

Corrigé

Exercice 1

1. On rappelle que si l'on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à \mathbb{R} , alors l'application $(X, Y) \mapsto {}^tXY$ définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
 - Montrons (1) \Rightarrow (2). Si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$, alors en particulier $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel $AX = \lambda X$, on a ${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 \geq 0$, et donc $\lambda \geq 0$ puisque $\|X\|^2 > 0$.
 - Montrons (2) \Rightarrow (3). Par théorème spectral, soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tP \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A . Si ces valeurs propres sont positives, alors on peut poser $B = {}^tP \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P$, de sorte que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $B^2 = A$.
 - Montrons (3) \Rightarrow (1). Si $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est tel que $B^2 = A$, alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^tXB^2X = {}^tX{}^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|^2 \geq 0$.

L'équivalence des trois propositions est ainsi démontrée.

- 2.1. Classiquement (en considérant le rang et la trace de J), on a $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$, avec $\text{Ker}(J)$ l'hyperplan d'équation $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ et $\text{Ker}(J - nI_n)$ la droite dirigée par la colonne $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Or pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a manifestement $JX = \lambda X \iff MX = (\alpha + 1 - \lambda)X$. D'où $\text{Sp}(M) = \{\alpha + 1, \alpha + 1 - n\}$, avec $\text{Ker}(M - (\alpha + 1)I_n) = \text{Ker}(J)$ et $\text{Ker}(M - (\alpha + 1 - n)I_n) = \text{Ker}(J - nI_n)$.

- 2.2. Vu 2.1 et en utilisant la caractérisation (2), on a $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \alpha \geq n - 1$.

De plus toujours par 2.1 :

- si $\alpha > n - 1$, alors 0 n'est pas valeur propre de M , donc $\text{rg}(M) = n$.
- si $\alpha = n - 1$, alors $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(J - nI_n)$ est de dimension 1, donc $\text{rg}(M) = n - 1$.

Dans tous les cas, on a donc bien $\text{rg}(M) \geq n - 1$.

- 3.1. Le théorème spectral assure que a est diagonalisable en base orthonormale, d'où l'existence demandée.
- 3.2. Par définition de b , sa matrice dans la base orthonormale \mathcal{B} est symétrique (et même diagonale), donc b est un endomorphisme symétrique.
- 3.3. Posons $I = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \lambda_i = 0\}$.

En décomposant les éléments de E dans la base \mathcal{B} , on voit que $\text{Ker}(a) = \text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) = \text{Ker}(b)$.

- 4.1. Remarquons que l'on a $a = b^2$, puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base \mathcal{B} de 3.1. Ainsi puisque b est symétrique (3.2), on a $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\langle z_i, z_j \rangle = \langle b(e_i), b(e_j) \rangle = \langle e_i, b^2(e_j) \rangle = \langle e_i, a(e_j) \rangle = a_{i,j}$. En particulier si $i \neq j$, alors $\langle z_i, z_j \rangle < 0$ par hypothèse sur A .

Remarque. Une famille (z_1, \dots, z_n) d'éléments d'un espace préhilbertien telle que $\forall i \neq j$, $\langle z_i, z_j \rangle < 0$ est dite *strictement obtusangle*. Les deux questions ci-dessous montrent qu'une telle famille est de rang $\geq n - 1$.

- 4.1.1. Posons $I_1 = \{i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket \mid \gamma_i \geq 0\}$ et $I_2 = \{i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket \mid \gamma_i < 0\}$, de sorte que I_1 et I_2 forment une partition de $\llbracket 1; n - 1 \rrbracket$ telle que $\forall i \in I_1$, $\gamma_i = |\gamma_i|$, et que $\forall i \in I_2$, $\gamma_i = -|\gamma_i|$.

Alors l'égalité $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E$ se récrit $\sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i - \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = 0_E$, ou encore $\sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i = \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i$.

En notant z ce dernier élément, on a $\langle z, z \rangle = \langle \sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i, \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i \rangle = \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} |\gamma_i| |\gamma_j| \langle z_i, z_j \rangle$.

Or $\langle z, z \rangle \geq 0$ et puisque I_1 et I_2 sont disjoints, on a $\forall (i, j) \in I_1 \times I_2$, $\langle z_i, z_j \rangle < 0$, donc $|\gamma_i| |\gamma_j| \langle z_i, z_j \rangle \leq 0$.

D'où nécessairement $\langle z, z \rangle = 0$, i.e. $z = 0_E$, et ainsi $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = \sum_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i + \sum_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = z + z = 0_E$.

- 4.1.2. On a alors $\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \rangle = \langle 0_E, z_n \rangle = 0$ mais par linéarité, $\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \langle z_i, z_n \rangle$ est une somme de termes négatifs. Donc $\forall i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, $|\gamma_i| \langle z_i, z_n \rangle = 0$, i.e. $\gamma_i = 0$ puisque $\langle z_i, z_n \rangle < 0$.

On a montré que $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, $\gamma_i = 0$, i.e. que la famille (z_1, \dots, z_{n-1}) est libre.

- 4.2. On vient de montrer que la famille $(b(e_1), \dots, b(e_{n-1}))$ est libre, donc que $\text{rg}(b) \geq n - 1$. Or par 3.3 et le théorème du rang, on a $\text{rg}(b) = \text{rg}(a)$. Donc $\text{rg}(a) = \text{rg}(A) \geq n - 1$.

Exercice 2

1. • Puisque $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ est égale au nombre total de parties d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire 2^n .

• Par la formule du binôme, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

2. Les événements $A_{i,j} = [X = i] \cap [Y = j]$, pour $(i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$, forment un système complet d'événements, donc $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2} \mathbb{P}(A_{i,j}) = 1$.

Or par 1, $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2} \mathbb{P}(A_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \alpha 4^n$. Donc $\alpha = \frac{1}{4^n}$.

3. • Par formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([Y = j])_{j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\binom{n}{i-1}}{4^n} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}.$$

• Par symétrie, $\forall j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(Y = j) = \frac{\binom{n}{j-1}}{2^n}$.

• Ainsi $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}}{4^n} = \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j)$.

Les variables X et Y sont donc indépendantes.

4. La variable $Z = X - 1$ est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(Z = k) = P(X = k + 1) = \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$. Donc Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$. En particulier, $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.

On en déduit par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1$, et par la formule donnant la variance d'une transformation affine que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \frac{n}{4}$.

5. • Par définition des coefficients binomiaux, les parties de A de cardinal r sont au nombre de $\binom{p+q}{r}$.

• Partitionnons A en deux parties A_1 et A_2 de cardinal p et q respectivement.

Pour tout $k \in \llbracket 0; r \rrbracket$, le nombre de parties de A de cardinal r et comportant exactement k éléments de A_1 (et donc $r - k$ éléments de A_2) est égal à $\binom{p}{k} \binom{q}{r-k}$, puisqu'il y a autant de telles parties que de couples constitués d'une partie de A_1 de cardinal k et d'une partie de A_2 de cardinal $r - k$.

Ainsi, la somme $\sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k}$ est égale au nombre total de parties de A de cardinal r .

L'égalité demandée résulte de la comparaison des résultats des deux points précédents.

6. Le cas $p = q = r = n$ dans l'égalité de 5 donne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

7.1. Les colonnes de la matrice B sont toutes non nulles et proportionnelles à la colonne des coefficients binomiaux $\binom{n}{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n+1$, donc $\text{rg}(B) = 1$.

7.1. On a $\text{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) = \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ par 6.

Exercice 3

Question de cours : On a $\dim(\mathcal{S}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Partie 1

1. Le sous-espace \mathcal{S}_2 de \mathcal{M}_2 est de dimension 3 (question de cours) et constitué de matrices diagonalisables d'après le théorème spectral.

2. On vient de voir que \mathcal{D}_2 contient un sous-espace de \mathcal{M}_2 de dimension 3, et il n'en contient pas de dimension 4 puisque le seul sous-espace de \mathcal{M}_2 de dimension 4 est \mathcal{M}_2 , et ce dernier n'est pas inclus dans \mathcal{D}_2 (par exemple la matrice élémentaire $E_{1,2}$ de \mathcal{M}_2 n'est pas diagonalisable, puisqu'elle a pour unique valeur propre 0 sans être la matrice nulle). Donc la dimension maximale d'une sous-espace de \mathcal{M}_2 inclus dans \mathcal{D}_2 est 3.

3. *Méthode 1.* En exhibant deux matrices diagonalisables dont la somme ne l'est pas (la question 1 de la partie 2 donne un exemple), on montre que \mathcal{D}_2 n'est pas stable par somme, donc n'est pas un sous-espace de \mathcal{M}_2 .

Méthode 2. Vu 1 et 2, si \mathcal{D}_2 était un sous-espace de \mathcal{M}_2 , ce serait un sous-espace strict de \mathcal{M}_2 contenant \mathcal{S}_2 , donc on aurait $\mathcal{S}_2 = \mathcal{D}_2$ au vu des dimensions. Or il existe des matrices diagonalisables non symétriques (par exemple celles données dans la question 1 de la partie 2), d'où une contradiction.

4. Un sous-espace de \mathcal{M}_2 contenant \mathcal{D}_2 contient strictement \mathcal{S}_2 par **1** et **3**, donc est de dimension p telle que $3 < p \leq 4$, i.e. est de dimension 4. Ainsi le seul sous-espace de \mathcal{M}_2 contenant \mathcal{D}_2 est \mathcal{M}_2 .
- 5.1. L'application $\Delta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-d)^2 + 4bc$ est polynomiale en les coefficients des matrices, donc est continue. Ainsi $\Omega = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue donc Ω est un ouvert, et $F = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc F est un fermé.
- 5.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$.
- Le polynôme caractéristique $\chi_M = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$ de M a pour discriminant $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = \Delta(M)$. D'où la discussion suivante :
- Si $\Delta(M) > 0$, alors χ_M admet deux racines distinctes dans \mathbb{R} , donc M est diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur \mathbb{R}). Donc $\Omega \subset \mathcal{D}_2$.
 - Si M est diagonalisable, alors χ_M est scindé sur \mathbb{R} , donc admet deux racines réelles, ce qui implique $\Delta(M) \geq 0$ (sinon, χ_M aurait deux racines complexes conjuguées non réelles). Donc $\mathcal{D}_2 \subset F$.
- 5.3. *Méthode 1.* On utilise la caractérisation séquentielle des ouverts/fermés :
- Les matrices $\frac{1}{n}E_{1,2}$ ne sont pas diagonalisables (cf. **2**) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice nulle, qui est diagonalisable. Cela montre que \mathcal{D}_2 n'est pas ouvert (la matrice nulle appartient à \mathcal{D}_2 mais pas à l'intérieur de \mathcal{D}_2).
 - Les matrices $\frac{1}{n}E_{1,1} + E_{1,2}$ sont diagonalisables (car elles ont deux valeurs propres distinctes $\frac{1}{n}$ et 0) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice $E_{1,2}$, qui n'est pas diagonalisable (cf. **2**). Cela montre que \mathcal{D}_2 n'est pas fermé (la matrice $E_{1,2}$ est adhérente à \mathcal{D}_2 sans appartenir à \mathcal{D}_2).

Méthode 2. On utilise la question précédente :

- On montre que l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est F et que l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ de F est Ω : les inclusions $\overline{\Omega} \subset F$ et $\Omega \subset \overset{\circ}{F}$ sont évidentes, et les deux autres résultent de la vérification de ce que toute matrice M telle que $\Delta(M) = 0$ appartient à la fois à l'adhérence de Ω et de $\mathcal{M}_2 \setminus F$ (...).
- Si \mathcal{D}_2 est fermé, alors on déduit de **5.2** que $\overline{\Omega} \subset \mathcal{D}_2 \subset F$, donc que $\mathcal{D}_2 = F$ par le point précédent. C'est absurde puisque par exemple, $E_{1,2} \in F \setminus \mathcal{D}_2$.
- Si \mathcal{D}_2 est ouvert, alors on déduit de **5.2** que $\Omega \subset \mathcal{D}_2 \subset \overset{\circ}{F}$, donc que $\mathcal{D}_2 = \Omega$ par le premier point. C'est absurde puisque par exemple, $I_2 \in \mathcal{D}_2 \setminus \Omega$.

Partie 2

- 1.1. Les matrices A et B sont triangulaires, donc leur polynôme caractéristique est scindé et a pour racines leurs coefficients diagonaux, à savoir -1 et 1 de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n-2$.
- La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre de multiplicité 1 est nécessairement égale à cette multiplicité. De plus, les matrices A et B sont de rang 2, donc leur noyau est de dimension $n-2$ par théorème du rang, soit la multiplicité de la valeur propre 0.
- Ainsi A et B ont un polynôme caractéristique scindé et tous leurs sous-espaces propres sont de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée, donc A et B sont diagonalisables.
- 1.2. Les matrices A et B sont dans \mathcal{D}_n mais leur somme $A+B = 2E_{1,2}$ n'y est pas (puisque'elle a pour unique valeur propre 0 sans être la matrice nulle), donc \mathcal{D}_n n'est pas stable par somme, donc \mathcal{D}_n n'est pas un sous-espace de \mathcal{M}_n .
2. Soient $\lambda \in \text{Sp}(N)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel $NX = \lambda X$. On a alors ${}^tXNX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$, et par ailleurs puisque ${}^tN = -N$, on a ${}^tXNX = -{}^tX{}^tNX = -{}^t(NX)X = -\lambda {}^tXX = -\lambda \|X\|^2$. Donc $\lambda \|X\|^2 = -\lambda \|X\|^2$, et comme $\|X\|^2 \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Cela montre que $\text{Sp}(N) \subset \{0\}$.
3. • Par **2**, une matrice à la fois antisymétrique et diagonalisable est nulle : en effet une telle matrice N est semblable à la matrice nulle (matrice diagonale de coefficients diagonaux la seule valeur propre possible de N), donc est égale à la matrice nulle. Ainsi $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{A}_n = \{(0)\}$, et donc a fortiori $S \cap \mathcal{A}_n = \{(0)\}$.
- La formule de Grassmann donne alors $\dim(S) + \dim(\mathcal{A}_n) = \dim(S \oplus \mathcal{A}_n) \leq \dim(\mathcal{M}_n)$, donc nécessairement $\dim(S) \leq \dim(\mathcal{M}_n) - \dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Ainsi, un sous-espace de \mathcal{M}_n contenu dans \mathcal{D}_n est nécessairement de dimension $d \leq \frac{n(n+1)}{2}$, et le sous-espace \mathcal{S}_n est un exemple de tel sous-espace (par théorème spectral) réalisant le cas d'égalité.

- 4.1.** • L'application f_P est clairement linéaire (c'est d'ailleurs affirmé dans l'énoncé) de \mathcal{M}_n dans \mathcal{M}_n , et telle que $f_P \circ f_{P^{-1}} = f_{P^{-1}} \circ f_P = \text{Id}_{\mathcal{M}_n}$. Donc f_P est un automorphisme de \mathcal{M}_n de réciproque $(f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}$.
- Ainsi f_P induit un isomorphisme de \mathcal{S}_n sur $f_P(\mathcal{S}_n) = \mathcal{S}_P$, et donc par le théorème du rang appliqué à cet isomorphisme induit, $\dim(\mathcal{S}_P) = \dim(\mathcal{S}_n)$.
- 4.2.** Toute matrice semblable à une matrice diagonalisable est diagonalisable (par transitivité de la relation de similitude), et on a $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{D}_n$ par théorème spectral, donc $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n$.
- 4.3.** • Vu **4.2**, on a $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n$ pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, autrement dit $\bigcup_{P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})} \mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n$.
- Par définition, pour tout $M \in \mathcal{D}_n$, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n$ diagonale telle que $M = P^{-1}DP$, donc telle que $M \in \mathcal{S}_P$ (puisque une matrice diagonale est symétrique). Ainsi $\mathcal{D}_n \subset \bigcup_{P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})} \mathcal{S}_P$.

Par double inclusion, on a donc bien l'égalité demandée.

- 5.1.** La famille \mathcal{B}_1 constituée des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tels que $i \leq j$, est une base de \mathcal{S}_n .
- 5.2.** • *Méthode 1.* L'interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes des matrices montre que la matrice $P^{-1}T_{i,j}P$ se déduit de $T_{i,j}$ en multipliant sa j -ème colonne par 2 et sa j -ème ligne par $\frac{1}{2}$. Donc $P^{-1}T_{i,j}P = 2(E_{i,j} + E_{j,i})$.
- Méthode 2 (en suivant l'indication).* Si φ est l'endomorphisme de \mathbb{R}^n de matrice $T_{i,j}$ dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n , alors $P^{-1}T_{i,j}P$ est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{j-1}, 2e_j, e_{j+1}, \dots, e_n)$. Or vu $T_{i,j}$, on a $\varphi(e_k) = 0_{\mathbb{R}^n}$ si $k \notin \{i, j\}$, $\varphi(e_i) = 4e_j = 2(2e_j)$, et $\varphi(e_j) = e_i$, donc $\varphi(2e_j) = 2e_i$, d'où $P^{-1}T_{i,j}P = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = 2(E_{i,j} + E_{j,i})$.
- Comme $T_{i,j}$ est semblable à une matrice symétrique (réelle), $T_{i,j}$ est diagonalisable (cf. **4.2**).
- 5.3.** • Soit $M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} T_{i,j} \in \mathcal{T}$.
- Le coefficient d'indices $(i_0, j_0) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ dans M est λ_{i_0, j_0} si $i_0 < j_0$, ou $4\lambda_{j_0, i_0}$ si $i_0 > j_0$. Ainsi si $M = (0)$, ou plus généralement si $M \in \mathcal{S}_n$, on a nécessairement $\lambda_{i,j} = 4\lambda_{i,j}$, i.e. $\lambda_{i,j} = 0$, pour tous $1 \leq i < j \leq n$. On en déduit à la fois que $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}_n = \{(0)\}$, et que la famille $(T_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est libre, donc est une base de \mathcal{T} , de sorte que $\dim(\mathcal{T}) = \frac{n(n-1)}{2}$ (cardinal de cette famille).
- Ainsi les sous-espaces \mathcal{T} et \mathcal{S}_n sont en somme directe, et par la formule de Grassmann, $\dim(\mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_n) = \dim(\mathcal{T}) + \dim(\mathcal{S}_n) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n)$, donc $\mathcal{T} \oplus \mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n$.
- Vu **5.1** et les deux points précédents, la famille constituée des matrices $T_{i,j}$, pour $1 \leq i < j \leq n$, et des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$, pour $1 \leq i \leq j \leq n$, est une base de \mathcal{M}_n . Et vu **5.2** et le théorème spectral, toutes ces matrices sont diagonalisables.
- 5.4.** Si un sous-espace de \mathcal{M}_n contient \mathcal{D}_n , alors il contient une base de \mathcal{M}_n par **5.3**, donc il est égal à \mathcal{M}_n . Ainsi le seul sous-espace de \mathcal{M}_n contenant \mathcal{D}_n est \mathcal{M}_n .

Exercice 4

1. La fonction suivante retourne le résultat demandé pour toute liste d'entiers naturels non vide :

```
def maxi(L):
    res = L[0]
    for k in range(1, len(L)):
        if L[k] > res:
            res = L[k]
    return res
```

2. La fonction suivante retourne le résultat demandé pour toute liste d'entiers naturels :

```
def ind(L):
    res = []
    for k in range(len(L)):
        if L[k] != 0:
            res.append(k)
    return res
```

3. Par exemple (avec la même restriction qu'en 1) :

```

def nb_oc(L):
    M = maxi(L)+1
    res = [0]*M
    for k in range(len(L)):
        res[L[k]] += 1
    return res

```

4.1. Lors de l'appel `nb_oc(L)` avec la fonction `nb_oc` telle que définie en **3**, la liste `L` est parcourue une première fois pour déterminer `M`, puis une seconde fois pour le remplissage de la liste `res`. Donc la liste `L` est parcourue deux fois en tout.

4.2. Le nombre $n = 2$ trouvé en **4.1** est indépendant de `M`.

5.1. On trouve $L_1 = [1, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 0]$, $L_2 = [1, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 0] = L_1$, et donc par récurrence immédiate, $L_k = L_1$ pour tout $k \geq 1$.

5.2. La liste `B` proposée ne peut pas être la liste L_1 d'une suite de Robinson puisque par construction dans une telle liste, les valeurs i_r, \dots, i_2, i_1 présentes dans les cases d'indice impair vont en décroissant.

5.3. Les listes L_0 correspondant à une telle liste L_1 sont toutes les listes constituées de deux « 4 » et d'un « 0 » (et de rien d'autre). Il y a donc trois possibilités : $[0, 4, 4]$, $[4, 0, 4]$ ou $[4, 4, 0]$.

5.4. Par exemple (avec la même restriction qu'en **1**) :

```

def rob(A,n):
    L = A
    for _ in range(n):
        T = nb_oc(L)
        I = ind(T)
        L = []
        for i in I[::-1]: # I[::-1] est la liste I renversée, i.e. [i_r, ..., i_1].
            L.append(T[i])
            L.append(i)
    return L

```