

**Exercice 1**

- 1 - La fonction  $\varphi_1 : t \mapsto f(t, 0) = 0$  (respectivement  $\varphi_2 : t \mapsto f(0, t) = t^2$ ) est dérivable en 0, donc  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première (respectivement seconde) variable en  $(0, 0)$ , qui vaut 0.
- 2 - Puisque  $\mathbf{R}^2$  est de dimension finie, les normes sont toutes équivalentes, donc la norme utilisée pour étudier la différentiabilité de  $f$  n'a pas d'importance. Choisissons donc la norme définie par  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ .  
 Pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , on a alors  $|y| \leq \|(x, y)\|$  et  $x^2 + y^2 \geq \|(x, y)\|^2$  donc, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|^2$ . Cela montre que  $f(x, y) = o(\|(x, y)\|)$  au voisinage de  $(0, 0)$ . On peut donc écrire

$$f(x, y) = f(0, 0) + \varphi(x, y) + o(\|(x, y)\|)$$

au voisinage de  $(0, 0)$ , en prenant pour  $\varphi$  l'application nulle, qui est linéaire. La fonction  $f$  est donc différentiable en  $(0, 0)$ , avec pour différentielle l'application nulle.

**Exercice 2**

- 1 - Une partie  $K$  d'un espace vectoriel normé est compacte si toute suite d'éléments de  $K$  admet une valeur d'adhérence dans  $K$ .
- 2 - Soit  $(y_n)$  une suite d'éléments de  $f(A)$ . Par définition de  $f(A)$ , on peut choisir une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  telle que  $f(x_n) = y_n$  pour tout  $n$ . Puisque  $A$  est compacte, on peut en extraire une suite  $(x_{\varphi(n)})$  convergente, de limite  $\ell \in A$ .

Par continuité de  $f$  en  $\ell$ , la suite  $(y_{\varphi(n)}) = (f(x_{\varphi(n)}))$  converge vers  $f(\ell) \in f(A)$ , et c'est une suite extraite de  $(y_n)$ . Toute suite d'éléments de  $f(A)$  a donc bien une valeur d'adhérence dans  $f(A)$ , donc  $f(A)$  est compacte.

Par contre, si l'on prend  $E = F = \mathbf{R}$ ,  $f = \sin$  et  $A = [-1, 1]$ , alors  $A$  est bien un compact de  $F$ ,  $f$  est bien continue, mais  $f^{-1}(A) = \mathbf{R}$  n'est pas compact puisque non borné. L'image réciproque d'un compact par une fonction continue n'est donc pas forcément compacte.

**Problème**

**Partie préliminaire**

- 1 - (a) La fonction est continue sur  $]0, \pi]$  et prolongeable par continuité en 0 ; elle est donc intégrable sur  $]0, \pi]$ .
- (b) On sait que, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\sin t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ .

Posons  $g(t) = \frac{\sin t}{t}$  pour  $t \neq 0$ , et  $g(0) = 1$ . On a alors  $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , d'après ce qui précède. Cette série entière a donc un rayon de convergence infini, donc converge en particulier normalement donc uniformément sur le segment  $[0, \pi]$ . Par suite

$$\int_0^\pi g(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

Puisque  $\int_{]0,1]} g(t) dt = \int_{]0,1]} \frac{\sin t}{t} dt = I$ , on obtient bien  $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$  avec  $u_k = \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$  pour tout  $k$ .

2 - (a) Les croissances comparées montrent que  $(\pi^n/n!)$  a pour limite 0.

Posons, pour tout  $n$ ,  $v_n = \pi^n/(n.n!)$ . Alors,  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n\pi}{(n+1)^2} \leq \frac{\pi}{n+1} \leq 1$  pour tout  $n \geq 3$ , et on vérifie directement que  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$  pour  $n = 1$  et 2. La suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est donc bien décroissante.

(b) La suite  $(u_k)$  est extraite de la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  du (a), donc décroît, et de plus tend vers 0. Le théorème sur les séries alternées s'applique donc à la série  $\sum (-1)^k u_k$ .

En particulier, on en déduit que  $|R_n| \leq u_{n+1} = \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!}$ .

Posons, pour tout  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ . On a alors, pour tout  $n$ ,  $I - S_n = R_n$ , donc  $2S_n/\pi$  est une valeur approchée de  $2I/\pi$  à la précision  $2|R_n|/\pi$ , majorée par  $2u_{n+1}/\pi$ .

La calculette montre que  $2u_4/\pi \leq 10^{-2}$ , donc que  $2S_3/\pi \simeq 1,18$  est la valeur approchée de  $2I/\pi$  cherchée.

### Première partie

3 - Commençons par calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$ . Puisque  $f$  est impaire, on a  $a_n = 0$  pour tout  $n \geq 0$ , et, pour  $n \geq 1$ ,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

donc  $b_{2k} = 0$  pour tout  $k \geq 1$ , et  $b_{2k+1} = 4/(2k+1)\pi$  pour tout  $k \geq 0$ . Pour tout  $n$ , la fonction  $S_n$  est donc la somme partielle de rang  $2n+1$  de la série de Fourier de  $f$ .

D'autre part, la fonction  $f$  est clairement continue par morceaux et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbf{R}$ . Le théorème de Dirichlet montre donc que la suite  $(S_n)$  converge vers la fonction  $f_1 : t \mapsto \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ . On constate aisément que  $f_1 = f$  sur  $\mathbf{R}$ , ce qui achève la démonstration.

Enfin, les fonctions  $S_n$  sont clairement continues sur  $\mathbf{R}$ , alors que  $f$  ne l'est pas. La convergence ne peut donc pas être uniforme sur  $\mathbf{R}$ , ni d'ailleurs sur un intervalle contenant un point de discontinuité de  $f$ .

4 - On doit constater que les courbes des fonctions  $S_n$  présentent un extremum très marqué et relativement éloigné de la courbe de  $f$  en un point proche de 0 pour  $n$  grand.

5 - (a) On peut obtenir la formule demandée en considérant  $T_n(t)$  comme la partie imaginaire de la somme géométrique  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)t}$ . On peut aussi multiplier  $T_n(t)$  par  $\sin t$ , et utiliser  $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ , ce qui fournit

$$T_n(t) \sin t = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(2kt) - \cos(2(k+1)t)) = \frac{1 - \cos(2nt)}{2} = \sin^2(nt)$$

par télescopage, et en utilisant  $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ .

(b) Puisque  $[a, b] \subset ]0, \pi/2[$ , la fonction  $1/\sin$  est définie et continue sur le segment  $[a, b]$ , donc y est majorée par un réel  $M$ . D'autre part, la formule du (a) est valable sur  $[a, b]$ . On en déduit  $T_n(t) \leq M$  pour tout  $t \in [a, b]$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ .

(c) Soient  $n$  et  $p$  des naturels non nuls, et  $t \in [a, b]$ . On a

$$\begin{aligned} S_{n+p}(t) - S_n(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_{k+1}(t) - T_k(t)}{2k+1} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_k(t)}{2k-1} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{T_k(t)}{2k+1} \\ &= \frac{4T_{n+p}(t)}{(2(n+p)-1)\pi} + \frac{8}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{T_k(t)}{4k^2-1} - \frac{4T_n(t)}{(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

D'après (b), on a donc  $|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leq \frac{4M}{(2(n+p)-1)\pi} + \frac{8M}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{4M}{(2n+1)\pi}$  en tenant compte du fait que  $T_k(t)$  est positif pour tout  $k$  d'après (a).

La série de terme général  $1/(4k^2-1)$  converge ; on peut donc faire tendre  $p$  vers  $+\infty$  dans l'inégalité précédente, ce qui fournit

$$|f(t) - S_n(t)| \leq \frac{8M}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{4M}{(2n+1)\pi}$$

Le second membre est le terme général de la suite  $(w_n)$  cherchée, le terme  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/(4k^2-1)$  ayant pour limite 0 en tant que reste d'une série convergente.

Cette inégalité étant vraie pour tout  $n \geq 1$  et tout  $t \in [a, b]$ , et  $(w_n)$  ayant pour limite 0 et ne dépendant pas de  $t$ , cela montre que la suite  $(S_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur  $[a, b]$ .

6 - (a) Pour tout  $t \in ]0, \pi/2]$ , on a  $S'_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)t$ . Des techniques analogues à celles décrites en 5-(a)

donnent alors  $S'_n(t) = \frac{2 \sin(2nt)}{\pi \sin t}$ . Le premier point d'annulation de  $S'_n$  est donc en  $\alpha_n = \pi/2n$ .

(b) La fonction  $S_n$  est clairement de classe  $C^1$  sur  $\mathbf{R}$ , et s'annule en 0 ; donc, pour tout  $x \in ]0, \pi/2]$ ,  $S_n(x) = \int_0^x S'_n(t) dt$ . Puisque  $\int_{]0,1]} S'_n = \int_{]0,1]} S'_n$ , les résultats du (a) fournissent la première égalité.

La deuxième s'en déduit en prenant  $x = \alpha_n = \pi/2n$ , et en effectuant le changement de variable  $u = 2nt$  dans l'intégrale.

(c) Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $u \in ]0, \pi]$ , posons  $g_n(u) = \frac{\sin u}{n\pi \sin(u/2n)}$ . Pour tout  $n$ ,  $g_n$  est continue sur  $]0, \pi]$ . De manière évidente, la suite  $g_n$  converge simplement sur  $]0, \pi]$  vers la fonction  $g : u \mapsto 2 \sin u/\pi u$ , elle-même continue sur  $]0, \pi]$ . Enfin, pour tout  $u \in ]0, \pi]$  et tout  $n \geq 1$ ,  $u/2n$  appartient à  $]0, \pi/2]$ , donc  $\sin(u/2n) \geq u/n\pi$  d'après l'inégalité admise par l'énoncé. On en déduit

$$\forall u \in ]0, \pi] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leq g_n(u) \leq \frac{\sin u}{u}$$

Puisque cette dernière fonction est continue et intégrable sur  $]0, \pi]$ , le théorème de convergence dominée montre alors que  $g$  est intégrable sur  $]0, \pi]$  (déjà vu en 1) et que la suite  $S_n(\alpha_n) = \int_0^\pi g_n(u) du$  converge vers

$$\int_0^\pi g(u) du = \frac{2}{\pi} I \text{ où } I \text{ est l'intégrale étudiée dans la partie préliminaire.}$$

7 - Pour tout  $n$ , notons  $M_n$  la borne supérieure de l'ensemble des  $|S_n(x) - f(x)| = |S_n(x) - 1|$  quand  $x$  décrit  $]0, \pi/2[$  ; c'est aussi la borne supérieure de la fonction continue  $|S_n - 1|$  sur le segment  $[0, \pi/2]$ , cette borne est donc bien définie.

On a alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $|S_n(\alpha_n) - 1| \leq M_n$ . D'après la question 6,  $|S_n(\alpha_n) - 1|$  a pour limite  $|2I/\pi - 1|$ , strictement positive vu la valeur approchée calculée en 2 ; donc  $M_n$  n'a pas pour limite 0. Cela ne fait que confirmer que la convergence de la suite  $(S_n)$  sur  $]0, \pi/2[$  n'est pas uniforme.

## Deuxième partie

8 - Le théorème de Parseval affirme que, si  $f$  est une fonction continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbf{R}$ , alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$$

Si les coefficients  $c_n(f)$  sont tous nuls, on en déduit que  $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$ . Si, de plus,  $f$  est continue, alors  $|f|^2$  est continue et positive ; on en déduit qu'elle est nulle sur  $[0, 2\pi]$ , donc que  $f$  est nulle sur  $\mathbf{R}$  par périodicité.

La fonction  $f$  prenant la valeur 1 en chaque  $k\pi$  et nulle partout ailleurs fournit un exemple de fonction non nulle, continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique, pour laquelle les coefficients  $c_n(f)$  sont tous nuls.

9 - (a) Pour tout  $p \in \mathbf{Z}$ , la fonction  $t \mapsto c_p(f)e^{ipt}$  est continue sur  $\mathbf{R}$ . Puisque la série de Fourier de  $f$  converge uniformément sur  $\mathbf{R}$  et que les fonctions qui la composent sont continues, sa somme  $g$  est bien continue sur  $\mathbf{R}$ .

Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $t \in \mathbf{R}$ , posons  $S_n(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^n (c_{-p}(f)e^{-ipt} + c_p(f)e^{ipt})$ , la somme étant nulle pour  $n = 0$  ; la suite  $(S_n)$  converge alors vers  $g$  uniformément sur  $\mathbf{R}$ .

Soit  $k \in \mathbf{Z}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a  $|S_n(t)e^{-ikt} - g(t)e^{-ikt}| = |S_n(t) - g(t)|$  ; donc, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $S_n(t)e^{-ikt}$  converge vers  $g(t)e^{-ikt}$  uniformément sur  $\mathbf{R}$ , donc en particulier sur  $[0, 2\pi]$ . Ces fonctions étant continues, on en déduit que

$$c_k(S_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(t)e^{-ikt} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt} dt = c_k(g)$$

D'autre part,  $c_k(S_n) = \frac{c_0(f)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dt + \sum_{p=1}^n \left( \frac{c_{-p}(f)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ipt} e^{-ikt} dt + \frac{c_p(f)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipt} e^{-ikt} dt \right)$ . Pour tout  $q \in \mathbf{Z}$ , l'intégrale  $\int_0^{2\pi} e^{iqt} e^{-ikt} dt$  vaut  $2\pi$  si  $q = k$  et 0 sinon. On en déduit que  $c_k(S_n)$  est égal à  $c_k(f)$  à partir du rang  $|k|$ .

Puisque  $c_k(S_n)$  tend vers  $c_k(g)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a donc  $c_k(g) = c_k(f)$ .

(b) Par linéarité des coefficients de Fourier, on en déduit que  $c_k(f - g) = 0$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ . Puisque  $f$  et  $g$  sont continues, la question 8 montre que  $f - g$  est la fonction nulle, donc que  $f = g$ .

10 - (a) C'est du cours : une intégration par parties (légale puisque  $f$  est continue, et  $C^1$  par morceaux) fournit  $c_n(f') = inc_n(f)$ .

(b) Pour  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ , la relation  $(a - b)^2 \geq 0$  fournit  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

Soit  $t \in \mathbf{R}$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ . On a alors  $|c_n(f)e^{int}| = \frac{1}{n} \cdot |c_n(f')| \leq \frac{1}{2n^2} + \frac{|c_n(f')|^2}{2}$  d'après la remarque précédente. On établit de même une relation analogue pour  $|c_{-n}(f)e^{-int}|$ .

Ne reste qu'à écrire que  $|u_n(f)(t)| \leq |c_n(f)e^{int}| + |c_{-n}(f)e^{-int}|$  pour obtenir l'inégalité demandée.

(c) La série  $\sum (1/n^2)$  converge. Puisque  $f'$  est continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique, le théorème de Parseval montre que la série de terme général  $|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2$  converge. Par suite, la série dont le terme général est le second membre de l'inégalité du (b) est elle aussi convergente, et ne dépend pas de  $t$ .

L'inégalité du (b) montre donc que la série de terme général  $u_n(f)(t)$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbf{R}$ . Les sommes partielles de cette série sont les sommes partielles de la série de Fourier de  $f$ , au terme constant  $c_0(f)$  près. Puisque la convergence est uniforme et que  $f$  est continue, la question 9 montre que, pour tout  $t$  réel,

$$f(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(f)(t)$$

(d) On vient de démontrer que, si  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}$ , de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbf{R}$  et  $2\pi$ -périodique, alors sa série de Fourier converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

Si l'énoncé appelle phénomène de Gibbs le résultat de la question 7, c'est-à-dire le fait que la série de Fourier de la fonction  $f$  de la première partie ne convergeait pas uniformément vers  $f$ , alors ce phénomène ne peut pas se produire pour une fonction continue et de classe  $C^1$  par morceaux.