

X 2004 MP MATH 1

PREMIÈRE PARTIE

- (1) On a l'équivalence suivante : $x' = ax \Leftrightarrow x(t) = x(0)g(t)$ d'où x est T -périodique ssi g est T -périodique ce qui se traduit par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^{t+T} a(s) ds = \int_0^t a(s) ds \Rightarrow \int_0^T a(s) ds = 0.$$

Réciproquement : si $\int_0^T a(s) ds = 0$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\int_t^{t+T} a(t) dt = 0$ (propriété des fonctions périodiques) d'où l'équivalence

$$(E1) \text{ admet des solutions } T\text{-périodiques} \Leftrightarrow A = 0.$$

- (2) (a) On sait que les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} car on a une équation différentielle linéaire. Par théorème (ou en raisonnant directement par équivalences) les solutions maximales sont données par la formule

$$x(t) = x(0)g(t) + \int_0^t b(s) \frac{g(t)}{g(s)} ds.$$

- (b) Recherche des solutions périodiques (on pose $\alpha(t) = \int_0^t a(s) ds$) :

- $A \neq 0$ alors, en remarquant que $\alpha(t+T) = A + \alpha(t)$, on a

$$x(t) = x(0)e^{\alpha(t)} + e^{\alpha(t)} \int_0^t b(s)e^{-\alpha(s)} ds = x(t+T) = x(0)e^{\alpha(t+T)} + e^{\alpha(t+T)} \int_0^{t+T} b(s)e^{-\alpha(s)} ds$$

ce qui, en simplifiant par $e^{\alpha(t)}$, donne la relation équivalente suivante :

$$\begin{aligned} x(0) + \int_0^t b(s)e^{-\alpha(s)} ds &= x(0)e^A + e^A \int_0^{t+T} b(s)e^{-\alpha(s)} ds \\ &= x(0)e^A + e^A \int_0^T b(s)e^{-\alpha(s)} ds + e^A \int_T^{t+T} b(s)e^{-\alpha(s)} ds. \end{aligned}$$

Or $\int_T^{t+T} b(s)e^{-\alpha(s)} ds = e^{-A} \int_0^T b(u)e^{-\alpha(u)} du$ (en posant $u = s - T$) d'où la C.N.S. pour que x soit T -périodique :

$$x(0) (1 - e^A) = e^A \int_0^T b(s)g(s) ds$$

qui donne une seule solution.

- $A = 0$:
 si $\int_0^T b(s)g(s) ds = 0$ alors toutes les solutions sont T -périodiques,
 si $\int_0^T b(s)g(s) ds \neq 0$ alors il n'y a aucune solution T -périodique.

- (3) (a) Si $k \neq 0$ alors $A = 2\pi k \neq 0$ donc la question précédente nous assure l'existence et l'unicité d'une solution 2π -périodique.

Par linéarité de l'application $x \mapsto \widehat{x}(n)$ et grâce à la relation $\widehat{x}'(n) = in\widehat{x}(n)$ on a

$$\widehat{x}'(n) = k\widehat{x}(n) + \widehat{b}(n) \Rightarrow \widehat{x}(n) = \frac{\widehat{b}(n)}{in - k}.$$

Mode de convergence : comme x est \mathcal{C}^1 alors on sait que la convergence de la série de Fourier de x est normale. Comme $\widehat{b}(n) \rightarrow 0$ on peut aussi dire que $\widehat{x}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- (b) Si $k = 0$ on applique là encore le résultat du **2.b**.
- Si $\widehat{b}(0) = 0$ alors toutes les solutions sont 2π -périodiques.
 - Si $\widehat{b}(0) \neq 0$ aucune ne l'est.

DEUXIÈME PARTIE

- (4) On peut raisonner par équivalences (toujours en posant $\alpha(t) = \int_0^t a(s) ds$).

$$\begin{aligned} x' = ax + h &\Leftrightarrow e^{-\alpha}(x' - ax) = e^{-\alpha}H \\ &\Leftrightarrow e^{-\alpha(t)}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-\alpha(s)}H(x(s), s) ds \\ &\Leftrightarrow x(t) = g(t) \left[x(0) + \int_0^t g(s)^{-1}H(x(s), s) ds \right] \end{aligned}$$

- (5) On rappelle que $g(t+T) = e^{\alpha(t+T)} = e^A g(t)$ et

$$\begin{aligned} \int_{t+T}^{t+2T} g(s)^{-1}H(x(s), s) ds &= \int_t^{t+T} g(u+T)^{-1}H(x(u+T), u+T) du \\ &= e^{-A} \int_t^{t+T} g(u)^{-1}H(x(u), u) du \end{aligned}$$

donc $(U_H x)(t+T) = \frac{e^A}{1 - e^A} g(t+T) e^{-A} \int_t^{t+T} g(u)^{-1}H(x(u), u) du = (U_H x)(t)$ et $U_H x$ est continue grâce au théorème fondamental du calcul différentiel.

Conclusion : on a bien $U_H x \in P$.

Montrons maintenant que, si $x \in P$, alors x solution de (E3) $\Leftrightarrow U_H x = x$.

On peut raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} x(t+T) = x(t) &\Leftrightarrow g(t) \left[x(0) + \int_0^t g(s)^{-1}H(x(s), s) ds \right] = \underbrace{g(t+T)}_{=e^A g(t)} \left[x(0) + \int_0^{t+T} g(s)^{-1}H(x(s), s) ds \right] \\ &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x(0) + \int_0^t g(s)^{-1}H(x(s), s) ds = \frac{e^A}{1 - e^A} \int_t^{t+T} g(s)^{-1}H(x(s), s) ds \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x = U_H x \end{aligned}$$

où (1) est obtenu en exprimant $x(0)$ à l'aide de la relation précédente et on a (2) en reportant $x(0)$ dans la formule de la question 4.

- (6) (a) On remarque que $g(t) > 0$, que $g(s)^{-1}g(t) = \exp\left(-\int_t^s a(u) du\right)$ donc $g(s)^{-1}g(t) \leq e^{(s-t)\|a\|}$ pour $s \in [t, t+T]$ et que, comme $x \in B_r$ et F est T -périodique par rapport

à la deuxième variable, $|F(x(s), s)| \leq \alpha_r$ pour $s \in [t, t+T]$. On a alors

$$\begin{aligned} |U_\varepsilon x(t)| &\leq \varepsilon \frac{e^A}{|1 - e^A|} \int_t^{t+T} g(s)^{-1} g(t) |F(x(s), s)| ds \\ &\leq \varepsilon \frac{e^A}{|1 - e^A|} e^{T\|a\|} \alpha_r T. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\varepsilon_0 = \frac{r|e^{-A} - 1|e^{-T\|a\|}}{\alpha_r T}$.

(b) On utilise l'inégalité des accroissements finis

$$\begin{aligned} |F(x(s), s) - F(y(s), s)| &\leq |x(s) - y(s)| \sup_{v \in [-r, r]} \left| \frac{\partial F}{\partial v}(v, s) \right| \\ &\leq \|x - y\| \beta_r \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |U_\varepsilon x(t) - U_\varepsilon y(t)| &\leq \varepsilon \frac{e^A}{|1 - e^A|} \int_t^{t+T} g(s)^{-1} g(t) |F(x(s), s) - F(y(s), s)| ds \\ &\leq \|x - y\| \varepsilon \underbrace{\frac{e^A}{|1 - e^A|} \beta_r e^{T\|a\|} T}_{=K}. \end{aligned}$$

On veut $K < 1$, il suffit de prendre $\varepsilon_1 = \min \left(\varepsilon_0, \frac{1}{2} \frac{|e^{-A} - 1|e^{-T\|a\|}}{\beta_r T} \right)$.

(c) On utilise alors le théorème du point fixe :

- pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, U_ε est une contraction de B_r ,
- P est complet (fermé dans l'intersection $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ muni de la norme infinie) et B_r est un fermé dans P .

On peut donc conclure : $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_1$, il existe une unique solution x_ε de (E4) dans B_r .

(7) C'est le théorème du point fixe avec paramètre :

$$\|x_\varepsilon - x_{\varepsilon'}\| = \|U_\varepsilon x_\varepsilon - U_{\varepsilon'} x_{\varepsilon'}\| \leq \underbrace{\|U_\varepsilon x_\varepsilon - U_{\varepsilon'} x_{\varepsilon'}\|}_{\leq K \|x_\varepsilon - x_{\varepsilon'}\|} + \|U_\varepsilon x_{\varepsilon'} - U_{\varepsilon'} x_{\varepsilon'}\|.$$

or

$$\begin{aligned} |U_\varepsilon x_\varepsilon - U_{\varepsilon'} x_{\varepsilon'}|(t) &\leq |\varepsilon - \varepsilon'| \frac{e^A}{|1 - e^A|} \int_t^{t+T} g(t) g(s)^{-1} |F(x(s), s)| ds \\ &\leq |\varepsilon - \varepsilon'| \underbrace{\frac{e^A}{|1 - e^A|} e^{TA} T \alpha_r}_{=K'}. \end{aligned}$$

On a ainsi $\|x_\varepsilon - x_{\varepsilon'}\| \leq \frac{|\varepsilon - \varepsilon'| K'}{1 - K}$ donc $\varepsilon \in \mathbb{R} \mapsto x_\varepsilon \in P$ est continue, par conséquent $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x_0$. Or la seule solution périodique de (E1) lorsque $A \neq 0$ est la solution nulle donc $x_\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(8) Soit $x_0(t) = c_0$ alors $g(t) = e^{kt}$ et $A = kT$.

$$\begin{aligned} U_\varepsilon x_0(t) &= \frac{\varepsilon e^{kT}}{1 - e^{kT}} e^{kt} f(t_0) \int_t^{t+T} e^{-ks} ds = \frac{\varepsilon e^{kT}}{1 - e^{kT}} f(c_0) e^{kt} \left[-\frac{1}{k} e^{-ks} \right]_t^{t+T} \\ &= \frac{\varepsilon e^{kT}}{1 - e^{kT}} f(c_0) \frac{e^{kt}}{k} (e^{-kt} - e^{-kt} e^{-kT}) = \frac{\varepsilon e^{kT}}{1 - e^{kT}} \frac{f(c_0)}{k} (1 - e^{-kT}) = -\frac{\varepsilon}{k} f(c_0) \end{aligned}$$

La fonction constante $x_\varepsilon(t) = c_0$ est solution (où c_0 est l'unique solution de l'équation $\varepsilon f(x) + kx = 0$ pour ε suffisamment petit).

Remarque : si on pose $g(x) = -\frac{\varepsilon}{k}f(x)$ alors $g'(x) = -\frac{\varepsilon}{k}f'(x)$ donc, pour $r > 0$ donné, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ entraîne $g([-r, r]) \subset [-r, r]$ et il existe $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ tel que $\sup_{x \in [-r, r]} |g'(x)| < 1$, le théorème du point fixe s'applique ici de manière élémentaire.

- (9) (a) On reprend la formule du **6.a** : $\alpha_r = r^2$, $\beta_r = 2r$, $g(t) = e^{-t}$, $A = -T$ alors

$$\varepsilon_0 = \frac{r(1 - e^{-T})e^T e^{-T}}{r^2 T} = \frac{1 - e^{-T}}{rT}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-T}}{2rT} = \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

- (b) La fonction constante qui vaut 0 est évidemment une solution 1-périodique et comme on sait qu'il n'y en a qu'une seule alors $x_\varepsilon = 0$ est l'unique solution de (E5).

- (c) $F(x) = -x + \varepsilon x^2$ est de classe \mathcal{C}^1 donc l'existence et l'unicité d'une solution maximale φ_α est une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz.

- Si $\alpha = 0$ alors $\varphi_0 = 0$ et φ_0 est définie sur \mathbb{R} .
- Si $\alpha \neq 0$ alors, en vertu de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, φ_α ne peut s'annuler sur J intervalle maximal où φ_α est définie.

On pose alors $\psi_\alpha = \frac{1}{\varphi_\alpha}$, ψ_α vérifie l'équation différentielle $-y' + y = \varepsilon$

qui admet les solutions $y(t) = \lambda e^t + \varepsilon$. Si on pose $\beta = \frac{1}{\alpha} - \varepsilon$ on obtient

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\beta e^x + \varepsilon}.$$

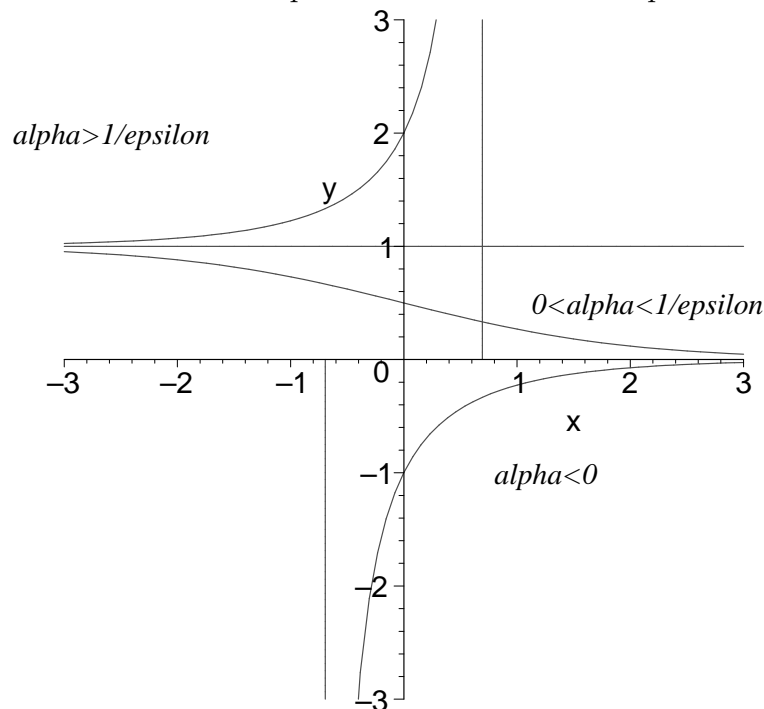
– Si $\beta \geq 0$ alors φ_α est définie sur \mathbb{R} .

– Si $\beta < 0$, on pose $t_0 = \ln\left(-\frac{\varepsilon}{\beta}\right)$.

* Si $\alpha > 0$ alors $-\frac{\varepsilon}{\beta} > 1$ soit $t_0 > 0$, φ_α est définie sur $] -\infty, t_0[$.

* Si $\alpha < 0$ alors $-\frac{\varepsilon}{\beta} < 1$ soit $t_0 < 0$, φ_α est définie sur $]t_0, +\infty[$.

Voici les solutions représentatives obtenues en prenant $\varepsilon = 1$.



TROISIÈME PARTIE

- (10) On utilise la formule de la question 4 : $x(t) = e^{kt} \left(x(0) + \varepsilon \int_0^t e^{-ks} f(x(s)) ds \right)$. Or, par l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(x(s)) - \underbrace{f(0)}_{=0}| \leq \lambda|x(s)|$ d'où

$$e^{-kt}|x(t)| \leq |x(0)| + \varepsilon\lambda \int_0^t e^{-ks}|x(s)| ds$$

et on applique le lemme de Gronwall (résultat admis) à $\varphi(t) = e^{-kt}|x(t)|$, $\eta = |x(0)|$, $\zeta = \varepsilon\lambda$ d'où $e^{-kt}|x(t)| \leq |x(0)|e^{\varepsilon\lambda t}$ qui donne le résultat en multipliant par e^{kt} .

- (11) Comme $\varepsilon\lambda < 0$ alors $|x(0)|e^{(k+\varepsilon\lambda)t} \leq |x(0)| < 1$.

En posant $\mathcal{E} = \{t > 0 \mid |x(t)| > 1\}$ que l'on suppose non vide alors $\theta = \inf \mathcal{E} > 0$ (par continuité, comme $|x(0)| < 1$ il existe $\eta > 0$ tel que $|x(t)| < 1$ sur $[0, \eta]$ et donc $\theta \geq \eta > 0$). Or $\lim_{t \rightarrow \theta^-} |x(t)| \leq 1$ et $\lim_{t \rightarrow \theta^+} |x(t)| \geq 1$ donc $|x(\theta)| = 1$. Sur $[0, \theta]$ $|x(t)| \leq |x(0)|e^{(k+\varepsilon\lambda)t}$ et, par passage à la limite, $|x(\theta)| < 1$ ce qui est impossible.

Première conclusion : $\mathcal{E} = \emptyset$ et, si J est l'intervalle de définition de x alors $\forall t \in J \cap [0, +\infty[$, $|x(t)| \leq 1$.

Si J admet une borne supérieure $b \in \mathbb{R}$ alors x' est bornée au voisinage de b donc, par le critère de Cauchy, x admet une limite en b , il en est par conséquent de même pour x' . On sait alors que l'on peut prolonger x au delà de b ce qui contredit la maximalité de J .

Conclusion finale : $J \cap [0, +\infty[= [0, +\infty[$, x est définie sur $[0, +\infty[$ et la démonstration de la question 10 est valable pour tout $t \geq 0$ i.e.

$$\forall t \in [0, +\infty[, |x(t)| \leq |x(0)|e^{(k+\varepsilon\lambda)t}.$$