

Mines-Ponts, 2002
Mathématiques I, PC

Première partie.

I.1. Pour x non nul, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(n+1)^2} = 0$ donc la série converge par la règle de d'Alembert; F est définie sur $\mathbb{R}$. Le rayon de convergence est infini, on peut donc dériver terme à terme. $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{x^{2n-1}}{(n!)^2} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. $F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) \frac{x^{2n-2}}{(n!)^2} > 0$ donc F est convexe.

I.2. a. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$. Donc la suite (v_n) est croissante et $v_n \geq v_0 = 1$, d'où $\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}$. On en déduit pour $x \geq 0$: $F(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} = ch(2x)$.

b. $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$. Donc la suite (w_n) est décroissante et $w_n \leq w_0 = 1$, d'où $\frac{1}{(n!)^2} \geq \frac{4^n}{(2n+1)!}$. On en déduit pour $x > 0$: $F(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{sh(2x)}{2x}$.

c. $G(x) = \sqrt{ch(2x) \frac{sh(2x)}{2x}} = \sqrt{\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{8x}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{2x}} \sqrt{1 - e^{-8x}}$ d'où $G(x) \sim \frac{\Phi(x)}{2\sqrt{2}}$ au voisinage de $+\infty$.

Deuxième partie.

II.1. a. $I_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^A = \frac{1}{x}$ car $x > 0$. Supposons que I_{k-1} existe et intégrons par parties: $I_k(A) = \int_0^A t^k e^{-xt} dt = \left[t^k \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^A + \frac{k}{x} I_{k-1}(A)$. On en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$ que I_k existe et est égale à $\frac{k}{x} I_{k-1}$. Une récurrence simple donne $I_k = \frac{k!}{x^{k+1}}$.

b. La fonction est continue puisque F est continue sur $\mathbb{R}$; $0 \leq F(t)e^{-xt} \leq ch(2t)e^{-xt} \sim \frac{e^{(2-x)t}}{2}$ au voisinage de $+\infty$. Pour $x > 2$ cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le théorème de convergence monotone peut alors s'appliquer à la suite de fonctions $S_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ et on obtient:

$$L(F)(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} I_{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}.$$

c. Posons $g_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n} = \frac{4^n t^{2n}}{v_n}$; $\frac{g_{n+1}}{g_n} = 4t^2 \frac{v_n}{v_{n+1}}$ a pour limite $4t^2$ d'après le résultat du I.2.a. La règle de D'Alembert entraîne que la série $(\sum g_n)$ converge pour $4t^2 < 1$ et diverge pour $4t^2 > 1$; son rayon de convergence R est donc égal à $1/2$. Pour $|u| < 1$ on sait que $(1+u)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-1/2-n+1)}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} u^n$. En posant $u = -4t^2$ pour $|t| < 1/4$ on a bien $|u| < 1$ et on obtient $g(t) = (1 - 4t^2)^{-1/2}$.

d. $L(F)(x) = \frac{1}{x} g(1/x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ pour $x > 2$.

e. Soit $h : t \mapsto \Phi(t)e^{-xt}$; au voisinage de 0, on a $h(t) \sim \frac{1}{t^{1/2}}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$; d'autre part, si $x > 2$ et $t \geq 1$, $h(t) \leq e^{(2-x)t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$; h est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour $x \leq 2$: $h(t) \geq \frac{1}{t^{1/2}}$ qui n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Φ est donc définie sur $]2, +\infty[$. Par suite, $L(\Phi)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(2-x)t}}{\sqrt{t}} dt$. Effectuons le changement de variable défini par $u = \sqrt{(x-2)t}$: $L(\Phi)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2} \sqrt{x-2}}{u} \frac{2u du}{x-2} = \sqrt{\frac{\pi}{x-2}}$.

II.2 a. Si $x_0 \in I(f)$, pour $x > x_0$ et $t > 0$ on a $|f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-x_0 t}|$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc $x \in I(f)$.

b. $I(f)$ est supposé non vide et non égal à $\mathbb{R}$; il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \notin I(f)$; x_0 est alors un minorant de $I(f)$ car $x < x_0$ et $x \in I(f)$ entrainerait $x_0 \in I(f)$. $I(f)$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure $\alpha(f)$. Si $\alpha(f) \in I(f)$, $I(f) = [\alpha(f), +\infty[$ d'après le a. Sinon $I(f) =]\alpha(f), +\infty[$ car tout $x > \alpha(f)$ est dans $I(f)$ par définition de la borne inférieure et le a.

c. La fonction $(x, t) \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $]\alpha(f), +\infty[\times]0, +\infty[$; de plus pour $x \in [a, b] \subset]\alpha(f), +\infty[$ on a $|f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-at}|$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $L(f)$ est continue sur $]\alpha(f), +\infty[$. Pour f positive et pour $x < y$ on a $f(t)e^{-yt} \leq f(t)e^{-xt}$ d'où $L(f)(y) \leq L(f)(x)$. Si $\alpha(f) \in I(f)$ on a donc pour $x \in [\alpha(f), +\infty[$: $0 \leq L(f)(x) \leq L(f)(\alpha(f))$ donc $L(f)$ est bornée.

d. i) Par hypothèse $L(g)(x) \leq M$ pour $x \in]\alpha(g), +\infty[$; on en déduit avec g positive:

$$\int_0^A g(t)e^{-xt} dt \leq M.$$

ii) La fonction $(x, t) \mapsto g(t)e^{-xt}$ est continue sur $[\alpha(g), +\infty[\times]0, A[$; la fonction $t \mapsto g(t)e^{-\alpha(g)t}$ est intégrable sur $]0, A[$ car elle est continue et équivalente à $g(t)$ au voisinage de 0; de $0 \leq g(t)e^{-xt} \leq g(t)e^{-\alpha(g)t}$ on déduit alors que la fonction $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ est continue sur $[\alpha(g), +\infty[$ d'où par passage à la limite: $\int_0^A g(t)e^{-\alpha(g)t} dt \leq M$. Cette majoration étant valable pour tout A on en déduit que $L(g)$ est définie sur $[\alpha(g), +\infty[$.

II.3 a. Puisque $g(t) \sim h(t)$ au voisinage de $+\infty$, on a pour $t \geq t_0$: $g(t) \leq 2h(t)$. On en déduit $I(h) \subset I(g)$ (les 2 fonctions sont intégrables sur $]0, t_0]$). En échangeant g et h on a $I(g) = I(h)$ d'où $\alpha(g) = \alpha(h)$.

b. Si $\alpha(h) \notin I(h)$, $L(h)$ n'est pas bornée sur $]\alpha(h), +\infty[$; puisque $L(h)$ est décroissante on déduit: $\lim_{x \rightarrow \alpha(h)^+} L(h)(x) = +\infty$. Puisque g et h sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ on déduit $|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}h(t)$ pour $t \geq A$ ($h \geq 0$). Par suite: $|L(g)(x) - L(h)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |g(t) - h(t)|e^{-xt} dt \leq \int_0^A |g(t) - h(t)|e^{-xt} dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} h(t)e^{-xt} dt$. D'une part $\int_0^A |g(t) - h(t)|e^{-xt} dt \leq \int_0^A |g(t) - h(t)|e^{-\alpha(h)t} dt = C$. D'autre part $L(h)(x) > 0$ pour x assez proche de $\alpha(h)$. En divisant par $L(h)(x)$ on obtient: $\left| \frac{L(g)(x)}{L(h)(x)} - 1 \right| \leq \frac{C}{L(h)(x)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ pour $x \leq x_0$ (puisque $\lim_{x \rightarrow \alpha(h)^+} L(h)(x) = +\infty$). On a bien montré $L(g) \sim L(h)$ au voisinage de $\alpha(h)$.

II.4 De $L(F)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x - 2}}$ au voisinage de 2 et $L(\Phi)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x - 2}}$ on déduit $L(f) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Phi$; on peut conjecturer que cet équivalent est aussi valable au voisinage de $+\infty$.

Troisième partie.

III.1 a. La série de fonctions de terme général $k_n(t) = \frac{x^n}{n!}e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $|k_n(t)| = \frac{x^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente (de somme e^x). k_n étant continue, la fonction k est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. k_n étant 2π -périodique, la fonction k l'est aussi. Appliquons l'égalité de Parseval: $\int_0^{2\pi} |k(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(k)|^2$. Calculons les coefficients de Fourier de k en utilisant la convergence normale de la série:

$$c_p(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{int} e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt. \text{ Avec } \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 2\pi & \text{si } n = p \end{cases} \text{ on obtient } c_p(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \\ \frac{x^p}{p!} & \text{si } p \geq 0 \end{cases}. \text{ Par suite } J = 2\pi \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(p!)^2} = 2\pi F(x).$$

b. $k(t) = e^{xe^{it}}$ d'où $|k(t)|^2 = e^{2x \cos t}$.

c. $\int_0^{2\pi} e^{2x \cos t} dt = 2 \int_0^\pi e^{2x \cos t} dt$ par période 2π et parité, donc $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos t} dt$.

III.2 a. h_1 et h_3 ne posent pas de problème de définition; au voisinage de 1^- , $\frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t}} \sim \frac{e^x}{(1-t)^{1/2}}$ qui est intégrable sur $[0,1[$ donc h_2 est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b. $h_2(x) = \int_0^1 2e^{x(1-u^2)} du = \frac{2e^x}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-v^2} dv$ en posant $v = u\sqrt{x}$. Avec $\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ on obtient $h_2(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^x$ au voisinage de $+\infty$.

c. Le même changement de variable donne $h_3(x) = \int_0^1 2u^2 e^{x(1-u^2)} du = \frac{e^x}{x} \int_0^x \sqrt{\frac{v}{x}} e^{-v} dv$ en posant $v = xu^2$. Avec $\int_0^{+\infty} \sqrt{v} e^{-v} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ on obtient $h_3(x) \sim \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^x$ au voisinage de $+\infty$.

d. $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+u}}{\sqrt{2(1-u^2)}} = \frac{\sqrt{1-u}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1+u})\sqrt{2(1+u)}} \leq \frac{\sqrt{1-u}}{2+\sqrt{2}}$ d'où $C = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

e. Posons $u = \cos t$ dans $h_1(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \cos t} dt = \int_0^1 e^{xu} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$. On déduit du d : $\left| h_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2(x) \right| \leq C h_3(x)$. Puisque $h_3(x) \sim \frac{1}{2x} h_2(x) = o(h_2(x))$ au voisinage de $+\infty$ on obtient $h_1(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} h_2(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x$ au voisinage de $+\infty$.

III.3 $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos t} dt = \frac{1}{\pi} h_1(2x) + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi e^{2x \cos t} dt$. Dans cette dernière intégrale, $x \cos t \leq 0$ donc $0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi e^{2x \cos t} dt \leq \frac{1}{2}$; or $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(2x) = +\infty$ donc $F(x) \sim \frac{1}{\pi} h_1(2x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} e^{2x}$ au voisinage de $+\infty$.