

1 I-Inégalité d'interpolation des dérivés

I-A-Cas particulier

1. Q1 Soit $x \in [0, 1]$ on a : $f(x) = \int_{x_1}^x f'(t)dt + f(x_1)$ en utilisant l'inégalité triangulaire et de la moyenne alors
 $|f(x)| \leq |x - x_1| \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| + |f(x_1)|$ et puisque x et x_1 entre 0 et 1 donc.
 $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + |f(x_1)|$ pour tout f dans $C^1([0, 1])$ avec $C=1$.

2. Q2 la fonction constante $f(x)=1$ pour tout x dans $[0, 1]$ ne vérifie pas l'inégalité pour tout $C \in [0, 1]$

3. Q3 f étant de classe C^2 donc d'après le théorème des accroissements finis il existe y entre x_1 et x_2 tel que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(y)$ donc pour tout $f \in C^2([0, 1])$ et $x \in [0, 1]$ et d'après l'inégalité des accroissements finis on a :
 $|f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}| = |f'(x) - f'(y)| \leq |x - y| \|f''\|_\infty \leq \|f''\|_\infty$.

4. Q4 D'après Q3 et l'inégalité triangulaire on a : $\|f'\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_2)| + |f(x_1)|}{x_2 - x_1}$ (car $f'(x) = \int_{x_1}^x f''(t)dt + f'(x_1)$ et inégalité triangulaire.

5. Q5 on a : $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + |f(x_1)| \leq \|f'\|_\infty + (|f(x_1)| + |f(x_2)|)$ et ;
 $\|f'\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_2)| + |f(x_1)|}{x_2 - x_1}$ donc
 $Max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \leq \|f''\|_\infty + (1 + \frac{1}{x_2 - x_1})(|f(x_1)| + |f(x_2)|)$ alors
 $C = (1 + \frac{1}{x_2 - x_1})$ convient.

Cas général par interpolation de Lagrange.

6. Q6 ψ est linéaire évidente ; montrons qu'il est injective ,soit $P \in Ker(\psi)$ donc $\psi(P) = 0$ alors $\forall i \in [1, K]$ on a : $P(x_i) = 0$ donc P est nul car P admet au moins K racines et $d(P) \leq (K - 1)$ donc $Ker(\psi) = 0$; donc ψ est injective donc bijective (car $dim(R_{K-1}[X]) = dim(R^K)$)

7. Q7 ψ est bijective donc pour tout $j \in [1, K]$ il existe un unique $L_j \in R_{K-1}[X]$ tel que :
 $L_j(x_k) = \delta_{j,k}$ ($L_j = \psi^{-1}(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ou 1 au j ièm rang) pour tout $k \in 1, \dots, K$ Alors pour tout $P \in R_{K-1}[X]$ tel que $P(x_k) = f(x_k)$ on a :

$P = \sum_{i=1}^K f(x_i)L_i$ on effect le polynôme $Q = P - \sum_{i=1}^K f(x_i)L_i$ s'annule en au moins K racines et son degré est inférieur ou égale à $K-1$.

8. Q8 par récurrence sur k ; pour $k=0$ P s'annule en $K = K-0$ réels distincts de $[0, 1]$.

supposons le résultat vrai pour un k de $[1, K-2]$ c a d $(f^{(k)} - P^{(k)})$ s'annule en $K-k$ réels distincts de $[0, 1]$ alors d'après le théorème de Rolle $f^{(k+1)} - P^{(k+1)}$ s'annule en au moins $K-k-1 = K-(k+1)$ réels distincts de $[0, 1]$. CQFD.

9. Q9 il existe c dans $[0, 1]$ tel que $(f^{(k)}(c) - P^{(k)}(c) = 0$ donc pour tout x dans $[0, 1]$:

on a : $|f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)| = |f^{(k+1)}(c) - P^{(k+1)}(c) + \int_c^x (f^{(k+1)}(t) - P^{(k+1)}(t)) dt|$
 Donc : $\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq |x - c| \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty \leq \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty$ (car $|x - c| \leq 1$ et inégalité de la moyenne).

10. Q10 Montrons le résultat par récurrence sur k .

pour $k=1$ vrai d'après Q1

supposons la propriété vraie pour K et montrons quelle est vraie pour $K+1$ et soit $f \in C^2([0, 1])$ et

$$P = \sum_{l=1}^{K+1} f(x_l)L_l$$

Soit C_1 tel que

$$\max_{1 \leq k \leq K-1} \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)}\|_\infty + C_1 \sum_{l=1}^K |f(x_l)|$$

On a : $\|f^{(K)}\|_\infty \leq \|P^{(K)}\|_\infty + \|f^{(K)} - P^{(K)}\|_\infty$ d'après l'inégalité triangulaire et $\|f^{(K)} - P^{(K)}\|_\infty \leq \|f^{(K+1)} - P^{(K+1)}\|_\infty$.

Or

$$\|P^{(K)}\|_\infty = \left\| \sum_{l=1}^{K+1} f(x_l)L_l^{(K)} \right\|_\infty \leq C_2 \sum_{l=1}^{K+1} |f(x_l)|$$

et $P^{(K+1)} = \sum_{l=1}^{K+1} f(x_l)L_l^{(K+1)}$ Donc $\|P^{(K+1)}\|_\infty \leq C_3 \sum_{l=1}^{K+1} |f(x_l)|$.

avec $C_2 = \max_{1 \leq l \leq K+1} \|L_l^{(K)}\|_\infty$. Et $C_3 = \max_{1 \leq l \leq K+1} \|L_l^{(K+1)}\|_\infty$

On pose $C = C_1 + C_2 + C_3$ alors on a :

$$\max_{1 \leq k \leq K+1} \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K+1)}\|_\infty + C \sum_{l=1}^{K+1} |f(x_l)|$$

2 II- Dérivation C^K pour les séries de fonctions

II-A- Enoncé général

1. Q11 Soit f comme dans l'énoncé on a pour tout

$$k \in \llbracket 1, K-1 \rrbracket \|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \|f_n^{(K)}\|_\infty + C \sum_{l=1}^K |f_n(x_l)|$$

or $\sum_{n \geq 1} \|f_n^{(K)}\|_\infty$ et

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{l=1}^K |f_n(x_l)|$$

convergent ; donc $\sum_{n \geq 1} f_n^k$ converge normalement sur $[0, 1]$.

2. Q12 Soient f_n et σ comme dans l'énoncé alors : $f_n \circ \sigma$ est de classe C^K or $\sup_{a \leq x \leq b} |f_n \circ \sigma(x)| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f_n \circ \sigma(t)|$. donc $\sum_{n \geq 1} (f_n \circ \sigma)^{(K)}$ converge normalement sur $[0, 1]$ alors d'après Q11 pour tout $k \in \llbracket 1, K-1 \rrbracket$ la série $\sum_{n \geq 1} (f_n \circ \sigma)^{(k)}$ converge normalement sur $[0, 1]$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$.
3. Q13 On a : i) Pour tout n f_n est de classe $C^{(K)}$
 ii) pour tout $1 \leq k \leq K$ la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$ alors d'après le théorème de dérivation sous le signe somme la somme

$$F_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est de classe $C^{(K)}$ et on peut dériver sous le signe somme c a d

$$F_0^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

II-B-Application

4. Q14 Soit $h_n : x \in]0, +\infty[\mapsto (-1)^n 2^{-(nx^2)}$ alors Si f_n existe alors elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et d'après le théorème de Rolle il existe un c unique $c \in (]1, 2[$ tel que $f_n'(c) = 0$ soit $g_n(x) = \int_c^x h_n(t) dt$ et $f_n(x) = \int_1^x g_n(t) dt + \int_2^1 g_n(t) dt$.
 Alors on a f_n est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f_n''(x) = h_n(x)$ et $f_n(1) = f_n(2) = 0$. D'où l'existence.
 Unicité si une autre fonction k_n vérifie les hypothèses alors : $f_n'' = k_n''$ donc f_n' et k_n' diffèrent d'une constante ; or $f_n'(c) = k_n'(c) = 0$ donc $f_n' = k_n'$ sur $]0, +\infty[$ donc f_n et k_n diffèrent d'une constante or $f_n(1) = k_n(1) = 0$ donc $f_n = k_n$ CQFD.

5. Q15 Soit a et b strictement positifs tel que $a \leq b$ et soit $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ pour tout $x \in [a, b]$ on a :
- $|f_n''(x)| \leq e^{-(na^2 \ln(2))}$ et la série de terme général $e^{-(na^2 \ln(2))}$ converge
- Donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n''$ converge normalement sur $[a, b]$.
- Or les séries de termes général $f_n(x_1)$ et $f_n(x_2)$ convergent alors f_n vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2) donc d'après Q13

$$F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}$$

est de classe C^2 sur $[a, b]$ donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

6. Q16 On peut dériver sous le signe somme : pour tout

$$x \in]0, +\infty[\quad F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2^{-(nx^2)}$$

7. Q17 On a : f_n vérifie les hypothèses de Q4 sur $[1, 2]$ et sur ce segment on a : $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n''\|_\infty + C \frac{|f_n(1)| + |f_n(2)|}{2-1} = \|f_n''\|_\infty = 2^{-n}$
- Donc pour tout x

$$\in [1, 2]; |F(x)| \leq \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2^{-n} \right| = \frac{1}{3}$$

3 III-Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

III-A- Construction d'une suite

1. Q18 construisons la fonction ϕ .
la série

$$\sum_{n \geq 0} (a_n)^2$$

converge donc :

Il existe n_0 entier tel que :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (a_n)^2 \leq 1 = \frac{1}{8^0}$$

Supposons construit $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ tel que :

$$\sum_{n=n_j}^{+\infty} (a_n)^2 \leq \frac{1}{8^j}$$

Il existe n_{k+1} strictement supérieur à n_k tel que :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (a_n)^2 \leq 1 = \frac{1}{8^{(k+1)}}$$

alors l'application

$$\phi : k \in \mathbb{N} \mapsto n_k$$

convient.

2. Q19 On a : $E(X_n) = 0$ et $V(X_n) = 1$ pour tout n de plus

$$S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)} = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n X_n$$

Donc

$$E(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n E(X_n) = 0$$

et

$$V(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)})^2 = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} (a_n)^2 V(X_n) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} (a_n)^2$$

(car les X_n sont indépendantes).

3. Q20 D'après l'inégalité de Benayme Chebychev on a :

$$P(A_j) = P(|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}| \geq 2^{-j}) \leq \frac{V(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)})}{2^{-2j}} \leq \frac{1}{2^j}$$

; D'après Q18.

4. Q21 Soit $m, m' \in [\phi(j) + 1, \phi(j + 1)]$ tel que $m < m'$ alors $\omega \in B_{j,m'} \iff |S'_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| > 2^{-j}$ et $|S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| \leq 2^{-j}$ pour tout dans $[\phi(j), m' - 1] \iff \omega \notin B_{j,m}$ donc $B_{j,m} \cap B_{j,m'} = \emptyset$
par définition on a : $\omega \in B_j \iff \exists m \in [\phi(j) + 1, \phi(j + 1)]$ tel que $\omega \in B_{j,m}$ donc : $B_j = \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m}$.

5. Q22 On a : $A_j \subset B_j$ donc $A_j = A_j \cap B_j = \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} (A_j \cap B_{j,m})$ par additivité de la probabilité du fait que les événements de la réunion sont deux à deux incompatibles on a :

$$P(A_j) = \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} P(A_j \cap B_{j,m})$$

6. Q23

$$\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}$$

est la somme de $\phi(j+1) - \phi(j)$ variables aléatoires indépendantes que l'on peut assimiler à une variable binomiale de paramètre $n = \phi(j+1) - \phi(j)$, $\frac{1}{2}$ donc il existe un p entier tel que :

$$P(|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j} \cap B_{j,m}) = \binom{n}{p} \frac{1}{2^n}$$

donc $f(\alpha) = 2^n \binom{n}{p} \frac{1}{2^n} \in \mathbb{N}$

Pour tout α réel $\alpha a_n X_n$ et $-\alpha a_n X_n$ prennent les mêmes valeurs αa_n et $-\alpha a_n$ donc f est paire.

7. Q24 On a : $B_j = \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m}$; donc :

$\omega \in B_j \implies \exists m \in [|\phi(j) + 1, \phi(j+1)|]$ tel que $\omega \in B_{j,m}$.

cas 1 $m = \phi(j+1)$ alors $\omega \in (|S_{\phi(j+1)} - S_m + S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}) \cap B_{j,m}$.

donc $\alpha = 1$ convient.

Cas $m \neq \phi(j+1)$ alors on a l'un des cas :

$\omega \in (|S_{\phi(j+1)} - S_m + S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}) \cap B_{j,m}$ et $\alpha = 1$ convient.

Ou bien : $\omega \in (|-S_{\phi(j+1)} + S_m + S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}) \cap B_{j,m}$ et $\alpha = -1$ convient ;

d'où le résultat.

8. Q25 D après Q24 on a : $B_j \subset A_j \cup (|S_{\phi(j+1)} - S_m + S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}) \cap B_{j,m}$

donc :

$$P(B_j) \leq P(A_j) + P(|S_{\phi(j+1)} - S_m + S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}) \cap B_{j,m} \leq 2P(A_j).$$

9. Q26 La suite $\bigcup_{j \geq J} (B_j)_{J \geq 0}$ est décroissante donc d'après le théorème de la continuité monotone on a :

$$P(B) = \lim_{J \rightarrow +\infty} P(\bigcup_{j \geq J} B_j)$$

alors d'après Q25 et le fait que la probabilité d'une réunion d'événements est inférieure ou égale à la somme des probabilités de ces événements on aura :

$$0 \leq P(\bigcup_{j \geq J} B_j) \leq 2 \sum_{j \geq J} P(A_j) \leq \sum_{j \leq J} 2^{-j} \rightarrow 0 \text{ lorsque } J \text{ tend vers } +\infty.$$

Donc $P(B) = 0$.

10. Q27 l'événement $\exists J \in \mathbb{N} \forall j \geq J \forall n \in [|\phi(j) + 1, \phi(j+1)|] |S_n - S_{\phi(j)}| \leq 2^{-j}$ est l'événement contraire de B donc sa probabilité vaut 1 puisque celle de B est $P(B) = 0$.

11. Q28 Il existe J tel que $\forall j \geq J |S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}| \leq 2^{-j}$.

Or la série

$$\sum_{j \geq 0} 2^{-j}$$

converge donc l'événement $\sum_{j \leq J} (S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)})$ converge absolument donc converge avec une probabilité égale à 1 et par télescopage l'événement

ment la suite $(S_{\phi(j)})_{j \geq 0}$ Converge avec la probabilité égale à :1.

12. Q29 L'événement (suite partielle) la suite $(S_{\phi(j)})$ converge avec une probabilité égale à 1 donc l'événement la série $\sum_{j \geq 0} a_n X_n$ converge avec une probabilité 1.

4 IV-Dérivation pour des séries aléatoires de fonctions

- Q30 Si pour tout $l \in [0, K]$ la série $\sum f_n(x_k)$ converge absolument et $(f_n)^2(x_l) \leq |f_n(x_l)|$ donc pour tout l la série $\sum (f_n(x_l))^2$ converge donc $(H'_2) \implies (H_2)$.
- Q31 On a la série $\sum (f_n(x_l))^2$ converge pour tout l et les f_n vérifient (H_1) donc d'après III-C l'événement pour tout $l \in [1, K]$. la série $\sum X_n f_n(x_l)$ converge est de probabilité égale à :1.
- Q32 avec les notations de Q7 on a d'après Q9 :
 $\|(f_n - P_n)^{(K-1)}\|_\infty \leq \|(f_n - P_n)^{(K)}\|_\infty$ et par récurrence descendante puisque :
 $\|(f_n - P_n)^{(k-1)}\|_\infty \leq \|(f_n - P_n)^{(k)}\|_\infty$ pour tout $k \in [1, K]$). De plus la série $\sum (f_n - P_n)^2(x_l)$ converge pour tout x_l de la question Q7 .(car $(f_n - P_n)^2(x_l) \leq 2((f_n(x_l))^2 + (P_n(x_l))^2) \leq 4(f_n(x_l))^2$ (inégalité de la moyenne)et $\sum (f_n(x_l))^2$ converge) Donc d'après III-C on peut conclure que l'événement ainsi considéré est de probabilité 1 :
- Q33 On a : $\|f_n^{(K)}\|_\infty \leq \|P_n^{(K)}\|_\infty + \|(f_n - P_n)^{(K)}\|_\infty$.
 De plus les séries $\sum P_n^2(x_l)$ et $\sum (f_n - P_n)^2(x_l)$ convergent pour tout $l \in [1, K]$ Donc d'après Q32 l'événement considéré est de probabilité 1.
- Q34 On a : f_n est de classe C^∞ En calculant $(f'_n$ et f''_n on remarque que :
 $\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ et $\|f''_n\|_\infty \leq \frac{2}{n}$
 et on a : la série $\sum (f_n)^2(x_l)$ converge (car $(f_n(x_l))^2 = O(\frac{1}{n^2})$ pour tout $l \in [0, K]$ donc pour $K=2$ l'événement précédent se réalise avec les fonctions f_n avec la probabilité 1.