

Écoles Normales Supérieures Ulm, Cachan, Lyon
Mathématiques 2002, PC

Étude qualitative de l'équation de Hill.

Corrigé

L'objet du problème est l'étude qualitative des équations de Hill

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0, \quad u''(t) + (\lambda + q(t))u(t) = 0$$

où q est une fonction continue 2π périodique et λ un scalaire réel.

Propriétés élémentaires

1. La fonction $t \mapsto (u_0 u_1' - u_0' u_1)(t)$ est dérivable et (u_0, u_1) étant des solutions de (H) , sa dérivée est identiquement nulle sur \mathbb{R} . Cette fonction est donc constante sur \mathbb{R} et sa valeur en 0 donne $(u_0 u_1' - u_0' u_1)(t) = 1$, pour tout t réel.

2. Notons \mathcal{S} l'espace vectoriel des solutions de (H) et définissons $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathbb{C}^2)$ par

$$L(u) = \begin{pmatrix} u(2\pi) \\ u'(2\pi) \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$$

Par définition de M , il vient $L(u_0) = L(u_1) = 0$, ce qui entraîne que $L = 0$ (car (u_0, u_1) est une base de \mathcal{S}), donc pour tout $u \in \mathcal{S}$

$$\begin{pmatrix} u(2\pi) \\ u'(2\pi) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$$

Soit $u \in \mathcal{S}$. Définissons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{u}(t) = u(t + 2\pi)$. La fonction q étant 2π périodique, la fonction $t \rightarrow \tilde{u}(t)$ est élément de \mathcal{S} et la relation précédente se traduit par

$$\forall u \in \mathcal{S} \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}(0) \\ \tilde{u}'(0) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$$

De plus $S : u \rightarrow \tilde{u}$ est un automorphisme de \mathcal{S} . On peut appliquer cette dernière relation à S^k , pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Il vient, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} u((2k+2)\pi) \\ u'((2k+2)\pi) \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$$

On remarquera que la matrice $M = \begin{pmatrix} u_0(2\pi) & u_1(2\pi) \\ u_0'(2\pi) & u_1'(2\pi) \end{pmatrix}$ est réelle. En effet, les conditions $u_0(0) = u_1'(0) = 1, u_0'(0) = u_1(0) = 0$ et la fonction q étant réelle entraînent que les fonctions $t \rightarrow u_0(t), t \rightarrow u_1(t)$ sont réelles. Sa trace D est donc réelle et la question 1 donne que $\det(M) = 1$.

3. a) Le polynôme caractéristique de M est $P_M(X) = X^2 - DX + 1$. Lorsque $|D| \neq 2$, il admet deux racines distinctes (réelles ou complexes conjuguées) et la matrice M est diagonalisable.

b) Lorsque $D^2 > 4$, le discriminant de P_M est positif : les deux valeurs propres sont réelles, distinctes, de produit égal à 1. Une des deux est de module supérieur à 1 et l'autre de module inférieur à 1.

Lorsque $D^2 < 4$, le discriminant de P_M est négatif : les deux valeurs propres sont complexes conjuguées de produit égal à 1. Elles sont donc de module égal à 1.

Lorsque $D^2 = 4$, le discriminant de P_M est nul : les deux valeurs propres sont confondues et égales à 1 ou -1 .

4. a) La suite est définie par $X^0 = U$ et par la relation de récurrence $X^{k+1} = MX^k = M^k U$, valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

b) Lorsque $|D| < 2$, la matrice M est diagonalisable dans \mathbb{C} et ses valeurs propres sont de la forme $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$. Soit P la matrice de passage de la base canonique dans une base de vecteurs propres, et Δ la matrice diagonale semblable à M . Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$X^k = P\Delta^k P^{-1}U$$

ce qui entraîne que la suite (X^k) reste bornée.

c) Lorsque $|D| > 2$, la matrice M est diagonalisable dans \mathbb{R} et ses valeurs propres sont de la forme $\{\lambda, 1/\lambda\}$, avec $|\lambda| > 1$. Soit P la matrice de passage de la base canonique dans une base de vecteurs propres, et Δ la matrice diagonale semblable à M . Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$X^k = P\Delta^k(P^{-1}U) = P\Delta^k V$$

avec $V \neq 0$ car $U \neq 0$. Lorsque k tend vers $\pm\infty$, au moins une des deux coordonnées de $\Delta^k V$ n'est pas bornée.

d) Lorsque $|D| = 2$, les valeurs propres sont $\{-1, 1\}$. Sur \mathbb{C} , la matrice M est semblable à l'une des deux matrices suivantes :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas

$$\Delta^k = \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

ce qui entraînera si $V = P^{-1}U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$X^k = (\pm 1)P \begin{pmatrix} \alpha + k\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

Cette suite sera bornée si et seulement si $\beta = 0$.

Enfin, toutes les suites (X^k) resteront bornées si et seulement si M est diagonalisable, donc semblable à $\pm I_2$, donc égale à $\pm I_2$.

Remarque : Si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ est l'application $u \rightarrow \tilde{u}$ définie dans la question 2, alors $\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si et seulement si $\tilde{u} = \lambda u$.

5. a) Lorsque $|D| < 2$, la matrice M admet deux valeurs propres complexes conjuguées, distinctes, de module 1. L'une d'elles s'écrit donc $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$, avec $\alpha \in]0, 1/2[$. Par la remarque précédente, soit $u \in \mathcal{S}$ tel que $\tilde{u} = \lambda u$ (ce qui correspond à $\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$ vecteur propre de M associé à la valeur propre λ). Posons $w(t) = e^{-i\alpha t}u(t)$. Alors

$$w(t + 2\pi) = e^{-i\alpha(t+2\pi)}u(t + 2\pi) = e^{-i\alpha t}u(t) = w(t)$$

Ainsi, il existe un élément non nul de \mathcal{S} de la forme $t \mapsto u(t) = e^{-i\alpha t}w(t)$, avec w 2π périodique et $\alpha \in]0, 1/2[$.

b) La matrice M étant réelle, le vecteur $\begin{pmatrix} \overline{u}(0) \\ \overline{u}'(0) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$, ces deux vecteurs étant indépendants. La famille de fonctions (u, \overline{u}) est ainsi une base de \mathcal{S} . Comme $|u| = |\overline{u}|$ et que w est bornée, tous les éléments de \mathcal{S} sont bornés sur \mathbb{R} .

Remarque : ce résultat est à rapprocher de la situation de l'équation $u'' + \omega^2 u = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$), dont le discriminant de l'équation caractéristique est négatif, et dont toutes les solutions sont bornées.

Nombre de zéros des solutions réelles de (H)

6. a) Supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) = y_0(t_0) + iy_1(t_0) = 0$. Donc $y_0(t_0) = y_1(t_0) = 0$. Ainsi les vecteurs $\begin{pmatrix} y_0(t_0) \\ y_0'(t_0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix}$ sont liés en contradiction avec (y_0, y_1) libre.

b) La fonction y ne s'annulant pas sur \mathbb{R} , $\rho(t) = |y(t)| = \sqrt{y_0^2(t) + y_1^2(t)}$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le théorème du relèvement entraîne que $\frac{y}{\rho} = e^{i\phi(t)}$, avec $\phi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

c) Le calcul de wronskien de (y_0, y_1) donne

$$W_{y_0, y_1} = \begin{vmatrix} \rho \cos \phi & \rho \sin \phi \\ \rho' \cos \phi - \rho \phi' \sin \phi & \rho' \sin \phi + \rho \phi' \cos \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \phi' = C \neq 0$$

d) Comme (y_0, y_1) forme une base de l'espace des solutions réelles de (H), toute solution s'écrit sous la forme $u = ay_0 + by_1$. Donc

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} \rho \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \phi + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \phi \right) = A\rho \cos(\phi - \phi_0)$$

e) Par la question 6.c), la fonction ϕ définit un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R} sur $\phi(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe une solution réelle de (H) s'annulant une infinité de fois. Cela signifie qu'il existe ϕ_0 et une suite (t_k) de réels distincts tels que $\phi(t_k) = \phi_0 + (2n_k + 1)\frac{\pi}{2}$. Les éléments étant distincts, $\phi(\mathbb{R})$ n'est pas borné.

Soit u une autre solution de (H) ; la fonction u s'écrit $u = A\rho(\cos(\phi - \phi_1))$ et

$$u(t) = 0 \iff t \in \phi_1 + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

Cette équation admet une infinité de solutions car ϕ est bijective de \mathbb{R} sur $\phi(\mathbb{R})$ non borné.

7. D'après la question 5, (H) possède une solution de la forme $y : t \mapsto e^{i\alpha t}w(t)$, avec $\alpha \in]0, 1/2[$ et w 2π périodique. Soit y_0 sa partie réelle et y_1 sa partie imaginaire.

- si w s'annule, alors w s'annule une infinité de fois (par périodicité), ainsi que y_0 et y_1 .
- si w ne s'annule pas sur \mathbb{R} , par la question 6, on peut écrire $w = \rho e^{i\psi}$, où ρ et ψ sont des fonctions de classe C^2 .

La fonction w étant 2π périodique, la fonction ρ l'est également et il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout t réel

$$\psi(t + 2\pi) = \psi(t) + 2n\pi$$

Ainsi $y(t) = a^{i\alpha t} \rho(t) e^{i\psi(t)}$ et $y_0(t) = \rho(t) \cos(\alpha t + \psi(t)) = \rho(t) \cos(h(t))$.

On a

$$h(t + 2\pi) - h(t) = 2(\alpha + n)\pi \Rightarrow h(2k\pi) - h(0) = (\alpha + n)2k\pi \neq 0$$

(car $\alpha \in]0, 1/2[$). Ainsi $\lim_{|k| \rightarrow +\infty} |h(2k\pi)| = \infty$, et comme h est continue, il vient $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi $y_0(t) = \rho(t) \cos(h(t))$ s'annule une infinité de fois sur \mathbb{R} tout en n'étant pas identiquement nulle. Par la question 6.e) il en est de même de toute solution réelle de (H).

8. a) Si l'on suppose qu'il existe une solution réelle de (H) n'ayant qu'un nombre fini de zéros (éventuellement nul), par la question précédente $|D| \geq 2$. On sait que M admet au moins une valeur propre réelle β et soit ϕ un vecteur propre réel de S associé à β . Par définition de S , $\phi(t + 2\pi) = \beta\phi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si ϕ possède un zéro, alors elle en possède une infinité par la relation précédente. Ainsi ϕ ne s'annule pas sur \mathbb{R} et quitte à changer ϕ en $-\phi$ on peut supposer $\phi > 0$ sur \mathbb{R} (et donc $\beta > 0$).

b) Le raisonnement précédent montre que toute valeur propre de M est positive, donc que $D \geq 2$.

c) Un calcul immédiat donne $\sigma'' + \sigma'^2 + q = 0$ et comme $\sigma(t + 2\pi) = \ln \beta + \sigma(t)$, il vient que σ' est 2π périodique. Enfin

$$0 = \int_0^{2\pi} (\sigma'' + \sigma'^2 + q) = [\sigma']_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (\sigma'^2 + q)$$

donc

$$\int_0^{2\pi} q = - \int_0^{2\pi} \sigma'^2 \leq 0$$

Si $\int_0^{2\pi} q = 0$, alors, par continuité et positivité, $\sigma' = 0 \Rightarrow \sigma'' = 0 \Rightarrow q = 0$. La réciproque est immédiate.

d) Par la relation $\sigma'' + \sigma'^2 + q = 0$, il vient, pour $w \in C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\int_0^{2\pi} qw^2 = - \int_0^{2\pi} (\sigma'' + \sigma'^2)w^2$$

Par une intégration par parties

$$\int_0^{2\pi} \sigma'' w^2 = [\sigma' w^2]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \sigma' w w' = -2 \int_0^{2\pi} \sigma' w w'$$

Ainsi

$$\int_0^{2\pi} (w'^2 - qw^2) = \int_0^{2\pi} (w'^2 - 2\sigma' w w' + \sigma'^2 w^2) = \int_0^{2\pi} (w' - \sigma' w)^2 \geq 0$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} qw^2 \leq \int_0^{2\pi} w'^2$$

Le cas d'égalité est équivalent à $w' - \sigma' w = 0$ ou $w' - \frac{\phi'}{\phi} w = 0$, soit $\left(\frac{w}{\phi}\right)' = 0$ ou $w = \lambda\phi$.

9. Supposons qu'il existe une solution réelle de (H_λ) qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Par la question 8.d) appliqué à $\lambda + q$, il vient pour la fonction w de l'énoncé

$$\int_0^{2\pi} (q + \lambda)w^2 \leq \int_0^{2\pi} w'^2 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \lambda w^2 \leq \int_0^{2\pi} (w'^2 - qw^2)$$

Or

$$\int_0^{2\pi} w'^2 = [ww']_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} ww'' = - \int_0^{2\pi} ww''$$

et

$$\int_0^{2\pi} (w'^2 - qw^2) = - \int_0^{2\pi} w(w'' + qw) = 0 \Rightarrow \lambda \int_0^{2\pi} w^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 0$$

en contradiction avec l'énoncé.

10. On suppose que l'on continue à travailler sur les solutions réelles de (H) .

Dans l'équivalence demandée, une implication est triviale, l'autre n'est que la contraposée de la question 6. e)

Notation. On notera \mathcal{P}_∞ (resp. $\mathcal{P}_\infty(\lambda)$) la propriété «il existe une solution réelle de (H) (resp. de (H_λ)) non nulle, s'annulant une infinité de fois».

11. a) On pose $h = \phi\psi' - \phi'\psi + \lambda \int_0^t \phi\psi$. En dérivant h (et par les définitions respectives de ϕ et ψ réelles), il vient $h' = 0$, donc pour tout x , $h(x) = h(0) = 0$.

b) Par la question 8.a), on sait que $\psi(0) = \phi(0) > 0$. On suppose que ψ admet un zéro sur \mathbb{R}^{+*} . Soit

$$\{t > 0 \mid \psi(t) = 0\}$$

Par continuité de ψ , il vient $\psi(t_0) = 0$ et pour la même raison (continuité de ψ) $t_0 > 0$, car $\psi(0) > 0$ et donc $\psi(x) > 0$ pour $x \in [0, t_0[$.

De plus

$$\psi'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\psi(t)}{t - t_0} \leq 0$$

Mais, la question précédente

$$\phi(t_0)\psi'(t_0) = -\lambda \int_0^{t_0} \phi\psi$$

avec $\phi(t_0) > 0$, $-\lambda < 0$, et $\int_0^{t_0} \phi\psi > 0$; donc $\psi'(t_0) > 0$. C'est une contradiction.

On fait de même sur \mathbb{R}^{-*} et on conclut que ψ ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

c) Il suffit d'appliquer la question 10 avec (H_λ) pour conclure que les solutions réelles non nulles de (H_λ) , avec $\lambda > 0$, ne s'annulent qu'un nombre fini de fois sur \mathbb{R} .

12. Soit u une solution non nulle de (H_λ) . Supposons que u possède deux zéros $t_0 < t_1$. Comme $u(t_0) = 0$, alors $u'(t_0) \neq 0$. Supposons $u'(t_0) > 0$. La fonction u est strictement croissante au voisinage de t_0 , et donc ne s'y annule pas. En reprenant un raisonnement identique à celui de la question 11. b), il existe $s, t_0 < s \leq t_1$ tel que $u(s) = 0$ et $u(t) > 0$, pour $t \in]t_0, s[$.

Dans ce cas, $u'(s) = \lim_{t \rightarrow s^-} \frac{u(t)}{t-s} < 0$ (car ne peut s'annuler). Mais, comme $u'' = -qu > 0$ sur $[t_0, s]$, la fonction u' y est croissante. Contradiction.

On fait un raisonnement analogue si l'on suppose que $u'(t_0) < 0$. Ainsi les solutions réelles non nulles de (H) s'annulent au plus une seule fois.

13. a) On remarque que par continuité et périodicité de q , $q(\mathbb{R}) = q([0, 2\pi]) = [\alpha, \beta]$. Notons

$$\mathcal{A} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \neg \mathcal{P}_\infty(\lambda)\}$$

- soit $\lambda < -\beta$. Alors $q + \lambda < 0$ et par la question 12, on a $\neg \mathcal{P}_\infty(\lambda)$. Donc

$$]-\infty, -\beta[\subset \mathcal{A}$$

- soit $\lambda > -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q$, ou $\int_0^{2\pi} (\lambda + q) > 0$. Par la contraposée de la question 8. c), on a $\mathcal{P}_\infty(\lambda)$, donc

$$\mathcal{A} \subset]-\infty, -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q]$$

Ainsi \mathcal{A} est une partie non vide majorée de \mathbb{R} ; elle admet une borne supérieure λ_0 et

$$-\max q \leq \lambda_0 \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q$$

Lorsque $\lambda > \lambda_0$, alors $\lambda \notin \mathcal{A}$ et les solutions réelles non nulles de (H_λ) s'annulent une infinité de fois.

Lorsque $\lambda < \lambda_0$, par définition de λ_0 , il existe $\lambda_1 \in \mathcal{A}$ tel que $\lambda_1 > \lambda$. On applique la question 11 en remplaçant q par $q + \lambda_1$ et λ par $\lambda - \lambda_1$; on a alors $\neg \mathcal{P}_\infty(\lambda)$ et les solutions réelles non nulles de (H_λ) ne s'annulent qu'un nombre fini de fois.

Étude de (H_{λ_0})

Notons

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{0\lambda}(2\pi) & u_{1\lambda}(2\pi) \\ u'_{0\lambda}(2\pi) & u'_{1\lambda}(2\pi) \end{pmatrix}$$

On admet que $\lambda \rightarrow M(\lambda)$ et $\lambda \rightarrow D(\lambda)$ sont des fonctions continues.

14. Pour tout $\lambda < \lambda_0$, on a $\neg \mathcal{P}_\infty(\lambda)$. Donc par la question 8. b), on a $D(\lambda) \geq 2$ et par continuité $D(\lambda_0) \geq 2$.

15. a) Par le cours, on peut écrire

$$\phi_\lambda = a(\lambda)u_{0\lambda} + b(\lambda)u_{1\lambda}$$

avec $(a(\lambda), b(\lambda)) = (\phi_\lambda(0), \phi'_\lambda(0))$ qui est non nul. On peut ainsi diviser par $\sqrt{a(\lambda)^2 + b(\lambda)^2}$.

b) Soit (α_n) une suite de réels tendant vers λ_0 par valeurs inférieures. La suite $(a(\alpha_n) + ib(\alpha_n))$ est une suite bornée du cercle unité. Par compacité, on peut en extraire une sous suite convergente vers $a_0 + ib_0$ du cercle unité.

c) Comme $|a_0 + ib_0| = 1$, la fonction ψ n'est pas identiquement nulle. On sait alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \lambda_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{0\mu_n} = u_{0\lambda_0}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{1\mu_n} = u_{1\lambda_0}$$

(cette convergence étant simple) et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{\mu_n} = \psi$.

Comme pour tout t réel, $\phi_{\mu_n}(t) > 0$, on a $\psi(t) \geq 0$. Mais s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(t_0) = 0$, alors on sait que $\psi'(t_0) \neq 0$ et au voisinage de t_0 , $\psi(t)$ change de signe puisqu'équivalent à $(t - t_0)\psi'(t_0)$. Contradiction. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) > 0$.

d) On prend $S(\phi_\lambda) = \beta(\lambda)\phi_\lambda$ ou

$$M(\lambda) \begin{pmatrix} a(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix} = \beta(\lambda) \begin{pmatrix} a(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix}$$

On applique cette relation à $\lambda = \mu_n$ et on fait tendre n vers l'infini. On obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M(\mu_n) = M(\lambda_0), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} a(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Or $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$, par exemple $a_0 \neq 0$. Notons (c_0, d_0) la première ligne de $M(\lambda_0)$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(\mu_n)a(\mu_n) = c_0a_0 + d_0b_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a(\mu_n) = a_0 \neq 0$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta(\mu_n) = \beta_0 = \frac{c_0a_0 + d_0b_0}{a_0}$$

Comme pour tout n , $\beta(\mu_n) > 0$, on a $\beta_0 \geq 0$. Et, de plus,

$$M(\lambda_0) \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \beta_0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne que $\beta_0 \neq 0$, donc $\beta_0 > 0$.

Pour terminer cette relation appliquée à ψ donne $S_{\lambda_0}(\psi) = \beta_0\psi$, c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t + 2\pi) = \beta_0\psi(t)$$

16. a) Si $D(\lambda_0) = 2$, alors $M(\lambda_0)$ admet une valeur propre double $\beta_0 = 1$, en contradiction avec l'hypothèse de la question. Donc $D(\lambda_0) > 2$ et

$$\beta_0 = \frac{D(\lambda_0) + \varepsilon\sqrt{D^2(\lambda_0) - 4}}{2}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

La fonction $\lambda \rightarrow D(\lambda)$ étant continue, il existe un intervalle I contenant λ_0 , tel que pour tout $\lambda \in I$, $D(\lambda) > 2$. On pose alors, pour $\lambda \in I$

$$\beta(\lambda) = \frac{D(\lambda) + \varepsilon\sqrt{D^2(\lambda) - 4}}{2}, \quad \text{avec le même } \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

Ainsi $\lambda \rightarrow \beta(\lambda)$ est continue sur I et vérifie les conditions demandées.

b) Comme $\beta_0 \neq 1$, $M(\lambda_0)$ admet deux valeurs propres distinctes et $M(\lambda_0) \neq \beta_0 I$. L'application $\lambda \rightarrow M(\lambda) = \begin{pmatrix} c(\lambda) & d(\lambda) \\ e(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}$ est continue. L'équation $M(\lambda) \begin{pmatrix} A(\lambda) \\ B(\lambda) \end{pmatrix} = \beta(\lambda) \begin{pmatrix} A(\lambda) \\ B(\lambda) \end{pmatrix}$ est équivalente à un système de deux équations à deux inconnues, système de rang 1, puisque $D(\lambda) > 2$. On sait que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} M(\lambda) = M(\lambda_0) = \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ e_0 & f_0 \end{pmatrix} \neq \beta_0 I$$

donc

$$c_0 \neq \beta_0 \text{ ou } d_0 \neq 0 \text{ ou } e_0 \neq 0 \text{ ou } f_0 \neq \beta_0$$

Supposons que $c_0 \neq \beta_0$. Il existe alors un voisinage ouvert J de λ_0 contenu dans I pour lequel $c(\lambda) \neq \beta(\lambda)$.

On pose alors

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) \\ B(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\lambda) \\ \beta(\lambda) - c(\lambda) \end{pmatrix}$$

Si $d_0 \neq 0$, on prendra le même vecteur. Si $e_0 \neq 0$ ou $f_0 \neq \beta_0$, on prendra

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) \\ B(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(\lambda) - f(\lambda) \\ e(\lambda) \end{pmatrix}$$

c) Si $\lambda \in J, \lambda > \lambda_0$, ϕ^λ est solution de (H_λ) et vecteur propre de S_λ , donc $\phi^\lambda = \beta(\lambda)\phi^\lambda$. Si ϕ^λ ne s'annulait pas une fois sur $[0, 2\pi]$, elle ne s'annulerait pas sur \mathbb{R} , en contradiction avec $\lambda > \lambda_0$.

17. Soit (λ_n) une suite de J qui converge vers λ_0 par valeurs supérieures. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $t_n \in [0, 2\pi]$ tel que $\phi^{\lambda_n}(t_n) = 0$.

On extrait une sous suite (t_{k_n}) qui converge vers $t_0 \in [0, 2\pi]$. On a alors

$$\phi^{\lambda_{k_n}}(t_{k_n}) = A(\lambda_{k_n})u_{0\lambda_{k_n}}(t_{k_n}) + B(\lambda_{k_n})u_{1\lambda_{k_n}}(t_{k_n})$$

Par continuité des fonction A et B ainsi que des applications $(\lambda, t) \rightarrow u_{0\lambda}(t)$ et $(\lambda, t) \rightarrow u_{1\lambda}(t)$, il vient

$$\lim_{k_n \rightarrow +\infty} \phi^{\lambda_{k_n}}(t_{k_n}) = A(\lambda_0)u_{0\lambda_0}(t_0) + B(\lambda_0)u_{1\lambda_0}(t_0) = \gamma\psi(t_0)$$

Donc $\psi(t_0) = 0$ en contradiction avec la question 15. c).

Ainsi $\beta_0 = 1$ et $D(\lambda_0) = 2$.

18. Si $\lambda_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q$, alors $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (q + \lambda_0) = 0$ et $\lambda_0 \in \mathcal{A}$ et par la question 8. c) $q + \lambda_0 = 0$.