

Questions de cours

1. On a d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathcal{B}_{k,n}(X) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= (X + (1-X))^n \\ &= \boxed{1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^n \mathcal{B}_{k,n}(X) = 1$$

2. (a) D'après le cours cette loi s'appelle

loi binomiale et ses paramètres sont n et t .

(b) Toujours d'après le cours, on a

$$\begin{aligned} E(X_n) &= nt \\ V(X_n) &= nt(1-t) \end{aligned}$$

(c) On peut prendre par exemple la variable aléatoire comptant le nombre de pile d'une suite de n lancers d'une pièce éventuellement truquée dont la probabilité de tomber sur pile serait t .

3. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, sa dimension est bien $n + 1$.

4. On dit que deux sous- \mathbb{R} -espaces vectoriels E et F d'un espace préhilbertien sont orthogonaux pour le produit scalaire φ si

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

5. Par définition il s'agit d'un ensemble de points de l'espace qui sont invariants par toutes les rotations de \mathbb{R}^3 d'axe Δ .

Préliminaires

1. On a par un calcul immédiat

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{0,2}(X) &= (1-X)^2 = X^2 - 2X + 1 \\ \mathcal{B}_{1,2}(X) &= 2X(1-X) = -2X^2 + 2X \\ \mathcal{B}_{2,2}(X) &= X^2 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}_{0,3}(X) = (1 - X)^3 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1$$

$$\mathcal{B}_{1,3}(X) = 3X(1 - X)^2 = 3X^3 - 6X^2 + 3X$$

$$\mathcal{B}_{2,3}(X) = 3X^2(1 - X) = -3X^3 + 3X^2$$

$$\mathcal{B}_{3,3}(X) = X^3$$

2. Les calculs précédents montrent que la matrice de la famille $\{\mathcal{B}_{0,2}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,2}\}$ dans la base $\{1, X, X^2\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut donc 2 car elle est triangulaire inférieure et ce déterminant est donc non nul. Donc cette matrice est une matrice de passage et on obtient bien :

la famille $\{\mathcal{B}_{0,2}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,2}\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. La question précédente invite à employer le même raisonnement. En effet pour $0 \leq k \leq n$ le degré du plus petit monome non nul de $\mathcal{B}_{k,n}(X)$ est k et son coefficient est $\binom{n}{k}$. Ainsi si l'on considère la matrice de la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}\}_{0 \leq k \leq n}$ dans la base $\{1, \dots, X^n\}$, elle sera toujours triangulaire inférieure avec tout ses coefficients non nuls sur la diagonale et donc de déterminant non nul (ce déterminant vaut en fait $\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$). Donc le même raisonnement que dans la question précédente montre que

la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I : Produit scalaire

1. (a) La fonction φ est évidemment symétrique. Elle est de plus linéaire en sa première variable car l'évaluation en un point est linéaire et donc l'application $\varphi(-, Q)$ (où Q est fixé) est une combinaison linéaire d'applications linéaires. Ainsi par symétrie l'application φ est bilinéaire. De plus si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\varphi(P, P)$ est une somme de carré donc est positif. Ainsi φ est positive. Enfin supposons que $\varphi(P, P) = 0$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors, une somme de terme positifs étant nulle si et seulement si chacun des termes est nul, il vient

$$\begin{cases} P(0)^2 = 0 \\ P(1)^2 = 0 \\ \frac{1}{4} (P(\frac{1}{2}) - P(1) - P(0))^2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $P(0) = P(1) = P(\frac{1}{2}) = 0$. Or P est un polynôme de degré 2, et ayant 3 racines c'est donc nécessairement le polynôme nul.

Ainsi φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) On utilise le procédé de Gram-Schmidt. On remarque que

$$\varphi(X^2, X^2) = 0 + 1 + \frac{1}{4} \left(4 \frac{1}{4} - 1 - 0 \right)^2 = 1$$

et donc $\mathcal{B}_{2,2}(X) = X^2$ est de norme 1. On calcule ensuite

$$X - \varphi(X, X^2)X^2$$

Or $\varphi(X, X^2) = 1$, et finalement

$$X - \varphi(X, X^2)X^2 = X - X^2$$

De plus

$$\varphi(X - X^2, X - X^2) = 0 + 0 + \frac{1}{4} \left(4 \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

donc le vecteur $X - X^2$ est de norme $\frac{1}{2}$ et le deuxième vecteur de la base orthonormale obtenue est donc $2(X - X^2) = \mathcal{B}_{1,2}(X)$. Enfin pour obtenir le dernier vecteur on calcule

$$1 - \varphi(1, \mathcal{B}_{1,2}(X))\mathcal{B}_{1,2}(X) - \varphi(1, X^2)X^2 = 1 - 4\varphi(1, X - X^2)(X - X^2) - \varphi(1, X^2)X^2$$

or

$$\begin{aligned} \varphi(1, X^2) &= 1 \\ \varphi(1, X - X^2) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur $1 - 4\frac{1}{2}(X - X^2) - X^2 = 1 - 2X + X^2 = \mathcal{B}_{0,2}(X)$ est orthogonal à $\mathcal{B}_{1,2}(X)$ et $\mathcal{B}_{2,2}(X)$. De plus

$$\varphi(\mathcal{B}_{0,2}(X), \mathcal{B}_{0,2}(X)) = 1$$

Ainsi le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt partant de la famille $\{X^2, X, 1\}$ donne la famille orthonormale $\{\mathcal{B}_{2,2}(X), \mathcal{B}_{1,2}(X), \mathcal{B}_{0,2}(X)\}$.

2. (a) La matrice M est à coefficients réels et symétrique, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable et ceci dans une base orthonormale.
- (b) On trouve le polynôme caractéristique de M en utilisant les règles de calcul du déterminant, on obtient $\chi_M(X) = (X - 4)(X + 2)^2$. De plus la méthode du pivot de Gauss nous permet de trouver

$$\begin{aligned} \ker(M + 2 \text{id}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \ker(M - 4 \text{id}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormale de vecteurs propres de M . On a donc en posant

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

que Q est une matrice de passage d'une base orthonormée (la base canonique de \mathbb{R}^3) à une autre. C'est donc une matrice orthogonale et son inverse est sa transposée. On a donc

$$Q^{-1} = {}^t Q$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

et

$$D = Q^{-1} M Q$$

- (c) Les valeurs propres ainsi que les espaces propres de f sont ceux que l'on a trouvé pour la matrice M , on en déduit que f admet les valeurs propres -2 de multiplicité deux et 4 de multiplicité un, et que en posant

$$e_1(X) = -\mathcal{B}_{2,2}(X) + \mathcal{B}_{1,2}(X) - \mathcal{B}_{2,2}(X)$$

$$e_2(X) = -\mathcal{B}_{2,2}(X) + \mathcal{B}_{0,2}(X)$$

$$e_3(X) = \mathcal{B}_{2,2}(X) + 2\mathcal{B}_{1,2}(X) + \mathcal{B}_{0,2}(X)$$

alors on a

$$\ker(f + 2 \text{id}) = \text{Vect}(e_1(X), e_2(X))$$

$$\ker(f - 4 \text{id}) = \text{Vect}(e_3(X))$$

(d) Les coordonnées des vecteurs $e_1(X), e_2(X), e_3(X)$ dans la base orthonormale

$$\{\mathcal{B}_{2,0}(X), \mathcal{B}_{1,2}(X), \mathcal{B}_{2,2}(X)\}$$

sont données respectivement par les vecteurs

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or un produit scalaire se calcule comme s'il s'agissait du produit scalaire canonique dès lors que l'on dispose des coordonnées dans une base orthonormale. Ainsi les vecteurs g_1, g_2, g_3 étant orthogonaux dans \mathbb{R}^3 euclidien canonique, les vecteurs $e_1(X), e_2(X), e_3(X)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire φ , on en déduit que

les espaces propres de f sont orthogonaux pour φ .

(e) On considère l'application suivante

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k \end{aligned}$$

où $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mathcal{B}_{k,n}(X)$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^n \beta_k \mathcal{B}_{k,n}(X)$ (ces coefficients existent et sont uniques puisque la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}(X)\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question Préliminaire 3). Alors cette application est évidemment symétrique, bilinéaire et positive. Si $\varphi_n(P, P) = 0$ pour un polynôme P , alors ceci nous donne que tous les coefficients α_k sont nuls puisque la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}(X)\}_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question Préliminaire 3, et donc P est nécessairement le polynôme nul. Ainsi φ_n est un produit scalaire. De plus il est construit de telle façon que pour tout $i, k \in \{0, \dots, n\}$ on ait $\varphi_n(\mathcal{B}_{i,n}(X), \mathcal{B}_{k,n}(X)) = \delta_{i,n}$.

Il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel la famille $\{\mathcal{B}_{k,n}\}_{0 \leq k \leq n}$ est orthonormale.

Partie II : Une première courbe de Bézier dans le plan.

1. (a) On utilise la définition d'une courbe de Bézier et le résultat de la question 1 des préliminaires. On a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= \mathcal{B}_{0,3}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{1,3}(t) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{2,3}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{3,3}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t^3 - 12t^2 + 6t \\ 6t^3 - 12t^2 + 6t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^3 + 3t^2 \\ -9t^3 + 9t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad \Gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{pmatrix}$$

- (b) On peut donc faire la remarque que la courbe Γ_1 n'est autre que la portion de la courbe Γ_2 lorsque le paramètre parcourt uniquement l'intervalle $[0, 1]$.
2. (a) Les fonctions x_2 et y_2 étant des polynômes, elles sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et pourront au cours de l'étude être dérivées autant de fois que nécessaire. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_2'(t) = 6 - 18t + 12t^2$$

$$y_2'(t) = 6 - 6t - 12t^2$$

L'étude des deux trinômes du second degré montre que

$$x_2'(t) = 12 \left(t - \frac{1}{2} \right) (t - 1)$$

$$y_2'(t) = -12 \left(t - \frac{1}{2} \right) (t + 1)$$

Donc leur signe est connu et on obtient les tableaux de variations suivants

t	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x_2'(t)$	+	+	+	+	0	-	0	+	
x_2	$-\infty$	\longrightarrow	-19	\longrightarrow	$\frac{5}{4} \approx 1.25$	\longrightarrow	1	\longrightarrow	$+\infty$
$y_2'(t)$	-	-	0	+	0	-	-	-	
y_2	$+\infty$	\longrightarrow	-5	\longrightarrow	$\frac{7}{4} \approx 1.75$	\longrightarrow	-1	\longrightarrow	$-\infty$

- (b) D'après les tableaux de variations obtenus à la question précédente,

la courbe Γ_2 admet en le point de paramètre $t = 1$ une tangente verticale et admet en le point de paramètre $t = -1$ une tangente horizontale. Il n'y a pas d'autre point de ce type.

- (c) La tangente à Γ_2 en $t = 0$ est la droite dirigée par $\Gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et passant par $\Gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: il s'agit donc de la première bissectrice.

Une équation cartésienne de la tangente à Γ_2 en $t = 0$ est $y = x$.

- (d) D'après les tableaux de variation obtenus à la question 2.a, le point singulier est le point de paramètre $t = \frac{1}{2}$. On a

$$x_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -6, \quad y_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -18, \quad x_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = 24, \quad y_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = -24$$

Les vecteurs $\Gamma_2''\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma_2'''\left(\frac{1}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires, ainsi d'après le cours

il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

De plus toujours d'après le cours la tangente est la droite passant par $\Gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et dirigée par $\Gamma_2''\left(\frac{1}{2}\right)$. Son équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} -6 & \frac{5}{4} - x \\ -18 & \frac{7}{4} - y \end{vmatrix} = 0$$

soit :

$$y - 3x = -2$$

(e) La courbe admet des branches infinies lorsque le paramètre tend vers $\pm\infty$ d'après le tableau de variation obtenu en 2.b. Or

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x_2(t)}{y_2(t)} = -1$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_2(t) + y_2(t) = -\infty$$

La courbe admet des branches paraboliques de direction asymptotique $y = -x$.

3. La courbe a été représentée sur la figure 1.

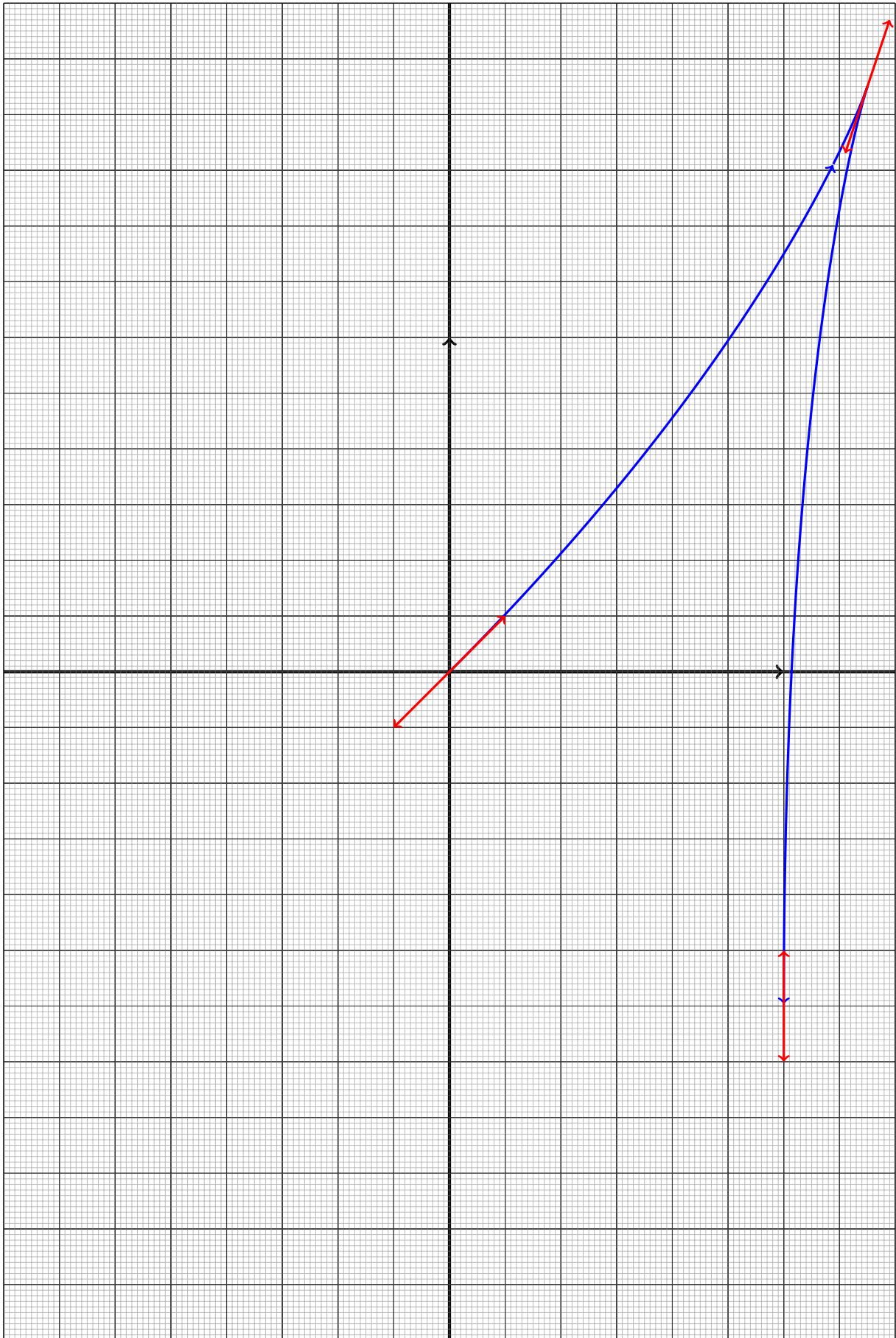


Figure 1: Courbe Γ_2

Partie III : Un détour par le cas général

1. On a d'après la définition de la courbe de Bézier que

$$\Gamma(0) = A_0, \quad \Gamma(1) = A_n.$$

2. La fonction Γ étant polynomiale elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle de définition. Or

$$\begin{aligned} \Gamma'(0) &= \sum_{k=0}^n \mathcal{B}'_{k,n}(0) \overrightarrow{OA_k} \\ &= -n \overrightarrow{OA_0} + n \overrightarrow{OA_1} \\ &= n \overrightarrow{A_0A_1}. \end{aligned}$$

Ce vecteur étant non nul, c'est le vecteur directeur de la tangente en A_0 et la tangente à Γ en A_0 étant la droite passant par A_0 et dirigée par $n \overrightarrow{A_0A_1}$, on a bien

la tangente à Γ en A_0 est la droite (A_0A_1) .

3. D'après la question Préliminaire 3, il existe $(p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k \mathcal{B}_{k,n}(X)$ et de même il existe $(q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q(X) = \sum_{k=0}^n q_k \mathcal{B}_{k,n}(X)$. En posant $A_i = \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}$, on a bien que la courbe Λ est la courbe de Bézier associée aux points de contrôle A_0, \dots, A_n .

Il est donc possible de trouver A_0, \dots, A_n tel que la courbe Λ soit la courbe de Bézier associée à ces points.

Partie IV : Une deuxième courbe de Bézier

1. (a) On sait d'après la partie III que le point C_1 est à l'intersection des tangentes à Γ_1 en A_0 et en A_3 . Or ces droites ont pour équation $x = y$ et $x = 1$ (d'après les questions II.2.b et II.2.c).

Ainsi le point C_1 a pour coordonnées $(1, 1)$.

(b) Par définition d'une courbe de Bézier on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \Gamma_3(t) &= \mathcal{B}_{0,2}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{1,2}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{2,2}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t(1-t) \\ 2t(1-t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t - 3t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad \Gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t - 3t^2 \end{pmatrix}$$

2. Nous étudions la courbe donnée par

$$\begin{cases} x_3(t) = -t^2 + 2t \\ y_3(t) = -3t^2 + 2t \end{cases}$$

Les fonctions de coordonnées sont dérivables et données par

$$\begin{cases} x'_3(t) = 2 - 2t \\ y'_3(t) = 2 - 6t \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variation suivant

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$x'(t)$	+	+	+	+	0
x	0	→	$\frac{5}{9} \approx 0.56$	→	1
$y'(t)$	+	+	0	-	
y	0	→	$\frac{1}{3} \approx 0.33$	→	-1

De ce tableau de variations on déduit les informations suivantes

- il y a une tangente horizontale au point de paramètre $\frac{1}{3}$
- il y a une tangente verticale au point de paramètre 1

3. Le graphique complété est présentée en figure 2.

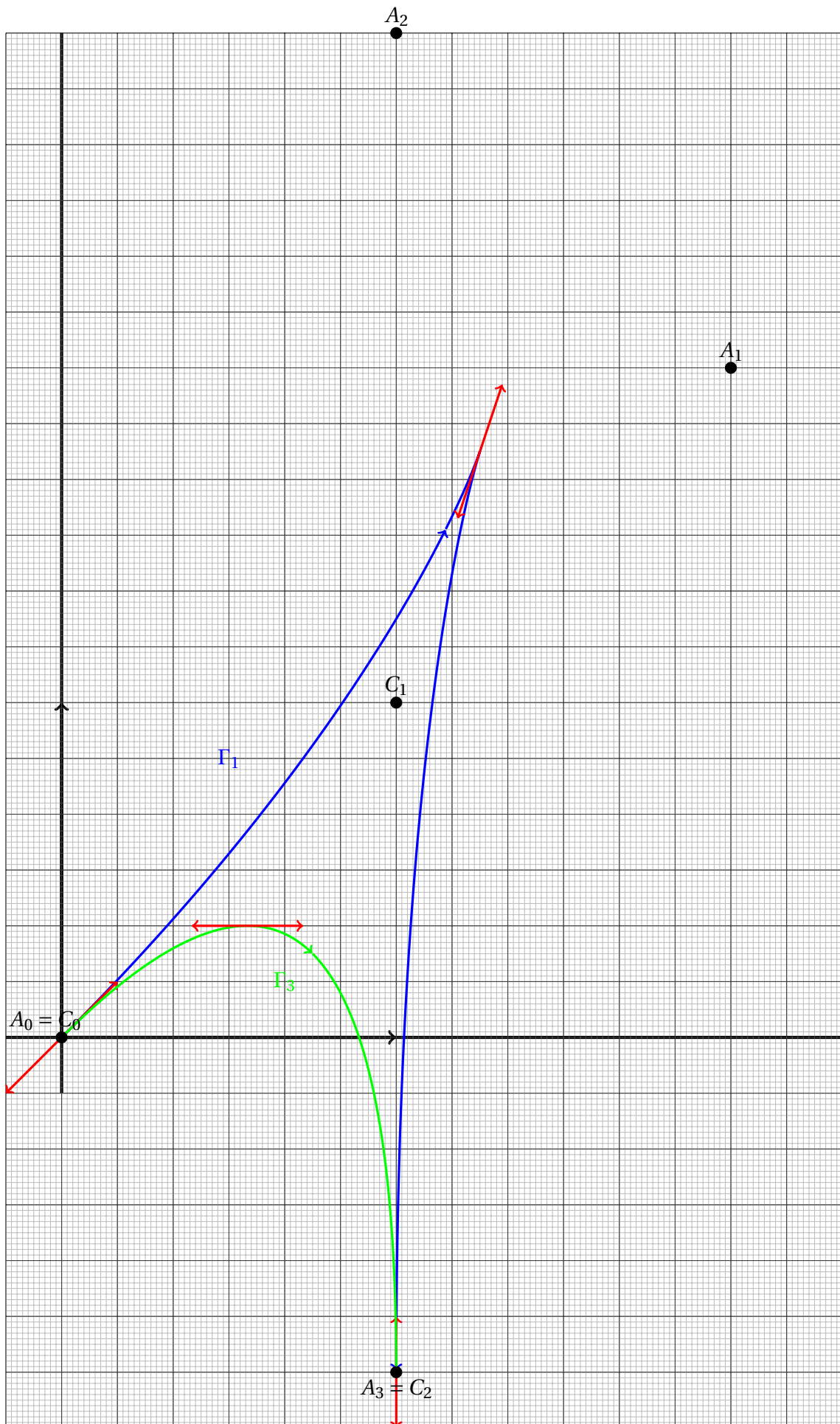


Figure 2: Les courbes Γ_1 et Γ_3

Partie IV : Une surface de révolution

1. Encore une fois, il s'agit d'appliquer la définition. On a pour $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(t) &= \mathcal{B}_{0,3}(t) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{1,3}(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{2,3}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{3,3}(t) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3t^3 - 9t^2 + 9t - 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^3 + 6t^2 - 3t \\ 3t^3 - 6t^2 + 3t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^3 + 3t^2 \\ -3t^3 + 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t - 3 \\ 3(t - t^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\forall t \in [0, 1], \quad \Gamma_4(t) = \begin{pmatrix} 6t - 3 \\ 3(t - t^2) \end{pmatrix}$$

2. La fonction Γ_4 est de classe \mathcal{C}^∞ sur son intervalle de définition et on a $\Gamma'_4\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce vecteur

étant non nul c'est lui qui dirige la tangente au point $t = \frac{1}{3}$. De plus la courbe est située dans le plan $z = 0$ donc la tangente à Γ_4 en $t = \frac{1}{3}$ sera contenue dans ce plan, passera par le point $\Gamma_4\left(\frac{1}{3}\right) =$

$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et sera aussi contenue dans un plan orthogonal à $\Gamma'_4\left(\frac{1}{3}\right)$, par exemple le plan contenant

$\Gamma_4\left(\frac{1}{3}\right)$ et orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi un système d'équation de cette tangente est donné par

$$\begin{cases} z &= 0 \\ (x - (-1)) - 6(y - \frac{2}{3}) &= 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z &= 0 \\ x - 6y &= -5 \end{cases}$$

3. Soit $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et notons S la surface en question. Alors, en traduisant le fait que ce point est sur la surface si et seulement si il existe un point sur A l'axe des abscisses et un point B sur la méridienne Γ_4 tels que \overrightarrow{MA} soit orthogonal à \vec{i} , \overrightarrow{BA} soit orthogonal à \vec{i} et que $\|MA\|^2 = \|BA\|^2$

on a :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in S &\Leftrightarrow \exists t, \lambda \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} x - \lambda \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 6t - 3 - \lambda \\ 3(t - t^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ (x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 = (6t - 3 - \lambda)^2 + (3(t - t^2))^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t, \lambda \begin{cases} x = \lambda \\ t = \frac{3 + \lambda}{6} \\ y^2 + z^2 = 9(t - t^2)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t, \begin{cases} t = \frac{3 + x}{6} \\ y^2 + z^2 = 9(t - t^2)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow y^2 + z^2 = 9 \left(\frac{3 + x}{6} - \left(\frac{3 + x}{6} \right)^2 \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow y^2 + z^2 = \frac{1}{4} (x^2 - 9)^2
 \end{aligned}$$

Ainsi une équation cartésienne de cette surface de révolution est $y^2 + z^2 = \frac{1}{4} (x^2 - 9)^2$