

**Corrigé de l'épreuve Mathématiques, X/ENS 2025, filière PC.
Version provisoire du 16/04/2025**

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

PREMIÈRE PARTIE

- (1) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $M\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{x} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} \in \text{Vect}(\mathbf{u})$. On en déduit que $\text{Im}(M) \subset \text{Vect}(\mathbf{u})$ et comme $M \neq 0$, que $\boxed{\text{Im}(M) = \text{Vect}(\mathbf{u})}$ et que $\boxed{\text{rg}(M) = 1}$.
- (2) L'image d'une matrice étant engendrée par ses colonnes, on en déduit de suite que $\boxed{\text{rg}(J) = 1}$.
- (3) Soit $\mathbf{u} \neq 0$ tel que $\text{Im}(K) = \text{Vect}(\mathbf{u})$. Chaque colonne K_j de K est un multiple de \mathbf{u} . Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $v_j \in \mathbb{R}$ tel que $K_j = v_j \mathbf{u}$. En notant $\mathbf{v} = (v_1 \ \cdots \ v_n)^T$, on a $\mathbf{v} \neq 0$ et on observe de suite que $\boxed{K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T}$.
- (4) Supposons $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$. Comme $\text{Im}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \text{Vect}(\mathbf{u})$ et $\text{Im}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) = \text{Vect}(\mathbf{x})$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$.
En raisonnant de même avec les matrices transposées, il existe $\mu \neq 0$ tel que $\mathbf{y} = \mu \mathbf{v}$.
On a alors $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \lambda\mu\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ donc $\mu = 1/\lambda$ et finalement $\boxed{\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x} \text{ et } \mathbf{y} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{v}}$.
- La réciproque est évidente.
- (5) (a) On a $K = (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ donc

$$\boxed{\text{Tr}(K) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}.$$

(b) On a

$$\boxed{K^2 = \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{u}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}^T = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \text{Tr}(K)K}.$$

(c) $\boxed{\text{Si } \text{Tr}(K) \neq 0}$, le polynôme scindé à racines simples $X(X - \text{Tr}(K))$ annule K donc la matrice $\boxed{K \text{ est diagonalisable}}$.

$\boxed{\text{Si } \text{Tr}(K) = 0}$, alors $K^2 = 0$ donc K est nilpotente. Elle possède donc 0 comme unique valeur propre. Si l'on suppose par l'absurde que K est diagonalisable, alors K est semblable à la matrice nulle donc $K = 0$, ce qui fournit la contradiction. Ainsi, $\boxed{K \text{ n'est pas diagonalisable}}$.
L'équivalence est prouvée.

- (6) $\boxed{\text{Supposons que } P = \mathbf{y}\mathbf{y}^T \text{ avec } \|\mathbf{y}\| = 1}$, alors P est de rang 1. De plus, $P^2 = \|\mathbf{y}\|^2 P = P$ donc P est projecteur. Enfin, $P^T = P$ donc P est symétrique, ce qui assure le fait que P est un projecteur orthogonal.
 $\boxed{\text{Supposons que } P \text{ est un projecteur orthogonal de rang 1}}$. On peut donc écrire $P = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Comme P est orthogonal, $P^T = P$ donc $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T$. D'après (4), il existe $\lambda > 0$ tel que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. On a donc $P = \lambda \mathbf{v}\mathbf{v}^T$. Mais comme P est un projecteur de rang 1, on a $\text{Tr}(P) = 1 = \lambda \|\mathbf{v}\|^2$. On en déduit que $\lambda = 1/\|\mathbf{v}\|^2$ et on peut donc écrire $\boxed{P = \mathbf{w}\mathbf{w}^T \text{ avec } w = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \text{ de norme } 1}$.

DEUXIÈME PARTIE

(7) On a

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbb{I}_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \mathbb{I}_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ (1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)\mathbf{v}^T & 1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \mathbb{I}_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbb{I}_n & \mathbf{u} \\ 0 & 1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{array} \right).$$

(8) En prenant le déterminant dans la relation précédente, il vient

$$1 \times \det(\mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) \times 1 = 1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

et donc $\det(\mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

(9) On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) &= \det(A(\mathbb{I}_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T)) \\ &= \det(A) \det(\mathbb{I}_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T) \\ &= \det(A) \times (1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle). \end{aligned}$$

(10) Comme $\det(A) \neq 0$, on en déduit que

$$A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq -1.$$

(11) Calculons

$$\begin{aligned} \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle} \right) \times (A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) &= \mathbb{I}_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle} \\ &= \mathbb{I}_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T + A^{-1}\mathbf{u}\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \mathbf{v}^T}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle} \\ &= \mathbb{I}_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{(1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle)A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle} \\ &= \mathbb{I}_n + A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T - A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T \\ &= \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

On en déduit bien que

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}.$$

(12) Soient \mathbf{u} un vecteur de norme 1 et $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Soit $Q = \mathbb{I}_n - P$. La matrice Q est le projecteur associé au projecteur P . On a alors

$$\det(Q) = 0 \text{ et } \det(Q + \mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \det(Q + P) = 1 \neq 0.$$

TROISIÈME PARTIE

(13) La matrice B est symétrique réelle comme somme de deux matrices symétriques réelles.

(14) On a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right) \mathbf{v}_j = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_j = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \delta_{k,j} = \mathbf{v}_j = \mathbb{I}_n \mathbf{v}_j,$$

ce qui montre bien que $\mathbb{I}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$.

(15) (a) On a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \right) \mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{w}_k \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{w}_k \delta_{k,j} = \lambda_j \mathbf{w}_j = A \mathbf{w}_j,$$

ce qui montre bien que $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T$.

(b) Le raisonnement est analogue : pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} (x\mathbb{I}_n - A) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \right) \mathbf{w}_j &= (x\mathbb{I}_n - A) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \delta_{k,j} \\ &= (x\mathbb{I}_n - A) \frac{1}{x - \lambda_j} \mathbf{w}_j \\ &= \frac{1}{x - \lambda_j} (x\mathbb{I}_n - A) \mathbf{w}_j \\ &= \frac{1}{x - \lambda_j} (x \mathbf{w}_j - \lambda_j \mathbf{w}_j) \\ &= \mathbb{I}_n \mathbf{w}_j, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(x\mathbb{I}_n - A) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \right) = \mathbb{I}_n$ et donc que

$$(x\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T.$$

(16) (a) Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable et donc $\dim(E) = m$. De là,

$$\dim(E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp) = \dim(E) + \dim(\{\mathbf{u}\}^\perp) - \dim(E + \{\mathbf{u}\}^\perp) = m + n - 1 - \dim(E + \{\mathbf{u}\}^\perp) \geq m + n - 1 - n = m - 1.$$

(b) On a pour tout $\mathbf{v} \in E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp$,

$$B\mathbf{v} = A\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}.$$

On en déduit que

$$E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp \subset \text{Ker}(B - \lambda \mathbb{I}_n),$$

puis que

$$\dim \text{Ker}(B - \lambda \mathbb{I}_n) \geq \dim(E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp) \geq m - 1$$

et donc que λ est valeur propre de B de multiplicité $\geq m - 1$.

(17) Pour x non valeur propre de A , la matrice $x\mathbb{I}_n - A$ est inversible. En lui appliquant (9), on a

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(x\mathbb{I}_n - B) \\ &= \det(x\mathbb{I}_n - A - \mathbf{u}\mathbf{u}^T) \\ &\stackrel{(9)}{=} \det(x\mathbb{I}_n - A) \times (1 - \langle \mathbf{u}, (x\mathbb{I}_n - A)^{-1} \mathbf{u} \rangle) \\ &= \chi_A(x) (1 - \langle \mathbf{u}, (x\mathbb{I}_n - A)^{-1} \mathbf{u} \rangle). \end{aligned}$$

Or, d'après (15)(b),

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, (x\mathbb{I}_n - A)^{-1} \mathbf{u} \rangle &= \left\langle \mathbf{u}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{u} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{u}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle \mathbf{w}_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k} \right).$$

(18) (a) On a

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k.$$

Comme $\mathbf{u} \neq 0$, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_k \rangle \neq 0$ et donc $J \neq \emptyset$.

(b) On raisonne comme en (16)(b) : si $l \notin J$, alors

$$0 \neq \mathbf{w}_l \in \text{Ker}(A - \lambda_l \mathbb{I}_n) \cap \{\mathbf{u}\}^\perp \subset \text{Ker}(B - \lambda_l \mathbb{I}_n),$$

ce qui montre que λ_l est une valeur propre de B .

(c) Si $J = \{j\}$, ce qui précède montre que $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n$ sont valeurs propres de B . Il manque donc une valeur propre μ pour B . Or

$$\mu + \sum_{i \neq j} \lambda_i = \text{Tr}(B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i + 1.$$

On en déduit que $\mu = \lambda_j + 1$ et que le spectre de B est donc bien

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n).$$

(19) (a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ comme somme de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, f'(x) = - \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{(x - \lambda_k)^2}.$$

(b) Par l'hypothèse faite sur J , on a $\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2 > 0$ pour tout k .

D'après (a), pour $l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, f est strictement décroissante sur $] \lambda_l, \lambda_{l+1} [$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow \lambda_l^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \lambda_{l+1}^-} f(x) = -\infty.$$

Le théorème de la bijection affirme (f est continue) que $f :] \lambda_l, \lambda_{l+1} [\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et donc qu'il existe un unique $\mu_l \in] \lambda_l, \lambda_{l+1} [$ tel que $f(\mu_l) = 1$.

De même, f est strictement décroissante sur $] \lambda_n, +\infty [$,

$$\lim_{x \rightarrow \lambda_n^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Le théorème de la bijection affirme que $f :] \lambda_n, +\infty [\rightarrow] 0, +\infty [$ est bijective et donc qu'il existe un unique $\mu_n \in] \lambda_n, +\infty [$ tel que $f(\mu_n) = 1$.

(c) D'après (17), les μ_1, \dots, μ_n précédemment construits vérifient $\chi_B(\mu_i) = 0$

Les valeurs propres de B sont donc bien les réels μ_1, \dots, μ_n et vérifient d'après (b)

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n.$$

QUATRIÈME PARTIE

(20) En utilisant le théorème de transfert et le fait que $(\mathbf{u}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée, on a

$$\mathbb{E} [\langle \mathbf{U}, \mathbf{w} \rangle^2] = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w} \rangle^2 \mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w} \rangle^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \|\mathbf{w}\|^2.$$

(21) La variable $\chi_B(x)$ est d'univers image fini donc possède une espérance finie. Par (17) et linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[\chi_B(x)] = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbb{E}[\langle \mathbf{U}, \mathbf{w}_k \rangle^2] \right) \stackrel{(20)}{=} \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \frac{1}{n} \|\mathbf{w}_k\|^2 \right) = \chi_A(x) \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \right).$$

Or,

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) \text{ donc } \chi'_A(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} (x - \lambda_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(x)}{(x - \lambda_k)}.$$

On en déduit bien que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$:

$$\boxed{\mathbb{E}[\chi_B(x)] = \chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x)}.$$

(22) En écrivant à nouveau par transfert que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\chi_B(x)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \det(x\mathbb{I}_n - A - \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T),$$

on observe que la fonction $x \mapsto \mathbb{E}[\chi_B(x)]$ est polynomiale sur \mathbb{R} donc continue sur \mathbb{R} .

On peut donc passer à la limite quand x tend vers λ_k dans la formule obtenue en (21) et on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}[\chi_B(\lambda_k)] = \lim_{x \rightarrow \lambda_k} \left(\chi_A(x) - \frac{1}{n} \chi'_A(x) \right) = \chi_A(\lambda_k) - \frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k) = -\frac{1}{n} \chi'_A(\lambda_k)}.$$

(23) Comme vu précédemment, la fonction

$$x \mapsto \mathbb{E}[\chi_B(x)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \det(x\mathbb{I}_n - A - \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T)$$

est un polynôme de degré $\leq n$. Le coefficient de X^n de l'expression de droite est $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1$.

Ainsi, $\boxed{x \mapsto \mathbb{E}[\chi_B(x)]}$ est un polynôme unitaire de degré n . Il possède donc au plus n racines et il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}[\chi_B(x)] \neq 0$.

Commentaire personnel : il est possible que l'énoncé attende plutôt le raisonnement suivant. Si par l'absurde, $\mathbb{E}[\chi_B(x)] = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a dans $\mathbb{R}[X]$

$$\chi_A = \frac{1}{n} \chi'_A,$$

égalité absurde pour des raisons de degré.

CINQUIÈME PARTIE

(24) Les valeurs propres de $A - \varepsilon\mathbb{I}_n$ sont $-\varepsilon = \dots = -\varepsilon < \lambda_{m+1} - \varepsilon \leq \dots \leq \lambda_n - \varepsilon$. Comme $-\varepsilon < 0 < \lambda_{m+1} - \varepsilon$, aucune d'entre elle n'est nulle donc $\boxed{A - \varepsilon\mathbb{I}_n \text{ est inversible}}$.

(25) A l'aide de (9), on a

$$\begin{aligned} \det(B - \varepsilon\mathbb{I}_n) &= \det(A - \varepsilon\mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T) \\ &= \det(A - \varepsilon\mathbb{I}_n) (1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle). \end{aligned}$$

Comme $1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle < 0$, on en déduit que $\det(B - \varepsilon\mathbb{I}_n) \neq 0$ et donc que

$$\boxed{B - \varepsilon\mathbb{I}_n \text{ est inversible}}.$$

(26) En utilisant (11), on a

$$(B - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1} = (A - \varepsilon\mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1} = (A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1} - \frac{(A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u}\mathbf{u}^T (A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1}}{1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle}.$$

En posant $\mathbf{v} = (A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u}$ on a $\mathbf{v} \neq 0$ et

$$\mathrm{Tr}((B - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}) = \mathrm{Tr}((A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}) - \frac{1}{1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle} \mathrm{Tr}(\mathbf{v} \mathbf{v}^T) = \mathrm{Tr}((A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}) - \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle}.$$

Comme $1 + \langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1} \mathbf{u} \rangle < 0$, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Tr}((B - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}) > \mathrm{Tr}((A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1})}.$$

(27) Comme

$$\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \dots = \mu_{m-1} = \lambda_m = 0,$$

on a

$$\mathrm{Tr}((B - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}) = \frac{1}{\mu_m - \varepsilon} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\mu_k - \varepsilon} \text{ et } \mathrm{Tr}((A - \varepsilon \mathbb{I}_n)^{-1}) = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{\lambda_k - \varepsilon}.$$

En utilisant (26), il vient

$$\frac{1}{\mu_m - \varepsilon} > \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{\lambda_k - \varepsilon} - \frac{1}{\mu_k - \varepsilon} \right) = \sum_{k=m+1}^n \frac{\mu_k - \lambda_k}{(\lambda_k - \varepsilon)(\mu_k - \varepsilon)} \geq 0$$

et donc $\boxed{\mu_m > \varepsilon}$.

Commentaire personnel : ce sujet plutôt agréable se termine de façon un peu abrupte et on aimerait en tirer un peu plus de conséquences mathématiques...