

CORRIGÉ DU DEVOIR N°3.

PARTIE 1.

1.) On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1, \quad \cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

D'où :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad t_0(x) = 1, \quad t_1(x) = x, \quad t_2(x) = 2x^2 - 1, \quad t_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

2.) On a :

- t_0 n'a aucune racine et aucun extremum.
- t_1 admet 0 comme racine , -1 comme minimum égal à -1 et 1 comme maximum égal à 1.
- t_2 admet $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ comme racines, en 0 on a un minimum égal à -1 et en -1 ou 1 on a un maximum égal à 1.
- t_3 admet 0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ comme racines, en $\frac{1}{2}$ ou -1 on a un minimum égal à -1 et en $-\frac{1}{2}$ ou 1 on a un maximum égal à 1.

Remarque. Ne pas oublier les extremums aux bornes du domaine $[-1, 1]$.

3.) Racines de t_n .

On a :

$$t_n(x) = 0 \iff \cos(n \arccos x) = 0 \iff \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

La fonction arccos est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$, donc :

$$0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}.$$

Comme k est un entier alors k est élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Les racines de t_n sont les réels x_k avec k élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Pour tout k compris entre 0 et $n-1$, on a

$$x_{n-k-1} = \cos \theta_{n-k-1} = \cos \frac{2(n-k-1) + 1}{2n} \pi,$$

$$x_{n-k-1} = \cos\left(\pi - \frac{2k+1}{2n}\pi\right) = -\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = -x_k.$$

Les racines x_k sont opposées deux à deux.

4.1.) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\frac{2k+1}{2n}\pi} = e^{i\frac{p\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^k.$$

Le complexe S_n est la somme d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{p\pi}{n}}$, comme l'entier p est compris entre 1 et $n-1$ alors $e^{i\frac{p\pi}{n}} \neq 1$, donc :

$$S_n = e^{i\frac{p\pi}{2n}} \frac{e^{ip\pi} - 1}{e^{i\frac{p\pi}{n}} - 1}.$$

On sait que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad e^{iu} - 1 = e^{i\frac{u}{2}} \left(e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}\right) = 2i \sin\left(\frac{u}{2}\right) e^{i\frac{u}{2}}.$$

On en déduit que :

$$S_n = e^{i\frac{p\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}.$$

4.2.) Le nombre p est entier donc $\sin p\pi = 0$, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(p\theta_k) = \Re(S_n) = \frac{\sin p\pi}{2 \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} = 0.$$

5.) On sait que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

On a :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = \cos\left((n+1) \arccos x\right) + \cos\left((n-1) \arccos x\right),$$

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2 \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x).$$

La fonction $\arccos$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$ donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos x) = x.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2x t_n(x).$$

6.) Soit n un entier strictement positif, on montre par récurrence l'assertion suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad t_k \text{ est une fonction polynomiale et } t_k(x) = 2^{k-1}x^k + \sum_{p=0}^{k-1} a_{p,k}x^p.$$

De la première question, on déduit que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. On remarque que pour $n = 0$, la fonction t_0 est constante, son coefficient dominant est 1.

On déduit de la question précédente que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x).$$

Si $\mathcal{P}(n)$ alors t_n et t_{n-1} sont éléments de $\mathcal{R}$ donc t_{n+1} est élément de $\mathcal{R}$.

Comme :

$$t_n(x) = 2^{n-1}x^n + \sum_{p=0}^{n-1} a_{p,n}x^p, \quad t_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-2} a_{p,n-1}x^p,$$

alors :

$$t_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \sum_{p=0}^n a_{p,n+1}x^p.$$

On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(1)$$

Donc pour tout entier naturel n , la fonction t_n est élément de $\mathcal{R}_n$ de coefficient dominant 1 si $n = 0$ et 2^{n-1} si $n \geq 1$.

7.) Soit n un entier naturel non nul, on a montré à la question 4.1.) que les racines de t_n sont les $x_k = \cos \theta_k$ avec k entier compris entre 0 et $n-1$.

La fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, les réels θ_k éléments de $[0, \pi]$ sont deux à deux distincts donc les racines x_k sont deux à deux distinctes.

Le polynôme T_n est de degré n donc il a au plus n racines complexes, comme il a n racines réelles distinctes il n'a pas de racines complexe non réelle.

PARTIE 2.

1.) Soit f un élément de $\mathcal{C}$, la fonction f est alors continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc bornée sur $[-1, 1]$, soit :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad |f(x)| \leq M.$$

La fonction $x \in]-1, 1[\mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $] - 1, 1[$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \left| \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On sait qu'une primitive de $x \in [0, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin x$, de plus :

$$\lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \rightarrow 1} \arcsin a = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction $x \in]-1, 1[\mapsto \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}$ est paire, intégrable sur $[0, 1[$ donc intégrable sur $] - 1, 1[$, on en déduit que la fonction $x \in]-1, 1[\mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] - 1, 1[$.

2.) Pour n entier naturel, on pose $I_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

On déduit de la question précédente, en particulierisant $f(x) = x^n$, que cette intégrale est absolument convergente.

2.1.) On a :

$$I_0 = \left[\arcsin x \right]_{-1}^1 = \pi, \quad I_1 = \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_{-1}^1 = 0.$$

2.2.) Soit a et b éléments de $] - 1, 1[$, on intègre par parties $\int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_a^b x^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-x^{n+1} \sqrt{1-x^2} \right]_a^b + (n+1) \int_a^b x^n \sqrt{1-x^2} dx, \\ \int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left[-x^{n+1} \sqrt{1-x^2} \right]_a^b + (n+1) \int_a^b \frac{x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Donc :

$$(n+2) \int_a^b \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-x^{n+1} \sqrt{1-x^2} \right]_a^b + (n+1) \int_a^b \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On fait tendre a vers -1 et b vers 1, les intégrales étant convergentes alors :

$$(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n.$$

2.3.) On en déduit que :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{8}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{x^{2p+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$ et impaire alors son intégrale est nulle, donc :

$$I_{2p+1} = 0.$$

3.1.) Les applications f et g sont éléments de $\mathcal{C}$ donc fg est élément de $\mathcal{C}$, on peut alors définir l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{cases}$$

l'intégrale étant absolument convergente d'après la question 1.)

Montrons que cette application définit un produit scalaire :

- Symétrie : De la commutativité du produit dans $\mathcal{C}$, on déduit :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^2, \quad \langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle.$$

- Linéarité : De la linéarité des intégrales convergentes, on déduit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (f_1, f_2, g) \in \mathcal{C}^3, \quad \langle \lambda f_1 + f_2|g \rangle = \lambda \langle f_1|g \rangle + \langle f_2|g \rangle.$$

On en déduit que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.

- Forme positive : On sait que l'intégrale entre -1 et 1 d'une fonction intégrable et positive sur $] -1, 1[$ est positive donc :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \langle f|f \rangle \geq 0.$$

- Forme définie : La fonction $x \mapsto \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable et positive sur $] -1, 1[$, alors :

$$\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \iff \forall x \in] -1, 1[, \quad \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff \forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = 0.$$

L'application f est continue sur $] - 1, 1[$, nulle sur $] - 1, 1[$ donc elle est nulle sur $[-1, 1]$, on a montré que :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \langle f | f \rangle = 0 \iff f = 0_{\mathcal{C}}.$$

L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie et positive, elle définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

3.2.) Montrons que la famille $\left(t_p \mid p \in \llbracket 0, n \rrbracket\right)$ est une base orthogonale de $\mathcal{R}_n$.

Calculons $\langle t_p | t_q \rangle$, en effectuant le changement de variable $u = \arccos x$ qui est un C^1 difféomorphisme de $] - 1, 1[$ sur $]0, \pi[$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle t_p | t_q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{t_p(x)t_q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi}^0 \cos(pu) \cos(qu) (-du), \\ \langle t_p | t_q \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((p+q)u) du + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((p-q)u) du. \end{aligned}$$

Les entiers p et q sont compris entre 0 et n , si $p \neq q$ alors :

$$\langle t_p | t_q \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p+q)u)}{p+q} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p-q)u)}{p-q} \right]_0^{\pi} = 0.$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \langle t_0 | t_0 \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = I_0 = \pi, \\ \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle t_p | t_p \rangle &= \int_0^{\pi} \cos^2(pu) du = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(2pu)}{2} du = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La famille $\left(t_p \mid p \in \llbracket 0, n \rrbracket\right)$ est une famille orthogonale de $n+1$ vecteurs non nuls donc c'est une famille libre, de plus la dimension de $\mathcal{R}_n$ est $n+1$, on a donc une famille orthogonale libre maximale c'est donc une base orthogonale de $\mathcal{R}_n$.

De plus on a :

$$\|t_0\| = \sqrt{\pi}, \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \|t_p\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3.3.) Soit n un entier naturel non nul et k un élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Le monôme X^k se décompose dans la base orthogonale $\left(t_p \mid p \in \llbracket 0, k \rrbracket\right)$, soit :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \exists (a_p)_{0 \leq p \leq k} \in \mathbb{R}^{p+1}, \quad X^k = \sum_{p=0}^k a_p t_p.$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^1 \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \langle X^k | t_n \rangle = \sum_{p=0}^k a_p \langle t_p | t_n \rangle .$$

La famille $\left(t_p \mid p \in \llbracket 0, n \rrbracket \right)$ est orthogonale donc :

$$\forall p \in \llbracket 0, k \rrbracket \subset \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \langle t_p | t_n \rangle = 0 \implies \int_{-1}^1 \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

4.) On veut montrer qu'il existe trois réels a_0, a_1, a_2 uniques, tels que pour tout polynôme P élément de $\mathcal{R}_5$, on a :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (1)$$

4.1.) On suppose que l'égalité (1) est satisfaite pour tout P de $\mathcal{R}_5$, on détermine les réels a_0, a_1, a_2 en prenant successivement les polynômes 1, X, X^2 , on obtient :

$$\begin{cases} I_0 = a_0 + a_1 + a_2 \\ I_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 \\ I_2 = -\frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{4} a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = \pi \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 = 0 \\ -\frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{4} a_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{3} \\ a_1 = \frac{\pi}{3} \\ a_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

4.2.) On vérifie que la solution trouvée convient pour X^3, X^4, X^5 .

Pour X^3 et X^5 , le polynôme P est impaire donc :

$$\frac{\pi}{3} P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3} P(0) + \frac{\pi}{3} P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Comme $I_3 = I_5 = 0$ alors l'égalité (1) est vérifiée.

Pour $P = X^4$ alors :

$$\frac{\pi}{3} P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3} P(0) + \frac{\pi}{3} P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{18}{16}\right) = \frac{3\pi}{8} = I_4.$$

Si :

$$a_0 = a_1 = a_2 = \frac{\pi}{3}$$

alors l'égalité (1) est vérifiée pour tous les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{R}_5$.

Soit P un élément de $\mathcal{R}_5$, on a :

$$\exists! (\alpha_p)_{0 \leq p \leq 5} \in \mathbb{R}^6, \quad P = \sum_{p=0}^5 \alpha_p X^p.$$

De plus on a :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{p=0}^5 \alpha_p \int_{-1}^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Si $a_0 = a_1 = a_2 = \frac{\pi}{3}$ alors l'égalité (1) est satisfaite pour tout vecteur de la base canonique de $\mathcal{R}_5$ donc elle est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_5$.

5.1.) Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi : x \in]0, 1[\mapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

La fonction φ est définie et continue sur $]0, 1[$, au voisinage de 0, on a $\varphi(x) \sim x^{\frac{7}{2}}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi = 0$, on prolonge par continuité φ en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, l'application φ est alors continue sur $[0, 1[$ et positive.

Au voisinage de 1 on a :

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

L'application $x \in [0, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable sur $[0, 1[$ donc l'application φ est intégrable sur $[0, 1[$.

5.2.) On effectue le changement de variable $u = 2x - 1$ qui est un C^1 difféomorphisme de $]0, 1[$ sur $] -1, 1[$, on obtient :

$$J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{1}{2^4} \int_{-1}^1 \frac{(1+u)^4}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

On particularise $P = (X + 1)^4$, on obtient :

$$J = \frac{\pi}{3 \cdot 2^4} \left(\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 1 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \right) = \frac{35\pi}{128}.$$

PARTIE 3.

Soit n un entier naturel non nul.

Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, n réels et f un élément $\mathcal{C}$, on note :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f(x_k) \quad \text{avec} \quad x_k = \frac{2k+1}{2n} \pi.$$

On se propose de montrer qu'il existe un unique n -uplet de réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, tel que, pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_{n-1}$, on ait :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = S_n(P). \quad (2)$$

1.) On suppose que l'égalité (2) est satisfaite pour tout P de $\mathcal{R}_{n-1}$.

On particularise P en prenant successivement $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}$, on obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_{n-1} & = & I_0 \\ a_0 x_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_2 & + & \dots & + & a_{n-1} x_{n-1} & = & I_1 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ a_0 x_0^{n-1} & + & a_1 x_1^{n-1} & + & a_2 x_2^{n-1} & + & \dots & + & a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} & = & I_{n-1} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est :

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

On reconnait un déterminant de Vandermonde, égal à :

$$\det V = \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j).$$

On a montré que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2, \quad i \neq j, \quad x_i \neq x_j.$$

Donc le déterminant est non nul, le système admet une unique solution.

2.) On suppose qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que, pour tout p entier compris entre 0 et $n-1$, la relation (2) soit vérifiée par les fonctions t_p .

2.1.) La relation (2) est supposée vérifiée pour tout vecteur t_p de la base orthogonale $\left\{t_p \mid p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\right\}$ de $\mathcal{R}_{n-1}$, par linéarité elle est vérifiée pour tout polynôme P de $\mathcal{R}_{n-1}$.

2.2.) Si les a_k sont égaux à c , on a :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \int_{-1}^1 \frac{t_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} c t_p(x_k).$$

On particularise $p = 0$, on obtient alors :

$$I_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = cn \iff c = \frac{\pi}{n}.$$

De plus, on a :

$$\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \int_{-1}^1 \frac{t_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \langle t_0 \mid t_p \rangle.$$

La famille $\left\{t_p \mid p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\right\}$ est orthogonale donc :

$$\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \langle t_0 \mid t_p \rangle = 0.$$

On a montré à la question 1.4.2.) que :

$$\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0.$$

Donc :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \int_{-1}^1 \frac{t_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_p t_p(x_k) \quad \text{avec} \quad a_p = \frac{\pi}{n}.$$

Le système proposé admet une unique solution, la solution :

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{\pi}{n}\right),$$

convient donc c'est la solution.

2.3.) Soit P un élément de $\mathcal{R}_{2n-1}$, on effectue la division euclidienne de P par t_n , on obtien alors ::

$$\exists(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad P = Q t_n + R \quad \text{avec} \quad d^\circ R < d^\circ t_n.$$

Comme le degré de R est au plus $n - 1$ et le degré de t_n est égal à n , on en déduit que :

$$d^\circ P = d^\circ(Qt_n) \iff d^\circ Q = d^\circ P - d^\circ t_n \implies d^\circ Q \leq n - 1.$$

On a :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{Q(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On a montré que Q est élément de $\mathcal{R}_{n-1}$ donc :

$$\exists! (\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{R}^n, \quad Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t_k.$$

La famille $\{t_p \mid p \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est orthogonale donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \langle t_k \mid t_n \rangle = 0.$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \int_{-1}^1 \frac{t_k(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle t_k \mid t_n \rangle = 0.$$

Donc :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Comme R est élément de $\mathcal{R}_{n-1}$, on déduit de la question précédente que :

$$\int_{-1}^1 \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R(x_k).$$

D'où :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k).$$

On sait que les racines de t_n sont les réels $(x_k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket)$, donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad P(x_k) = Q(x_k)t_n(x_k) + R(x_k) = R(x_k).$$

On a montré que :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k).$$

Tout polynôme de $\mathcal{R}_{2n-1}$ vérifie la relation (2).

Soit g un élément de $\mathcal{C}$, on note :

$$D_n(g) = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - S_n(g) \quad \text{et} \quad \|g\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |g(x)|.$$

3.) Soit f un élément de $\mathcal{C}$.

3.1.) Soit P un élément de $\mathcal{R}$ de degré d , pour tout entier naturel n tel que $2n-1 \geq d$, on a P élément de $\mathcal{R}_{2n-1}$, de la question précédente, on déduit que $D_n(P) = 0$.

On a :

$$D_n(f) = D_n(f - P) = \int_{-1}^1 \frac{f(x) - P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) - P(x_k)).$$

D'où :

$$|D_n(f)| \leq \|f - P\|_\infty I_0 + \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f - P\|_\infty.$$

On sait que $I_0 = \pi$, donc :

$$|D_n(f)| \leq 2\pi \|f - P\|_\infty.$$

3.2.) Le théorème de Stone-Weierstrass nous assure que toute fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

La fonction f est continue sur $[-1, 1]$ donc il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f , soit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \implies \|f - P_n\|_\infty \leq \varepsilon).$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0, \quad |D_n(f)| \leq 2\pi\varepsilon.$$

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n(f) = 0$.

Or :

$$D_n(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - S_n(f),$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

4.) Pour x élément de $[-1, 1]$, on prend $f(x) = e^x$. Soit m un entier naturel non nul.

4.1.) La fonction exponentielle est développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence infini, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Donc la série numérique de terme général $\frac{1}{n!}$ converge et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \mathbf{e}$.

Soit k un entier supérieur ou égal à $m + 1$, on a $k! = (m + 1 + q)!$ avec q entier naturel, d'où :

$$k! \geq (m + 1)!(m + 1)^q.$$

La somme des termes d'une suite géométrique de raison r élément de $]0, 1[$ converge et :

$$\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Donc :

$$\sum_{k \geq m+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(m + 1)!} \sum_{q \geq 0} \left(\frac{1}{m + 1} \right)^q \quad \text{et} \quad \sum_{q \geq 0} \left(\frac{1}{m + 1} \right)^q = \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{m + 1}{m}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{k \geq m+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m \cdot m!}.$$

4.2.) De la question précédente, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}^x = P_m(x) + \sum_{k \geq m+1} \frac{x^k}{k!} \quad \text{avec} \quad P_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}.$$

Donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \left| \mathbf{e}^x - P_m(x) \right| \leq \sum_{k \geq m+1} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k \geq m+1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{m \cdot m!}.$$

On a montré que :

$$\|f - P_m\|_{\infty} \leq \frac{1}{m \cdot m!}.$$

4.3.) De la question 3.1.) on déduit que, pour n tel que $2n - 1 \geq d^{\circ} P_m$, on a :

$$|D_n(f)| \leq 2\pi \|f - P_m\|_{\infty} \leq \frac{2\pi}{m \cdot m!}.$$

Pour que $|D_n(f)|$ soit inférieur à 10^{-3} , il suffit que $\frac{2\pi}{m \cdot m!} \leq 10^{-3}$, soit $m = 7$.

Pour que $2n - 1 \geq 7$ il suffit de prendre $n = 4$.

On a montré que $S_4(f)$ est une valeur approchée de l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ à 10^{-3} près.

4.4.) On a :

$$S_4(f) = \frac{\pi}{4} \left(e^{\cos \frac{\pi}{8}} + e^{\cos \frac{3\pi}{8}} + e^{\cos \frac{5\pi}{8}} + e^{\cos \frac{7\pi}{8}} \right),$$

$$S_4(f) = \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{ch} \left(\cos \frac{\pi}{8} \right) + \operatorname{ch} \left(\cos \frac{3\pi}{8} \right) \right) \approx 3,977\,462\,26.$$

Une valeur approchée de $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ à 10^{-3} près est 3,977.