

## A. Prolongement harmonique

On considère dans toute la suite la fonction  $h : t \mapsto f(e^{it})$ , notons qu'alors les complexes  $c_n, n \in \mathbb{Z}$  sont les coefficients de Fourier de  $h$ .

1. Puisque  $h$  est continue  $2\pi$ -périodique, alors les suites  $(c_n)_n$  et  $(c_{-n})_n$  convergent vers 0 (Lemme de Lebesgue, découle de la formule de Parseval). Elles sont donc bornées. Soit  $M > 0$  tel que  $|c_n| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On a alors pour tout  $z \in D$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |c_n z^n| \leq M |z|^n \text{ et } |c_{-n} \bar{z}^n| \leq M |z|^n$$

Sachant que  $|z| < 1$  ceci prouve que les séries  $\sum c_n z^n$  et  $\sum c_{-n} \bar{z}^n$  sont convergentes.

2.  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R \geq 1$ .

$$\tilde{S}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n.$$

On fixe  $y \in ]-1, 1[$ , posons  $I_y = ]-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}[$  et considérons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction définie sur  $I_y$ ,  $v_n : x \mapsto a_n (x + iy)^n$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  de dérivée  $v'_n : x \mapsto n a_n (x + iy)^{n-1}$ . La série de fonction  $\sum v_n$  converge simplement sur  $I_y$ .

Soit maintenant  $r \in ]|y|, 1[$ , pour tout  $x$  dans le segment  $[-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}] \subset I_y$

$$|n a_n (x + iy)^{n-1}| \leq n |a_n| r^{n-1}.$$

La série entière  $\sum n a_n z^{n-1}$  a le même rayon de convergence que  $\sum a_n z^n$ , donc la série  $\sum n a_n r^{n-1}$  converge absolument et donc  $\sum v'_n$  converge normalement sur le segment  $[-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]$ .

Alors  $\sum v'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I_y$ .

Ainsi la fonction partielle  $x \mapsto \tilde{S}(x, y)$  est dérivable sur l'intervalle  $I_y$  et sa dérivée est

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}.$$

La série entière  $\sum n a_n z^{n-1}$ , ayant pour rayon de convergence  $R \geq 1$ , sa somme  $T$  est continue sur  $D$ , donc la fonction  $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \tilde{T}$  est continue sur  $\tilde{D}$ .

3. On démontre de même que  $\tilde{S}$  admet une dérivée partielle continue sur  $\tilde{D}$  selon  $y$  et que pour tout  $(x, y) \in \tilde{D}$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}(x, y) = i \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1} = i \tilde{T}(x, y).$$

Et en appliquant ses résultat à la fonction  $T$ , somme d'une série entière de même rayon de convergence,  $\tilde{T}$  admet des dérivées partielles continues sur  $\tilde{D}$  selon  $x$  et  $y$ , et donc  $\tilde{S}$  admet des dérivées partielles secondes continues sur  $\tilde{D}$ . Alors  $\tilde{S}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\tilde{D}$ .

De plus pour tout  $(x, y) \in \tilde{D}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x + iy)^{n-2}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2}(x, y) = i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}(x, y) = - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x + iy)^{n-2}$$

Et ainsi  $\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2}(x, y) = 0$ , soit  $\Delta S(z) = 0$  pour tout  $z \in D$ .

4. On pose pour tout  $z \in D$ ,  $S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$  et  $S_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{c}_{-n} z^n$ , de telle sorte que

$$g_f(z) = S_1(z) + \overline{S_2(z)}$$

Puisque  $S_2$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $D$  alors  $\overline{S_2}$  l'est aussi, et  $\Delta \overline{S_2}(z) = \overline{\Delta S_2}(z)$  pour tout  $z \in D$ . Il suffit ensuite d'appliquer le résultat de la question précédente aux sommes  $S_1$  et  $S_2$

5. Soit  $z \in D$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P_z(t) = \mathcal{R}e \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right)$ .

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \text{ et puisque } |ze^{-it}| = |z| < 1 \text{ alors}$$

$$\frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} = (1 + ze^{-it}) \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} z^n e^{-int} \text{ et donc}$$

$$\mathcal{R}e \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{R}e(z^n e^{-int}) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (z^n e^{-int} + \bar{z}_n e^{int})$$

Donc pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$

$$f(e^{it}) P_z(t) = f(e^{it}) + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n f(e^{it}) e^{-int} + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{z}_n f(e^{it}) e^{int}$$

Les séries de fonctions  $\sum z^n f(e^{it}) e^{-int}$  et  $\sum \bar{z}_n f(e^{it}) e^{int}$  convergent normalement sur le segment  $[-\pi, \pi]$  puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [-\pi, \pi]$

$$|z^n f(e^{it}) e^{-int}| \leq M |z|^n \text{ et } |\bar{z}^n f(e^{it}) e^{int}| \leq M |z|^n$$

où  $M = \sup_{|\omega|=1} |f(\omega)|$  ( $f$  est continue sur le compact  $T$ ). Une interversion série/intégrale est donc possible.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{z}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{int} dt \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n \end{aligned}$$

ou encore

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) dt$$

6. Si  $f = p_n$ , pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $c_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t} dt = \delta_{n,p}$  donc  $g_{p_n}(z) = z^n$ .

Si  $f = q_n$ , pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $c_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+p)t} dt = \delta_{-n,p}$  donc  $g_{q_n}(z) = \bar{z}^n$ .

En particulier pour  $f = p_0 = 1$  on obtient  $g_{p_0} = 1$ , donc d'après la question (5.),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) dt = 1$$

On peut ensuite constater que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $z \in D$ ,

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{(e^{it} + z)(e^{-it} - \bar{z})}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - |z|^2 + ze^{-it} - \bar{z}e^{it}}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - |z|^2 + 2i \operatorname{Im}(ze^{-it})}{|e^{it} - z|^2}$$

et donc  $P_z(t) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}$ . Ainsi si  $z \in D$  alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, P_z(t) > 0.$$

7. Pour tout  $z \in D$ ,

$$\begin{aligned} |g_{f_n}(z) - g_f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(e^{it}) - f(e^{it})) P_z(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|f_n - f\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)| dt \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty} \end{aligned}$$

sachant que  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) dt = 1$ .

Alors pour tout  $z \in \bar{D}$ ,  $|g_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq \|f_n - f\|_{\infty}$ . Ce qui démontre la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(G_{f_n})_n$  vers  $G_f$  sur  $\bar{D}$ .

8. Soit  $f \in \mathcal{C}(T)$ . et soit  $\varepsilon > 0$ . Considérons la fonction continue  $2\pi$  périodique sur  $\mathbb{R}$ ,  $h : t \mapsto f(e^{it})$ . D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe au moins

un polynôme trigonométrique  $P(t) = \sum_{k=-p}^p a_k e^{ikt}$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, |h(t) - P(t)| \leq \varepsilon.$$

On a alors pour tout  $z \in T$

$$|f(z) - Q(z)| \leq \varepsilon$$

où on a posé  $Q(z) = a_0 + \sum_{k=1}^p a_k z^k + a_{-k} \bar{z}^k$  et de cette façon  $Q \in \mathcal{P}(T)$ .

On a ainsi démontré que  $\mathcal{P}(T)$  est dense dans  $\mathcal{C}(T)$  pour la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_{\infty}$ . D'où l'existence pour tout  $f \in \mathcal{C}(T)$  d'une suite d'éléments de  $\mathcal{P}(T)$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $T$ .

Notons que si  $Q(z) = a_0 + \sum_{k=1}^p a_k z^k + a_{-k} \bar{z}^k$  alors  $G_Q(z) = Q(z)$  d'après la question (5.), en particulier  $G_Q$  est continue sur  $\bar{D}$ .

Soit alors  $f \in \mathcal{C}(T)$ , et soit une suite d'éléments de  $\mathcal{P}(T)$  qui CVU vers  $f$  sur  $T$ . D'après (7.),  $(G_{Q_n})$  CVU vers  $G_f$  sur  $\bar{D}$ , la continuité des fonctions  $G_{Q_n}$  achève la justification de la continuité de  $G_f$ .

9. La fonction  $\rho : z \mapsto |z|^2$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $D$  et pour tout  $z \in D$

$$\Delta \rho(z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + y^2) = 4$$

Par linéarité de l'opérateur  $\Delta$  et puisque  $\Delta G(z) = 0$  sur  $D$  on a alors

$$\forall z \in D, \Delta u(z) = \Delta G(z) + \varepsilon \Delta \rho(z) = 4\varepsilon > 0.$$

**Ensuite.**  $\bar{D}$  étant un compact et  $u$  étant continue sur  $D$ , elle y'est bornée et atteint ses bornes. Soit  $z_0 \in \bar{D}$  un point en lequel  $u$  admet un maximum absolu sur  $\bar{D}$ .

Nous allons montrer que forcément  $z_0 \in T$ . Supposons par l'absurde que  $z_0 \in D$ .

La fonction de la variable réelle  $t$ ,  $\varphi : t \mapsto u(z_0 + t)$  est alors bien définie sur un intervalle  $I$  voisinage de 0.

$\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  comme composée de fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et elle admet un maximum global en 0. Comme 0 est un point intérieur de l'intervalle  $I$ , alors  $\varphi'$  s'annule et change de signe en 0, elle est positive à gauche de 0 et négative à droite de 0 pour des valeurs de  $t$  voisines de 0. Dans ces conditions on a forcément  $\varphi''(0) \leq 0$ , sinon  $\varphi'$  serait strictement croissante au voisinage de 0.

Maintenant pour tout  $t \in I$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0 + t) \text{ et } \varphi''(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0 + t)$$

$\varphi''(0) \leq 0$  donne alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) \leq 0.$$

De même en considérant la fonction  $\psi : t \mapsto u(z_0 + it)$ , on démontre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) \leq 0.$$

Ceci contredit ce qui a été démontré auparavant :  $\forall z \in D, \Delta u(z) > 0$ .

Alors  $z_0 \in T$ . On a donc  $u(z_0) = G(z_0) + \varepsilon = \varepsilon$  et donc  
 $\forall z \in \overline{D}, u(z) \leq \varepsilon$ .

10. D'après la question précédente

$$\forall \varepsilon > 0, \forall z \in \overline{D}, u(z) = G(z) + \varepsilon |z|^2 \leq \varepsilon \text{ et donc } G(z) \leq \varepsilon(1 - |z|^2) \leq \varepsilon$$

On en déduit que  $G$  est négative sur  $\overline{D}$ .

Récapitulons : Si  $G$  est continue à valeurs réelles sur  $\overline{D}$ , de classe  $C^2$  avec  $\Delta G(z) = 0$  sur  $D$ , alors  $G \leq 0$ .

Le même résultat peut être appliqué à  $-G$  qui serait alors négative sur  $\overline{D}$ . Ainsi  $G = 0$   
 On a bien dans ce cas  $G = G_f$ .

**Ensuite.** Si  $f$  est nulle sur  $T$  et  $G$  est à valeurs complexes sur  $\overline{D}$ , Les fonctions  $\mathcal{R}e(G)$  et  $\mathcal{I}m(G)$  sont continues sur  $\overline{D}$ , de classe  $C^2$  sur  $D$  et vérifient elles aussi  $\Delta(\mathcal{R}e(G))(z) = 0$  et  $\Delta(\mathcal{I}m(G))(z) = 0$  sur  $D$ .

D'après ce qui précède  $\mathcal{R}e(G) = \mathcal{I}m(G) = 0$  soit  $G = 0$ .

Si  $f$  est quelconque sur  $T$ .  $G - G_f$  va vérifier les hypothèses du cas précédent et serait donc nulle. Alors  $G = G_f$ .

## B. Deux applications

11. On a pour tout  $z \in \overline{D}$ ,  $G(z) = \mathcal{R}e(e^z)$ . comme  $e^z$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, la question (3.) indique que son laplacien est nul sur  $D$ .  
 Idem pour sa partie réelle.

Pour tout  $z = x + iy \in \overline{D}$

$$G(z) = \mathcal{R}e \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^p}{p!} \right) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{2p!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\overline{z}^p}{2p!}$$

On a donc pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $t \in [-\pi, \pi]$

$$G(e^{it})e^{-int} = e^{-int} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i(p-n)t}}{2p!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{-i(p+n)t}}{2p!}$$

On invoque maintenant la convergence normale des séries de fonctions  $\sum \frac{1}{2p!} e^{i(p-n)t}$

et  $\sum \frac{1}{2p!} e^{-i(p+n)t}$  sur le segment  $[-\pi, \pi]$  pour pouvoir intégrer terme à terme, et via

les égalités  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t} dt = \delta_{n,p}$  et  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+p)t} dt = \delta_{n,-p}$ , on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it})e^{-int} dt = \frac{1}{2|n|!} \text{ si } n \neq 0, 1 \text{ si } n = 0.$$

(Noter que pour aboutir à ce résultat, on a pu procéder en faisant abstraction de toute la panoplie mise en place par le sujet, faire une réponse qui utilise les résultats précédents n'aurait pas été plus court).

D'autre part

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it})e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) e^{-int} dt.$$

donc en prélevant la partie réelle

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \cos(nt) dt = \begin{cases} \frac{1}{2|n|!} & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

12. Si  $u$  est de classe  $C^2$  sur  $U$  et  $\Delta u = 0$  (on dit que  $u$  est harmonique sur  $U$ ).

Soient  $a \in U$  et  $R > 0$  tels que  $\overline{D}(a, R) \subset U$ . On considère la fonction  $G$  définie sur  $\overline{D}$  par

$$G(\omega) = u(a + R\omega)$$

$G$  est continue sur  $\overline{D}$ , harmonique sur  $D$  car de classe  $C^2$  et  $\Delta G(\omega) = R^2 \Delta u(a + R\omega) = 0$ .

D'après la question (5.) on a donc pour tout  $\omega \in D$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it}) P_{\omega}(t) dt.$$

On revient à la variable  $z \in D(a, R)$  en posant  $\omega = \frac{z-a}{R}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + R e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$$

**Réciproquement,** On suppose que  $u$  est continue sur  $U$  et que pour tout  $a \in U$  et  $R > 0$  tels que  $\overline{D}(a, R) \subset U$ ,  $u$  vérifie cette dernière égalité sur  $D(a, R)$ .

Soit alors  $a \in U$  et  $R > 0$  tels que  $\overline{D}(a, R) \subset U$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $T$  par

$$f(\omega) = u(a + R\omega)$$

$f$  est continue sur  $T$  donc il existe une fonction  $G_f$  continue sur  $\overline{D}$ , de classe  $C^2$  et harmonique sur  $D$  avec

$$\forall \omega \in D, G_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_{\omega}(t) dt$$

On a alors pour tout  $z \in D(a, R)$

$$G_f \left( \frac{z-a}{R} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + R e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}} dt$$

Et ainsi, d'après l'hypothèse faite sur  $u$ , pour tout  $z \in D(a, R)$

$$u(z) = G_f \left( \frac{z-a}{R} \right)$$

Ce qui prouve que  $u$  est de classe  $C^2$  et harmonique sur  $D(a, R)$  puisque  $G_f$  vérifie ses propriétés sur  $D$ . Ceci pour tout disque  $D(a, R)$  inclu dans  $U$ . Alors  $u$  est de classe  $C^2$  et harmonique sur  $U$ .

13. Soit une suite de fonctions harmoniques  $(u_n)$  qui converge uniformément sur  $U$  vers une fonction  $u$ .

Soient  $a \in U$  et  $R > 0$  tels que  $\overline{D}(a, R) \subset U$ . D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\forall z \in D(a, R), u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + R e^{it}) P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt \quad (*)$$

La fonction  $t \mapsto P_{\frac{z-a}{R}}(t)$  est bornée sur le segment  $[-\pi, \pi]$ , car elle y est continue. Soit

donc  $K = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} \left| P_{\frac{z-a}{R}}(t) \right|$ .

Posons pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ ,  $\varphi_n(t) = u_n(a + Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$  et  $\varphi(t) = u(a + Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$ .

On a alors pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq K \sup_{z \in \overline{D}(a, R)} |u_n(z) - u(z)|.$$

Ce qui démontre que  $(\varphi_n)_n$  CVU vers  $\varphi$  sur  $[-\pi, \pi]$  par CVU de  $(u_n)_n$  vers  $u$  sur  $\overline{D}(a, R)$ .

En faisant tendre  $n$  vers  $\infty$  dans l'égalité (\*) on obtient

$$\forall z \in D(a, R), u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t) dt$$

En outre la continuité de  $u$  découle de la continuité des fonctions  $u_n$  et de la CVU de  $(u_n)_n$  vers  $u$ .

D'après la question (12.), la fonction  $u$  est harmonique sur  $U$

**N.B :** On a juste eu besoin de la CVU sur tout compact de  $(u_n)_n$  vers  $u$ .

## C. Propriétés duales

14. (c1)  $\varphi_z$  est une forme linéaire, grace à l'expression intégrale de  $g_f(z)$

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t) dt$$

Toujours grâce à cette expression

$$|g_f(z)| \leq \frac{N(f)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)| \leq N(f).$$

Ceci démontre la continuité de la forme linéaire  $\varphi_z$

(c2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_z(p_n) = g_{p_n}(z) = z^n$  d'après (6.).

(c3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_z(q_n) = g_{q_n}(z) = \bar{z}^n$  d'après (6.).

(c4)  $|\varphi_z(f)| \leq N(f)$  a été justifié en (c1).

15. On suppose que  $\varphi$  vérifie les propriétés (c1), (c2) et (c3).

La linéarité de  $\varphi$  associée aux propriétés (c1) et (c2) démontrent que

$$\forall P \in \mathcal{P}(T), \varphi(P) = P(z) = \varphi_z(P)$$

Dans la question (8.), on a démontré la densité de  $\mathcal{P}(T)$  dans  $\mathcal{C}(T)$  pour la norme de la convergence uniforme. La propriété (c1) affirme la continuité des applications  $\varphi$  et  $\varphi_z$  quand  $\mathcal{C}(T)$  est muni de cette même norme. Puisque  $\varphi$  et  $\varphi_z$  prennent les mêmes valeurs sur  $\mathcal{P}(T)$  alors elles sont égales.

16. Pour tout  $z \in T$ ,  $h(z) = 2f(z) - N(f) + i\lambda$ . Puisque  $N(f)$ ,  $f(z)$  et  $\lambda$  sont des réels alors

$$|h(z)|^2 = (2f(z) - N(f))^2 + \lambda^2 = 4f(z)^2 - 4N(f)f(z) + N(f)^2 + \lambda^2.$$

Sachant que  $f$  est à valeurs réelles positives, on a  $f(z) \in [0, N(f)]$ . Considérons la fonction polynomiale  $P(t) = 4t^2 - 4N(f)t + N(f)^2 + \lambda^2$  de telle sorte que  $|h(z)|^2 = P(f(z))$ .

En étudiant les variations de  $P$  sur l'intervalle  $[0, N(f)]$ , on trouve

$$\max_{t \in [0, N(f)]} P(t) = N(f)^2 + \lambda^2$$

valeur maximale qui est atteinte pour  $t = 0$  et  $t = N(f)$ . Sachant qu'il existe effectivement  $z_0 \in T$  tel que  $f(z_0) = N(f)$  on a donc

$$N(h)^2 = \max_{z \in T} |h(z)|^2 = N(f)^2 + \lambda^2.$$

17.  $\varphi$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire et  $\varphi(1) = 1$ , partant de l'écriture  $h = 2f - N(f) + i\lambda$  on a donc

$$\varphi(h) = 2\varphi(f) - N(f) + i\lambda$$

alors

$$\begin{aligned} |\varphi(h)|^2 &= (2\mathcal{R}e(\varphi(f)) - N(f))^2 + (2\mathcal{I}m(\varphi(f)) + \lambda)^2 \\ &= 4|\varphi(f)|^2 - 4\mathcal{R}e(\varphi(f))N(f) + \lambda^2 + N(f)^2 + 4\lambda\mathcal{I}m(\varphi(f)) \end{aligned}$$

$|\varphi(h)|^2 \leq N(h)^2$  et  $N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2$  donc

$$4|\varphi(f)|^2 - 4\mathcal{R}e(\varphi(f))N(f) + 4\lambda\mathcal{I}m(\varphi(f)) \leq 0$$

Ceci pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Donc forcément

$$\mathcal{I}m(\varphi(f)) = 0$$

ie  $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ , par suite

$$4\varphi(f)^2 - 4\varphi(f)N(f) = 4\varphi(f)(\varphi(f) - N(f)) \leq 0$$

$\varphi(f) \leq N(f)$  donc forcément  $\varphi(f) \geq 0$ .

18. Soit  $f \in \mathcal{C}(f)$ .

Si  $f$  est à valeurs réelles alors on peut écrire  $f = f^+ - f^-$ , les fonctions  $f^+$  et  $f^-$  étant définies de la façon suivante

$$\forall z \in T, f^+(z) = \max(0, f(z)) = \frac{|f(z)| + f(z)}{2} \text{ et } f^-(z) = \max(0, -f(z)) = \frac{|f(z)| - f(z)}{2}$$

Ses expressions permettent de justifier que  $f^+$  et  $f^-$  sont des fonctions continues positives et donc d'après la question précédente,  $\varphi(f^+)$  et  $\varphi(f^-)$  sont des réels positifs.

Par linéarité de  $\varphi$ ,  $\varphi(f) = \varphi(f^+) - \varphi(f^-)$  et en particulier  $\varphi(f)$  est un réel.

Dans le cas général, en écrivant  $f = \mathcal{R}e(f) + i\mathcal{I}m(f)$  on a  $\varphi(f) = \varphi(\mathcal{R}e(f)) + i\varphi(\mathcal{I}m(f))$ , de quoi on déduit que

$$\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)} = \varphi(\mathcal{R}e(f)) - i\varphi(\mathcal{I}m(f))$$

Maintenant sachant que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n = \bar{p}_n$ , la propriété (c3) est aussi vérifiée par  $\varphi$  et donc d'après la question (15.),  $\varphi = \varphi_z$ .