

Calculs préliminaires.

Notons que si $f \in H$ alors $x \mapsto f(x)e^{-x^2/2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue positive et majorée par $\frac{1}{\rho}e^{-\rho x^2}$ pour tout réel x donc par $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$.

1. Compte-tenu de la remarque précédente, F_f est bien définie sur $\mathbb{R}$. En outre comme $u \mapsto f(u)e^{-u^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F'_f(x) = f(x)e^{-x^2/2} > 0$ pour tout réel x . Il en découle par le théorème de caractérisation des $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes d'intervalles que :

F_f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F_f(x) [=]0, \sqrt{2\pi}[$. $\square$

2. φ convient si et seulement si $F_f \circ \varphi = F_1$ ce qui prouve l'existence d'une unique solution : $\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$. $\square$

3. F_f^{-1} est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de $]0, \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi par composition de difféomorphismes, φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur lui-même. $\square$

4. Comme φ est dérivable et que les fonctions intégrées dans la relation de définition de φ sont continues, il vient en dérivant cette relation que : $(f(\varphi(x))e^{-\varphi(x)^2/2})\varphi'(x) = e^{-x^2/2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$.

Or comme toutes les fonctions intervenant ici sont strictement positives, il vient en prenant le logarithme que : $\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$. $\square$

En appliquant cette égalité en $\varphi^{-1}(x)$ on obtient : $\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$. $\square$

5. On sait qu'un changement de variable qui est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme transforme une intégrale impropre convergente en une intégrale convergente et de valeur égale.

En effectuant de changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|f(u)e^{-u^2/2} du$ on obtient donc une intégrale convergente (et égale). Or, compte-tenu de la relation (1), l'intégrale convergente obtenue est $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\varphi(u))|e^{-u^2/2} du$ ce qui signifie que $h(\varphi(u))e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Enfin le même théorème de changement de variable dans les intégrales impropres utilisé cette fois ci sans valeur absolue fournit l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du$. $\square$

6. Comme φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, φ^2 est croissante sur $]\varphi^{-1}(0), +\infty[$ et décroissante sinon. Par ailleurs $u \mapsto e^{-u^2/2}$ croît sur $\mathbb{R}^-$ et décroît sur $\mathbb{R}^+$. Il en découle immédiatement que :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2} \quad \forall x \geq A = \max(\varphi^{-1}(0), 0). \quad \square$$

Notons qu'il en résulte également que $\int_{x-1}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x)e^{-(x-1)^2/2} \quad \forall x \leq A' = \min(\varphi^{-1}(0), 0)$.

7. Comme $f \in H_0 \subset H$ on a $0 \leq u^2 f(u)e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{\rho}u^2 e^{-\rho u^2}$ pour tout u ce qui prouve que $u^2 f(u)e^{-u^2/2} = o(\frac{1}{u^2})$ au voisinage de $\pm\infty$ et est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut ainsi choisir la fonction $h = u \mapsto u^2$ dans la question 5. ce qui prouve que $\varphi^2(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \leq 1 \text{ pour } x \geq C \quad \text{et} \quad \int_{x-1}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \leq 1 \text{ pour } x \leq -C.$$

Il résulte alors de la question précédente que :

$$\varphi^2(x) \leq e^{(x+1)^2/2} = e^{(|x|+1)^2/2} \text{ pour } x \geq \max(A, C)$$

et

$$\varphi^2(x) \leq e^{(x-1)^2/2} = e^{(|x|+1)^2/2} \text{ pour } x \leq \inf(A', -C).$$

Ainsi $|\varphi(x)| \leq e^{(|x|+1)^2/4}$ pour tout réel x tel que $|x| \geq B = \max(A, -A', C)$. $\square$

8. On cherche naturellement une primitive sous la forme $g(u)e^{-u^2/2}$. Il vient que g convient si et seulement si :
 $-ug(u) + g'(u) = -u(u - \varphi(u)) + 1 - \varphi'(u)$. Donc $g(u) = u - \varphi(u)$ convient.

Une primitive de $(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$ est $(u - \varphi(u))e^{-u^2/2}$. $\square$

9. Notons $h(u)$ la fonction à intégrer.

Il découle clairement de la question précédente et de la majoration de la question 7. que $\int_a^b h(u) du$ tend vers 0 lorsque $(a, b) \rightarrow (-\infty, +\infty)$.

Compte-tenu de l'avertissement liminaire de l'énoncé, il reste à prouver que h est intégrable sur $\mathbb{R}$ avant de conclure que $I = 0$.

Or, toujours compte-tenu de la majoration de la question 7. : $(u\varphi(u) - u^2 + 1)e^{-u^2/2} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ en $\pm\infty$ qui est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il en découle que $\int_a^b \varphi'(u)e^{-u^2/2} du$ admet une limite lorsque (a, b) tend vers $(-\infty, +\infty)$. Ce qui prouve que

$\varphi'(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque cette fonction est positive.

Ainsi h est bien intégrable en tant que somme de deux fonctions intégrables et $I = 0$. $\square$

Une inégalité intéressante.

10.● Pour $x \in]0, 1]$ une étude des variations de $x \mapsto x \ln x$ prouve immédiatement que $|x \ln x| \leq \frac{1}{e}$.

Par ailleurs pour u tel que $f(u) \geq 1$ on a $0 \leq f(u) \ln(f(u)) \leq f(u)(-\ln \rho + (\frac{1}{2} - \rho)u^2)$.

Donc pour tout réel u on a :

$$|f(u) \ln(f(u))e^{-u^2/2}| \leq \left(\frac{1}{e} + f(u)|-\ln \rho + (\frac{1}{2} - \rho)u^2|\right)e^{-u^2/2} \leq \frac{1}{e}e^{-u^2/2} + \frac{1}{\rho} |-\ln \rho + (\frac{1}{2} - \rho)u^2|e^{-\rho u^2} \stackrel{\text{DEF}}{=} M(u).$$

Or $M(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$ ce qui prouve que $f(u) \ln(f(u))e^{-u^2/2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. $\square$

● On a noté au début de la question 7. que $\varphi^2(u)e^{-u^2/2}$ est intégrable.

De même $u^2e^{-u^2/2} = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ ainsi que $u\varphi(u)e^{-u^2/2}$ qui est un $o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ d'après la question 7.

Il en découle que $|u - \varphi(u)|^2e^{-u^2/2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. $\square$

11. Le fait que $\ln(f(u))f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable prouve par la question 5. que $\ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}$ l'est et que :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2} du. \quad \square$$

12. Il en découle que $E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln(f(\varphi(u))) - \frac{1}{2}u^2 + u\varphi(u) - \frac{1}{2}\varphi^2(u)\right)e^{-u^2/2} du$.

Or d'après la question 4. on a $\ln(f(\varphi(u))) - \frac{1}{2}\varphi^2(u) = -\ln(\varphi'(u)) - \frac{1}{2}u^2$.

$$\text{Ainsi } E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-u^2 + u\varphi(u) - \ln(\varphi'(u))\right)e^{-u^2/2} du.$$

D'après une remarque de la question 10., $(u\varphi(u) - u^2)e^{-u^2/2}$ est intégrable. On peut donc linéariser l'intégrale précédente et l'intégrale nulle de la question 9. ce qui prouve que :

$$\begin{aligned} E(f) - \Phi(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-u^2 + u\varphi(u))e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(\varphi'(u))e^{-u^2/2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1)e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(\varphi'(u))e^{-u^2/2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)))e^{-u^2/2} du. \quad \square \end{aligned}$$

13. Par concavité de la fonction $\ln$ on a $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. Il en découle par positivité de l'intégration que $\Phi(f) \leq E(f)$ pour toute fonction f de H_0 . $\square$

14.● En outre par théorème de positivité stricte de l'intégration pour les fonctions continues, il vient que $E(f) = \Phi(f)$ si et seulement si $\ln(\varphi'(u)) = \varphi'(u) - 1$ pour tout réel u soit si et seulement si $\varphi'(u) = 1$ pour tout réel u soit si et seulement si $\varphi(u) = u + C$ pour tout réel u .

● La question 4. donne alors que $f(u + C) = e^{Cu - C^2/2}$ donc que $f(u) = e^{Cu - C^2/2}$ pour tout réel u .

• Réciproquement soit f une fonction de cette forme. Pour montrer qu'elle convient il faut prouver qu'elle appartient bien à H_0 et que $E(f) = \Phi(f)$. Il suffit en fait de prouver qu'elle appartient à H_0 car alors la relation 4. montre que $\varphi'(u) = 1$ pour tout u donc que $E(f) = \Phi(f)$ d'après l'équivalence établie au début de cette question.

- Déjà on a bien f continue et $0 < f(x)$ pour tout x .
- En outre $f(x) \leq \frac{1}{\rho} e^{(1/2-\rho)x^2}$ si et seulement si $(\frac{1}{2} - \rho)x^2 - Cx + \frac{C^2}{2} - \ln \rho \geq 0$ pour tout x .

Or $\Delta = C^2 - 4(\frac{1}{2} - \rho)(\frac{C^2}{2} - \ln \rho)$ tend vers $-\infty$ lorsque $\rho \rightarrow 0^+$ donc est négatif pour $0 < \rho \leq \alpha$ où α est un réel positif dépendant de C .

Il en résulte que le trinôme $(\frac{1}{2} - \rho)x^2 - Cx + \frac{C^2}{2} - \ln \rho$ est bien positif ou nul pour tout réel x si l'on choisit $\rho \leq \inf(\alpha, \frac{1}{2})$ ce qui prouve que f appartient bien à H .

- Par ailleurs $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-C)^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2} dv = \sqrt{2\pi}$.

En conclusion les fonctions f de H_0 telles que $E(f) = \Phi(f)$ sont toutes les fonctions de la forme $f(x) = e^{Cx - C^2/2}$. $\square$

Extension aux fonctions positives.

15. L'énoncé qui manquait déjà de rigueur à plusieurs reprises précédemment commence à atteindre des sommets en la matière.

- La première chose qu'il convient d'établir ici est que $f_n \in H_0$.

Déjà f_n est strictement positive et continue et en outre, vu que par hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$ il vient que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-u^2/2} du = \frac{n-1}{n} \sqrt{2\pi} + \frac{1}{n} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$.

Reste à établir que $f_n \in H$ c'est à dire l'existence, pour tout n , d'un entier $\rho_n > 0$ tel que ...

Or la fonction constante égale à 1 appartient clairement à H comme on le voit en choisissant $\rho = \frac{1}{2}$. Notons ρ_0 un réel positif convenant pour la fonction g (il existe par hypothèse).

En remarquant que, pour tout réel x fixé, la fonction $\rho \mapsto \frac{1}{\rho} \exp\left((\frac{1}{2} - \rho)x^2\right)$ est clairement décroissante, il vient que $\rho = \min(\frac{1}{2}, \rho_0)$ convient à la fois pour la fonction g et la fonction constante égale à 1 donc aussi pour la fonction f_n et cela pour tout entier n .

En conclusion les fonctions f_n appartiennent bien à H_0 . $\square$

- Les fonctions $\psi(f_n(u)) e^{-u^2/2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et convergent simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\psi(g(u)) e^{-u^2/2}$ elle aussi continue sur $\mathbb{R}$.

En outre on a $\psi(f_n(u)) e^{-u^2/2} \leq M(u)$, la fonction M étant définie à la question 10. (ρ ayant la valeur définie ci-dessus). Or comme déjà noté cette fonction est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la convergence dominée prouve alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(f_n(u)) e^{-u^2/2} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(g(u)) e^{-u^2/2} du$.

Ainsi $E(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E(g)$. $\square$

16. Commençons par remarquer que comme f_n appartient à H_0 (voir ci-dessus) on peut bien envisager la fonction φ_n . Soit x un réel quelconque fixé dans la suite et $\ell(x)$ une valeur d'adhérence de la suite $(\varphi_n(x))$ de sorte qu'il existe une application α strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(\varphi_{\alpha(n)}(x))$ converge vers $\ell(x)$.

Pour tout n on a $\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} f_{\alpha(n)} e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$ ce qui s'écrit :

$$\frac{\alpha(n)-1}{\alpha(n)} \int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} g(u) e^{-u^2/2} du + \frac{1}{\alpha(n)} \int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \quad (1)$$

Or lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a $\alpha(n) \geq n \rightarrow +\infty$ et donc $\frac{\alpha(n)-1}{\alpha(n)} \rightarrow 1$ et $\frac{1}{\alpha(n)} \rightarrow 0$.

Par ailleurs $\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} g(u) e^{-u^2/2} du \rightarrow \int_{-\infty}^{\ell(x)} g(u) e^{-u^2/2} du$ car une intégrale fonction de sa borne supérieure est continue. De même $\int_{-\infty}^{\varphi_{\alpha(n)}(x)} e^{-u^2/2} du \rightarrow \int_{-\infty}^{\ell(x)} e^{-u^2/2} du$.

En passant à la limite dans (1) on obtient alors $\int_{-\infty}^{\ell(x)} g(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$.

Cette relation est vraie pour tout réel x et toute valeur d'adhérence $\ell(x)$ de la suite $(\varphi_n(x))$ (et en particulier pour la limite inférieure et la limite supérieure ce qui fournit la relation (2) demandée). $\square$

REMARQUE : Cette relation (2) prouve que les fonctions ψ_j sont à valeurs finies.

En effet si $\psi_j(x) = -\infty$ il vient $\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = 0$ ce qui est absurde.

De même si $\psi_j(x) = +\infty$ il vient $\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$ donc $\int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 0$ ce qui est également absurde. $\square$

17.● Si $x_1 < x_2$ la relation (2) ci-dessus fournit $\int_{\psi_j(x_1)}^{\psi_j(x_2)} g(u)e^{-u^2/2} du = \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2} du > 0$ par théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues et donc $\psi_j(x_1) < \psi_j(x_2)$ (par l'absurde car $g(u)e^{-u^2/2} \geq 0$). Ainsi les fonctions ψ_j sont strictement croissantes. $\square$

REMARQUE : La démonstration ci-dessus prouve d'une manière plus générale que si $x_1 < x_2$ alors $\psi_i(x_1) < \psi_j(x_2)$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$.

- Comme ψ_j est croissante, elle admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $-\infty$. En passant à la limite lorsque $x \rightarrow -\infty$ dans la relation (2) de la question 16, il vient $\int_{-\infty}^{\ell} g(u)e^{-u^2/2} du = 0$. Le théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues montre alors que $g(u) = 0$ pour $u \leq \ell$. Il en découle que $\ell \leq a$.

Supposons que $\ell < a$. Il existe alors $A > 0$ tel que $\ell \leq \psi_j(x) < a$ pour $x \leq -A$. La relation (2) de la question 16 écrite en $-A$ fournit alors $\int_{-\infty}^{-A} e^{-u^2/2} du = 0$ ce qui est absurde. En conclusion $\ell = a$ i.e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) = a$.

On prouve de même que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_j(x) = b$. $\square$

18 et 19. La question 18 est encore une fois très mal posée et ne permet de résoudre la question 19 (à savoir que D est dénombrable) que si a et b sont finis.

Ce qui est d'autant plus scandaleux que la notion d'ensemble dénombrable n'est plus au programme !

Une solution consiste à remarquer que comme ψ_1 est croissante, elle est discontinue en x si et seulement si $\psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > 0$. On peut alors trouver un rationnel $r(x) \in]\psi_1(x^-), \psi_1(x^+) [$.

Le théorème de la limite monotone montre que $\psi_1(x^+) < \psi_1(y) < \psi_1(z^-)$ si $x < y < z$ car ψ_1 est strictement monotone. Il en découle que l'application r est une injection de D dans $\mathbb{Q}$ ce qui prouve que D est dénombrable.

Cette technique est certes classique mais pas pour un élève de MP et d'ailleurs encore une fois fait intervenir des notions hors programme.

20. Si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ la relation (2) de la question 16 prouve que $\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u)e^{-u^2/2} du = 0$ donc que g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$ par le théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues. $\square$

21. Soit x un réel quelconque fixé.

En faisant tendre y vers x^- puis vers x^+ dans la relation (2) de la question 16 écrite en $\psi_1(y)$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x^-)} g(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{\psi_1(x^+)} g(u)e^{-u^2/2} du.$$

Ainsi $\int_{\psi_1(x^-)}^{\psi_1(x^+)} g(u)e^{-u^2/2} du = 0$ pour tout réel x .

Comme $\psi_1(x) \in [\psi_1(x^-), \psi_1(x^+)]$ il découle du théorème de positivité stricte de l'intégration des fonctions continues que si $g(\psi_1(x)) > 0$ alors $\psi_1(x^-) = \psi_1(x^+)$ i.e. que ψ_1 est continue en x . $\square$

22. Compte-tenu de la remarque du début de la question 17, on a, pour tout x , la chaîne d'inégalités suivantes :

$$\psi_1(x - \frac{2}{n}) \leq \psi_2(x - \frac{1}{n}) \leq \psi_2(x + \frac{1}{n}) \leq \psi_1(x + \frac{2}{n}) \quad (3).$$

En passant à la limite il vient que $\psi_1(x^-) \leq \psi_2(x^-) \leq \psi_2(x^+) \leq \psi_1(x^+)$.

Il en découle que si ψ_1 est continue en x alors $\psi_2(x^-) = \psi_2(x^+) = \psi_1(x)$ donc $\psi_2(x) = \psi_1(x)$ (car ψ_2 est croissante) et également que ψ_2 est donc continue en x .

En inversant les indices 1 et 2 dans la chaîne d'inégalités (3) on prouve en fait que :

Pour $i \neq j \in \{1, 2\}^2$ la fonction ψ_i est continue en x si et seulement si ψ_j l'est et alors $\psi_i(x) = \psi_j(x)$. $\square$

23. Comme ψ_1 est continue sur le compact K elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $|\psi_1(x) - \psi_1(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $x, y \in K$ et $|x - y| \leq \alpha$.

Nous avons évidemment $K \subset \bigcup_{y \in K}]y - \alpha, y + \alpha[$ et par le théorème de Borel-Lebesgue (hors programme MP again

!) on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{j=0}^q]y_j - \alpha, y_j + \alpha[\subset \bigcup_{j=0}^q [y_j - \alpha, y_j + \alpha]$.

Or $K \cap [y_j - \alpha, y_j + \alpha]$ est un compact (fermé borné) donc admet un minimum x_{2j} et un maximum x_{2j+1} appartenant bien sûr tous deux à K et vérifiant $x_{2j} \leq x_{2j+1}$. Et naturellement $K \subset \bigcup_{j=0}^q [x_{2j}, x_{2j+1}]$.

Au passage notons à nouveau une faute d'énoncé : on n'a pas forcément l'inégalité stricte $x_{2j} < x_{2j+1}$ comme on le voit en choisissant pour K un singleton !

En fait on a l'inégalité stricte si K ne comporte aucun point isolé car comme l'ensemble des discontinuités de ψ_1 est dénombrable, $K \cap [y_j - \alpha, y_j + \alpha]$ ne peut alors être réduit au seul point y_j .

Soient désormais u et v tels que $x_{2j} \leq u \leq v \leq x_{2j+1}$. Comme ψ_1 est croissante, il vient : $\psi_1(v) - \psi_1(u) \leq \psi_1(x_{2j+1}) - \psi_1(x_{2j}) \leq \varepsilon$. $\square$

24. Si ψ_1 est continue en un réel x on a $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ d'après la question 22. En un tel point la suite $(\varphi_n(x))$ admet donc une unique valeur d'adhérence $\psi_1(x)$ qui est finie comme on l'a noté en remarque de la question 16 et converge donc vers $\psi_1(x)$.

Ceci est en particulier réalisé en les points x_{2j} et x_{2j+1} pour j de 0 à q .

Soit alors $\varepsilon > 0$ donné quelconque.

Il existe N_ε tel que $|\varphi_n(x_k) - \psi_1(x_k)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_\varepsilon$ et tout k de 0 à $2q + 1$.

Soit désormais $x \in K$ et $n \geq N_\varepsilon$. Il existe j tel que $x_{2j} \leq x \leq x_{2j+1}$. La croissance de φ_n fournit :

$$|\varphi_n(x) - \psi_1(x)| \leq \max(|\varphi_n(x_{2j}) - \psi_1(x)|, |\varphi_n(x_{2j+1}) - \psi_1(x)|).$$

Or $|\varphi_n(x_{2j}) - \psi_1(x)| \leq |\varphi_n(x_{2j}) - \psi_1(x_{2j})| + |\psi_1(x_{2j}) - \psi_1(x)| \leq 2\varepsilon$ compte-tenu du choix de N_ε et de la question 23.

De même $|\varphi_n(x_{2j+1}) - \psi_1(x)| \leq 2\varepsilon$.

Ce qui prouve bien que la suite (φ_n) converge uniformément sur K vers ψ_1 . $\square$

25. Encore une faute d'énoncé ! Il faut lire que pour tout $A > 0$ il existe n tel que ...

Soit $A > 0$ donné quelconque. Pour tout entier m et tout réel $u \in [-A, A]$ on a $\varphi_m(-A) \leq \varphi_m(u) \leq \varphi_m(A)$ par croissance de la fonction φ_m .

Comme $\psi_1(-A) = \liminf \varphi_m(-A)$ est fini (voir remarque de la question 16) l'ensemble des indices m tels que $\varphi_m(-A) \leq \psi_1(-A) - 1$ est fini sinon il existerait une suite extraite convergeant soit vers $-\infty$ soit vers $\ell \leq \psi_1(-A) - 1$ ce qui est contradictoire avec la définition de la limite inf.

Ainsi il existe un entier n_1 tel que $\psi_1(-A) - 1 \leq \varphi_m(-A)$ pour tout $m \geq n_1$.

On prouve de même qu'il existe n_2 tel que $\varphi_m(A) \leq \psi_1(A) + 1$ pour tout $m \geq n_2$.

Il en découle que $\psi_1(-A) - 1 \leq \varphi_m(u) \leq \psi_1(A) + 1$ pour tout $u \in [-A, A]$ et tout entier $m \geq N_A = \max_{\text{DEF}}(n_1, n_2)$.

Ainsi pour tout réel $A > 0$ il existe un entier N_A tel que $\sup_{u \in [-A, A]} |\varphi_m(u)| \leq |\psi_1(-A)| + |\psi_1(A)| + 1$. $\square$

Notons $L(A) = |\psi_1(-A)| + |\psi_1(A)| + 1$. Il vient pour $m \geq N_A$ que $\sup_{u \in [-A, A]} |u - \varphi_m(u)|^2 \leq L(A)^2$.

Par ailleurs la fonction $u \mapsto u - \varphi_n(u)$ est continue donc bornée sur le compact $[-A, A]$ par un réel noté L_n .

Il en découle que, pour tout entier n , $\sup_{u \in [-A, A]} |u - \varphi_m(u)|^2 \leq M(A)$ avec $M(A) = \max_{\text{DEF}}(L(A)^2, L_1^2, \dots, L_{N(A)}^2)$. $\square$

26. On sort ici totalement (à nouveau !) du cadre du programme. D'une part $u - \psi_1(u)$ n'est pas continue par morceaux sur $[-A, A]$ car peut y admettre une infinité dénombrable de discontinuité et on intègre sur K qui est un fermé quelconque de $[-A, A]$! Il faut admettre ici que les propriétés classiques de l'intégrale sont encore vérifiées.

Dans la suite on note $F_n : u \mapsto |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2}$ et $F : u \mapsto |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2}$.

K est une partie fermée de $[-A, A]$ donc compacte et incluse dans C . Il en découle d'après la question 24 que la suite (φ_n) converge uniformément vers ψ_1 sur K . Or pour $u \in K$ on a :

$$\begin{aligned} |F(u) - F_n(u)| &= |\psi_1(u) - \varphi_n(u)| \times |2u - \psi_1(u) - \varphi_n(u)| \times e^{-u^2/2} \\ &\leq |\psi_1(u) - \varphi_n(u)| \times \underbrace{(2A + 2|\psi_1(-A)| + 2|\psi_1(A)| + 1)}_{\text{Constante}} \times 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite (F_n) converge uniformément vers F sur K et donc $\int_K F_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_K F(u) du$.

En notant U l'ouvert $[-A, A] \setminus K$, pour conclure il suffit donc de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\int_U F(u) \, du \leq \varepsilon \text{ et } \int_U F_n(u) \, du \leq \varepsilon \text{ pour tout entier } n.$$

Or d'après la question 25, on a $\int_U F_n(u) \, du \leq M \int_U du = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{2^p} = 2\varepsilon$.

Cette inégalité est également vraie avec la fonction F car, en considérant une suite extraite de la suite $(\varphi_n(u))$ qui converge vers $\psi_1(u)$, on voit que l'on a également $\sup_{u \in [-A, A]} |u - \psi_1(u)|^2 \leq M$.

$$\text{Ainsi } \int_{-A}^A F_n(u) \, du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A F(u) \, du. \quad \square$$

27 On comprend bien qu'il s'agit de démontrer que $\Phi(g) \leq E(g)$ comme annoncé au début de la partie III.

Sauf que $\Phi(g)$ n'est pas défini ! Sans-doute faut-il comprendre que $\Phi(g) \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2} \, du = \int_{\mathbb{R}} F(u) \, du$ ce qui semble naturel. Encore faudrait-il prouver pour fonder cette définition que cela ne dépend pas de la suite approximante (f_n) choisie ...

Soit $A > 0$ donné quelconque. Nous avons $\int_{-A}^A F_n(u) \, du \leq \int_{\mathbb{R}} F_n(u) \, du \leq E(f_n)$ d'après la question 14.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient que $\int_{-A}^A F(u) \, du \leq E(g)$ d'après les questions 15 et 26.

Comme ceci est vrai pour tout $A > 0$ cela prouve que la fonction positive F est intégrable et que $\int_{\mathbb{R}} F(u) \, du \leq E(g)$ i.e. que $\Phi(g) \leq E(g)$. $\square$

_____ *FIN* _____