 $\boxed{\text{la série de Fourier de } f \text{ converge en tout point vers la fonction régularisée } \varphi \text{ de } f}$.

→ Comme les points de discontinuité de f sont les éléments de $\pi\mathbf{Z}$,

- $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbf{Z}, \varphi(t) = f(t)$
- $\forall t \in \pi\mathbf{Z}, \varphi(t) = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = f(t)$.

On en déduit que: f est égale à sa fonction régularisée.

→ La série de Fourier de f est définie par: $S(f)(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} [a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)]$.

Avec les résultats précédents, on obtient: $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)t]}{2n+1}$.

3-c) Pour $t = \frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left[(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$.

Il vient donc $\frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1$ d'où $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

3-d) La formule de Parseval s'écrit: $|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt$

En tenant compte de la parité de f^2 , on obtient: $\frac{8}{\pi^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{\pi} \times \pi$

D'où $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4-a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi: t \mapsto e^{-xt} \cdot f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot f(t) \cdot dt$ est simplement impropre en $+\infty$.

On va montrer qu'elle est absolument convergente.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|\psi(t)| = e^{-xt} \cdot |f(t)| \leq e^{-xt}$.

et on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot dt$ converge pour $x > 0$ (et vaut $1/x$).

Par comparaison en module $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot f(t) \cdot dt$ est absolument convergente

et, par suite, $t \mapsto e^{-xt} \cdot f(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

4-b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]k\pi, (k+1)\pi[$, $f(t) = (-1)^k$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt} \cdot f(t) \cdot dt = (-1)^k \cdot \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt} \cdot dt = (-1)^k \cdot \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} = -\frac{(-1)^k}{x} [e^{-(k+1)\pi x} - e^{-k\pi x}]$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt} \cdot f(t) \cdot dt = \frac{(-1)^k}{x} \times (e^{-\pi x})^k \times (1 - e^{-\pi x})$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt} \cdot f(t) \cdot dt = \frac{1 - e^{-\pi x}}{x} \times (-e^{-\pi x})^k$.

$$4-c) \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \sum_{n \geq 0} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-xt} f(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1 - e^{-\pi x}}{x} \times (-e^{-\pi x})^k$$

Comme $| -e^{-\pi x} | = e^{-\pi x} < 1$ (car $-\pi x < 0$),

la série géométrique $\sum_{n \geq 0} (-e^{-\pi x})^k$ converge et a pour somme $\frac{1}{1 + e^{-\pi x}}$.

$$\text{Par suite, } \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \frac{1 - e^{-\pi x}}{x} \times \frac{1}{1 + e^{-\pi x}} = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\pi x/2} - e^{-\pi x/2}}{e^{\pi x/2} + e^{-\pi x/2}}$$

$$\text{Donc } \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \frac{1}{x} \operatorname{th}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Exercice 2

$$1-) \boxed{f \text{ est décroissante sur } I \Leftrightarrow [\forall (x, x') \in I^2, x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')]}.$$

Note: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est continue sur $[0, 1]$

donc $\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$ est une intégrale définie

et, par suite, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

$$\forall (x, x') \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall t \in [0, 1], x \leq x' \Rightarrow \frac{e^t}{x+t} \geq \frac{e^t}{x'+t}$$

Par positivité de l'intégrale définie, on en déduit que: $f(x) \geq f(x')$.

Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

$$2-a) \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [0, 1],$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 \left(\frac{e^t}{x+t} - \frac{e^t}{x_0+t} \right) dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{(x-x_0) \cdot e^t}{(x+t)(x_0+t)} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|x-x_0| \cdot e^t}{(x+t)(x_0+t)} dt \leq \frac{|x-x_0|}{xx_0} \int_0^1 e^t dt$$

$$\text{Donc } |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{e \cdot |x-x_0|}{xx_0}.$$

$$\text{Si } x \geq \frac{x_0}{2} > 0 \text{ alors } xx_0 \geq \frac{x_0^2}{2} > 0 \text{ et } \frac{1}{xx_0} \leq \frac{2}{x_0^2} \text{ d'où } \boxed{\forall x \geq \frac{x_0}{2}, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e \cdot |x-x_0|}{x_0^2}}.$$

$$2-b) \bullet \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, f(x_0) \text{ existe d'après la note de la question 1.}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2e \cdot |x-x_0|}{x_0^2} = 0 \\ \forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2} \right], |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e \cdot |x-x_0|}{x_0^2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Par suite, $\boxed{\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, f \text{ est continue en } x_0}$. Autrement dit: $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.

3-) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, 1], 0 < x \leq x+t \leq x+1$ donc $\frac{e^t}{x+1} \leq \frac{e^t}{x+t} \leq \frac{e^t}{x}$.

Par positivité de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{x+1} \int_0^1 e^t \cdot dt \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 e^t \cdot dt$

Soit: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}}$.

Par suite: $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{x}{x+1} \leq \frac{x}{e-1} \times f(x) \leq 1$ et, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$,

par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e-1} \times f(x) = 1$ d'où $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}}$.

4-a) La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $[0, 1]$ et: $\forall t \in [0, 1], |(e^t)'| = e^t \leq e$.
L'inégalité des accroissements finis sur $[0, t]$ avec $t \in [0, 1]$ s'écrit:

$\forall t \in [0, 1], |e^t - e^0| \leq e \cdot |t - 0|$ soit $\boxed{\forall t \in [0, 1], |e^t - 1| \leq et}$ donc $\boxed{M = e \text{ convient}}$.

4-b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, 1], \left| \frac{e^t - 1}{x+t} \right| \leq \frac{et}{x+t}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, |g(x)| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^t - 1}{x+t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{et}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{et}{t} dt = e$.

Donc $\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+^*}$.

4-c) $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{dt}{x+t}$ (Relation de Chasles)

$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = f(x) - \ln(x+1) + \ln(x)$

d'où $\forall x \in]0, 1[, \frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{g(x)}{\ln(x)} + \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} - 1$

et, comme g est bornée sur $]0, 1[, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\ln(x)} = -1$ donc $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)}$.

5-a) $\forall t \in [0, 1], h'(t) = \frac{e^t(1+t) - e^t \times 1}{(1+t)^2} = \frac{t \cdot e^t}{(1+t)^2} \geq 0$ donc $\boxed{h \text{ est croissante sur } [0, 1]}$.

5-b) u_n et v_n représentent les valeurs approchées de $\int_0^1 h(t) \cdot dt = f(1)$ par la méthode des rectangles avec une subdivision de $[0, 1]$ en n parties égales (sommes de Riemann).

→ Pour u_n on s'appuie à gauche et, comme h est croissante, on obtient une valeur approchée par défaut.

→ Pour v_n on s'appuie à droite et, comme h est croissante, on obtient une valeur approchée par excès.

5-c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subset [0, 1], h\left(\frac{k}{n}\right) \leq h(t) \leq h\left(\frac{k+1}{n}\right)$ car h est croissante.

Par suite,
$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h\left(\frac{k}{n}\right) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t) dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h\left(\frac{k+1}{n}\right) dt$$

soit:
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(t) dt \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k+1}{n}\right)}.$$

5-d) En sommant les encadrements précédents pour k variant de 0 à $n-1$,
il vient: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \int_0^1 h(t).dt = f(1) \leq v_n$.

Par suite $f(1)$ appartient à l'intervalle $[u_n, v_n]$ de centre $\frac{u_n + v_n}{2}$ et d'amplitude $v_n - u_n$.

Donc
$$\left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{h(1) - h(0)}{2n}$$
 par télescopage.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| f(1) - \frac{u_n + v_n}{2} \right| \leq \frac{h(1) - h(0)}{2n}}.$$

5-e) $\frac{u_n + v_n}{2}$ est une valeur approchée de $f(1)$ à $\frac{10^{-2}}{2}$ près dès que $\frac{h(1) - h(0)}{2n} \leq \frac{10^{-2}}{2}$

donc dès que $n \geq 100[h(1) - h(0)]$.

Or $100[h(1) - h(0)] = 50(e - 2) \approx 35,9$.

$$\boxed{\frac{u_{n_0} + v_{n_0}}{2} \text{ est une valeur approchée de } f(1) \text{ à } \frac{10^{-2}}{2} \text{ près pour } n_0 = 36}.$$

$$\frac{u_{36} + v_{36}}{2} = \frac{1}{72} \left[\sum_{k=0}^{35} h\left(\frac{k}{36}\right) + \sum_{k=0}^{35} h\left(\frac{k+1}{36}\right) \right] = \frac{1}{72} \left[h(0) + h(1) + 2 \sum_{k=1}^{35} h\left(\frac{k}{36}\right) \right] \approx 1.125$$

d'où
$$\boxed{f(1) \approx \frac{p}{100} \text{ avec } p = 112}.$$

Exercice 3

- 1-) → La première série est une série géométrique de raison x qui converge ssi $|x| < 1$ donc $\boxed{R_f = 1}$.
 → Pour les deux autres séries on peut utiliser la règle de d'Alembert
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$ donc $\boxed{R_g = 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ donc $\boxed{R_h = 1}$.

2-) $\boxed{\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{x}{1-x}}$.

On sait que la fonction somme d'une série entière de la variable réelle est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et que les dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 1} n.x^{n-1}$ donc $\forall x \in]-1, 1[, \boxed{h(x) = \sum_{n \geq 1} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2}}$.

3-a) $\forall x \in [0, 1[, g'(x) = \sum_{n \geq 1} n.\sqrt{n}.x^{n-1} > 0$ donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0, 1[}$.

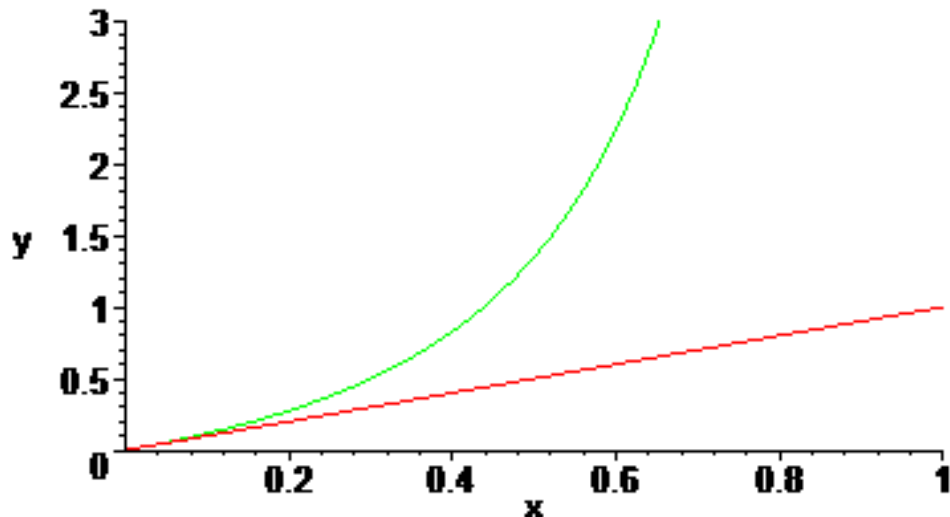
3-b) $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n \leq \sqrt{n}.x^n$ donc $\boxed{\forall x \in [0, 1[, f(x) \leq g(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty}$.

3-c) $g(x) = 0 + x + \sqrt{2}.x^2 + o(x^2)$.

Donc, pour $x = 0$, la courbe passe par l'origine, admet pour tangente la droite $y = x$ et est localement convexe.

`> plot({sum(x^n*sqrt(n), n=1..infinity), x}, x=0..1, y=0..3);`



4-a) $\begin{cases} g \text{ est continue sur } [0, 1[\text{ (fonction somme d'une série entière de la variable réelle)} \\ g \text{ est strictement croissante sur } [0, 1[\\ 2 \in g([0, 1[) = \mathbb{R}_+ \end{cases}$

Le théorème de la bijection permet de dire que 2 admet un unique antécédent α par g dans $[0, 1[$.

Autrement dit: $\boxed{\exists ! \alpha \in [0, 1[, g(\alpha) = 2}$.

4-b) $h(0,5) = 2$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ donc $g(0,5) \leq 2 = g(\alpha)$.

Comme g est strictement croissante sur $[0, 1[$, on en déduit que: $\boxed{\alpha \geq 0,5}$.

4-c) $\sum_{k=1}^5 \sqrt{k} \cdot (0,6)^k \approx 1,91$ et $\sum_{k=1}^6 \sqrt{k} \cdot (0,6)^k \approx 2,03$ d'où $\boxed{n_0 = 6}$.

$g(0,6) = \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cdot (0,6)^n \geq \sum_{k=1}^6 \sqrt{k} \cdot (0,6)^k \geq 2 = g(\alpha)$ d'où $\boxed{0,5 \leq \alpha \leq 0,6}$.

5-a) $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n = \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cdot x^n - \sum_{n \geq 1} \sqrt{n-1} \cdot x^n$ car les deux séries sont convergentes.

$\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n = \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cdot x^n - \sum_{n \geq 0} \sqrt{n} \cdot x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cdot x^n - \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cdot x^{n+1}$ car $\sqrt{0} \cdot x = 0$.

$\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n = \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cdot x^n - x \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cdot x^n$

Donc $\boxed{\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})x^n = (1-x) \cdot g(x)}$.

5-b) • $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} > 0$ donc la série proposée est bien alternée.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} < 1$ donc la suite (a_n) est décroissante.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 0$

D'après le critère spécial des séries alternées $\boxed{\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot (-1)^n}$ converge.

On en déduit que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot x^n$ est au moins égal à 1.

5-c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge

donc $\boxed{\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot (-1)^n}$ n'est pas absolument convergente.

$\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot 1^n$ diverge

donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot x^n$ est au plus égal à 1.

Par suite, $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot x^n \text{ est égal à } 1}$.

5-d) L'intervalle de convergence de $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot x^n$ est $[-1, 1[$.

La fonction somme d'une série entière de la variable réelle est continue sur l'intervalle de convergence donc $x \mapsto (1-x) \cdot g(x)$ est continue sur $[-1, 1[$.

Soit S le réel égal à $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot (-1)^n$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x) \cdot g(x) = S$

Par suite $\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \frac{S}{2} \in \mathbb{R}}$.