

1. On décompose $f = f_1 + if_2$, et en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} f_1''(x) = \frac{xf_2'(x)}{2} - \frac{f_1(x)}{2}(\alpha(f_1(x)^2 + f_2(x)^2) + 1) \\ f_2''(x) = \frac{-xf_1'(x)}{2} - \frac{f_2(x)}{2}(\alpha(f_1(x)^2 + f_2(x)^2) + 1) \end{cases}$$

2. En combinant les égalités précédentes :

$$f_1'(x)f_1''(x) + f_2'(x)f_2''(x) = -\frac{1}{2}(f_1'(x)f_1(x) + f_2'(x)f_2(x))(\alpha(f_1(x)^2 + f_2(x)^2) + 1)$$

On reconnaît :

$$\frac{d}{dx}[|f'(x)|^2] = -\frac{1}{2}(\alpha|f(x)|^2 + 1)\frac{d}{dx}[|f(x)|^2]$$

Et en intégrant :

$$|f'(x)|^2 + \frac{(\alpha|f(x)|^2 + 1)^2}{4\alpha} = \text{Cte}$$

En évaluant pour $x = 0$:

$$|f'(x)|^2 + \frac{(\alpha|f(x)|^2 + 1)^2}{4\alpha} = \frac{1}{4\alpha}(\alpha + 1)^2$$

3. Comme $|f'(x)|^2 \geq 0$, on en déduit :

$$\frac{(\alpha|f(x)|^2 + 1)^2}{4\alpha} \leq \frac{1}{4\alpha}(\alpha + 1)^2$$

et après simplification : $|f(x)| \leq 1$.

De même,

$$|f'(x)|^2 \leq \frac{1}{4\alpha}(\alpha + 1)^2$$

donc $|f'(x)| \leq \frac{\alpha + 1}{2\sqrt{\alpha}}$.

4. (a) Après avoir constaté $\text{Im}(f'\bar{f}) = f_1f_2' - f_2f_1'$, puis $(f_1f_2' - f_2f_1')' = f_1f_2'' - f_2f_1''$, on obtient avec 1., pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt} \text{Im}(f_1\bar{f}_2)(t) = -\frac{t}{4} \frac{d}{dt} (|f(t)|^2)$$

En tenant compte de $f(0) = 0$, on fixe $x \in \mathbb{R}$ et on intègre sur $[0, x]$:

$$\text{Im}(f(x)\bar{f}(x)) = -\frac{x}{4}|f(x)|^2 + \frac{1}{4} \int_0^x |f(t)|^2 dt$$

(b) Pour tout $x > 0$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right) = \frac{-1}{x^2} \int_0^x |f(t)|^2 dt + \frac{|f(x)|^2}{x} = -\frac{4}{x^2} \text{Im}(f(x)\bar{f}(x))$$

d'après la question précédente.

(c) Notons ici $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 dt$. Comme f et f' sont bornées (3.), on déduit de 4.b. que

$\varphi'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc, comme φ' est continue sur, mettons, $[1, +\infty[$, elle est

intégrable sur cet intervalle ; en particulier $\varphi(x) - \varphi(1) = \int_1^x \varphi'(t) dt$ admet une limite finie

en $+\infty$. On en déduit qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 dt \rightarrow \ell$. On a nécessairement $\ell \geq 0$ (limite d'une fonction positive).

(d) Fixons $x > 0$ et $M = \sup 4|\operatorname{Im}(f'\bar{f})|$. Pour tout $t \geq x$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{M}{t^2}$ donc φ' est intégrable et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \ell$:

$$|\varphi(x) - \ell| = \left| \int_x^{+\infty} \varphi'(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{M}{t^2} dt = \frac{M}{x}$$

(e) D'après 4.a :

$$|f(x)|^2 - \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 dt = \frac{4\operatorname{Im}(f'(x)\overline{f(x)})}{x}$$

donc :

$$\left| |f(x)|^2 - \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right| \leq \frac{M}{x}$$

En posant $M_0 = 2M$, il vient par inégalité triangulaire :

$$||f(x)|^2 - \ell| \leq \frac{M_0}{x}$$

pour tout $x > 0$.

5. (a) D'après 2., pour tout $x > 0$:

$$|f'(x)|^2 = \frac{1}{4\alpha} [(1+\alpha)^2 - (\alpha|f(x)|^2 + 1)^2] = \frac{1}{4\alpha} \alpha(1 - |f(x)|^2)(\alpha|f(x)|^2 + \alpha + 2) \leq M_0 \frac{1+\alpha}{2x}$$

ce qui fournit $|f'(x)| \leq \frac{K_0}{\sqrt{x}}$ pour une certaine constante K_0 .

On reprend la fonction φ définie au 4c. L'égalité 4b et la majoration précédente donnent $|\varphi'(x)| \leq \frac{K_1}{x^{5/2}}$ pour une certaine constante K_1 . La fonction φ' est donc intégrable au voisinage de $+\infty$. Fixons $x > 0$; comme φ tend vers 1 en $+\infty$ par 4d., il vient :

$$|1 - \varphi(x)| \leq \int_x^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{K_1}{t^{5/2}} dt = \frac{K_2}{x^{3/2}}$$

où $K_2 = 2K_1/3$. On a donc démontré :

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 dt - \ell \right| \leq \frac{K_2}{x^{3/2}}$$

En reprenant le même argument qu'au 4e, avec la nouvelle majoration de $|f'(x)|$, il vient :

$$\left| |f(x)|^2 - \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right| \leq \frac{4K_0}{x^{3/2}}$$

En posant $M_1 = K_2 + 4K_0$, on obtient enfin :

$$||f(x)|^2 - \ell| \leq \frac{M_1}{x^{3/2}}$$

pour tout $x > 0$.

(b) La majoration du 4.e montre que $|f(x)|$ tend vers ℓ en $+\infty$. Comme $|f(x)| \leq 1$ (3.), on en déduit $\ell \leq 1$.

Supposons $\ell = 1$. La fonction $x \mapsto |f(x)|^2 - 1$ est continue sur \mathbb{R} et la majoration du 5.a :

$||f(x)|^2 - 1| \leq \frac{M_0}{x^{3/2}}$ montre qu'elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que $\int_0^x |f(t)|^2 dt - x$ tend vers une limite finie L quand x tend vers $+\infty$.

Comme $|f(x)| \rightarrow 1$ en $+\infty$, l'égalité 2. montre $|f'(x)| \rightarrow 0$.

On a donc $\text{Im}(f'(x)\overline{f(x)}) = o(1)$ et, avec l'égalité 4a :

$$x|f(x)|^2 = \int_0^x |f(t)|^2 dt + o(1) = x + L + o(1).$$

Si $L \neq 0$, alors $|f(x)|^2 - 1 \sim L/x$ n'est pas intégrable en $+\infty$, ce qui est contradictoire, donc $L = 0$.

Or $x \mapsto x - \int_0^x |f(t)|^2 dt = \int_0^x (1 - |f(t)|^2) dt$ est croissante et positive (car $1 - |f(t)|^2 \geq 0$), donc tend vers 0 si et seulement si elle est identiquement nulle, ce qui montre (par continuité de $t \mapsto |f(t)|^2 - 1$ que $|f(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$). Mais alors $|f'|$, donc f' est indumentiquement nulle sur \mathbb{R}_+ (égalité 2.), donc f est constante, égale à $f(0) = 1$ et en remplaçant dans l'équation (E_α) , il vient $\alpha + 1 = 0$, ce qui est contradictoire.

Comme $\ell = 1$ est exclu, on en déduit $\ell < 1$.

6. $|f|$ tend vers $\sqrt{\ell}$ en $+\infty$. Si elle était périodique, elle serait constante et $1 = |f(0)| = \sqrt{\ell}$, ce qui contredit 5.b.
7. (a) Si $\Psi_\alpha(t, \cdot)$ est périodique, alors $|\Psi_\alpha(t, \cdot)|$ l'est également, et donc $|f|$, ce qui contredit 6.
- (b) Après calculs :

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \left(f'(x) + \frac{ix}{2} f(x) \right) \exp\left(\frac{ix^2}{4}\right) \\ f''_\alpha(x) &= \left(f''(x) + ix f'(x) + (i/2 - x^2/4) f(x) \right) \exp\left(\frac{ix^2}{4}\right) \\ |f_\alpha(x)| &= |f(x)| \end{aligned}$$

- (c) f est C^2 sur \mathbb{R} donc f_α est C^2 sur \mathbb{R} . Par composition de fonctions C^k , (la fonction $\sqrt{\cdot}$ étant C^∞ sur \mathbb{R}_+^*), $\Psi_\alpha(t, \cdot)$ est C^2 sur \mathbb{R} pour tout $t > 0$, et $\Psi_\alpha(\cdot, x)$ est C^1 sur \mathbb{R}_+^* (en fait C^2) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (d) Après calculs :

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial^2 x}(t, x) + \frac{1}{2} \Psi_\alpha(t, x) \left(\alpha |\Psi_\alpha(t, x)|^2 + \frac{1}{t} \right) \\ &= \left(f''(x/\sqrt{t}) + \frac{ix}{2\sqrt{t}} f'(x/\sqrt{t}) + \frac{f(x/\sqrt{t})}{2} (\alpha |f(x/\sqrt{t})|^2 + 1) \right) \frac{e^{ix^2/4}}{t^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

car on reconnaît l'équation (E_α) dans laquelle on substitue x/\sqrt{t} à x .

8. (a) Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $|a_k e^{-ik^2 t + ikx}| = |a_k| = o(1/k^2)$, (car $\sum k^2 a_k$ converge, donc $k^2 a_k \rightarrow 0$) donc la série est absolument convergente (critère de Riemann).
- (b) On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on pose $f_k(t) = a_k e^{-ik^2 t + ikx}$. La série $\sum f_k$ converge simplement d'après 8a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'_k(t) = -ik^2 a_k e^{-ik^2 t + ikx}$. On en déduit $\|f'_k\|_\infty = k^2 |a_k|$. Or $\sum k^2 |a_k|$ converge, donc la série $\sum f'_k$ converge normalement, donc uniformément sur \mathbb{R} . D'après le théorème de dérivation terme à terme, $\Phi_0(\cdot, x)$ est C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} -ik^2 a_k e^{-ik^2 t + ikx}$$

De même, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on pose $g_k(x) = a_k e^{-ik^2 t + ikx}$. On constate que g_k est C^2 sur \mathbb{R} , et on exprime $g'_k(x) = ik a_k e^{-ik^2 t + ikx}$ et $g''_k(x) = -k^2 a_k e^{-ik^2 t + ikx}$. En particulier, $\|g'_k\|_\infty = k |a_k|$ et $\|g''_k\|_\infty = k^2 |a_k|$, de sorte que les séries $\sum g_k$ et $\sum g'_k$ convergent simplement (en fait, normalement) et la série $\sum g''_k$ converge normalement, donc uniformément sur \mathbb{R} . Ainsi, $\Phi_0(t, \cdot)$ est C^2 sur \mathbb{R} et :

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial^2 x}(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} -k^2 a_k e^{-ik^2 t + ikx}$$

En particulier, on constate : $i \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial^2 x}(t, x) = 0$.

(c) Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $\Phi_0(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-ik^2 t + ikx}$ avec $a_k = c_k e^{ik^2}$, de sorte que Φ_0 vérifie les propriétés établies au 8b. et $\Phi_0(1, x) = f_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On cherche alors Ψ_0 sous la forme $\Psi_0(t, x) = \varphi(t)\Phi_0(t, x)$ où φ est une fonction C^1 telle que $\varphi(1) = 1$. Il est clair qu'on aura bien : $\Psi_0(t, \cdot)$ périodique et $\Psi_0(1, \cdot) = f_0$.

Par substitution dans l'équation différentielle, on aboutit à la CNS : $(i\varphi'(t) + \frac{1}{2t}\varphi(t))\Psi_0(t, x) = 0$.

Il suffit donc de choisir φ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \frac{-i}{2t}y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

donc $\varphi(t) = \exp\left(\frac{-i}{2}\ln(t)\right)$. Finalement :

$$\Psi_0(t, x) = \exp\left(\frac{-i}{2}\ln(t)\right) \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-ik^2(t-1)+ikx}$$

9. Notons $M^k(i, j)$ le terme d'indice (i, j) de M^k . Comme $M^{k+1}(i, j) = \sum_{s=1}^3 M^k(i, s)M(s, j)$, on en déduit $\|M^{k+1}\|_\infty \leq 3\|M\|_\infty\|M^k\|_\infty$. Par récurrence, on démontre alors : $\|M^k\|_\infty \leq \|M\|_\infty^k = |m|^k$.

En particulier, $\left| \frac{t^k M^k(i, j)}{k!} \right| \leq \frac{|tm|^k}{k!}$. Par comparaison au terme général d'une série convergente (série exponentielle), la série $\sum \frac{t^k M^k(i, j)}{k!}$ est absolument convergente, ce qui montre que la suite de matrices $F_n(t)$ converge (coefficient par coefficient).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{2k} = I_3$ si $k = 0$ et, si $k \neq 0$:

$$M^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k m^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k m^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$M^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} m^{2k+1} & 0 \\ (-1)^k m^{2k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$F(t) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} m^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} m^{2k+1}}{(2k+1)!} & 0 \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} m^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} m^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(mt) & -\sin(mt) & 0 \\ \sin(mt) & \cos(mt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(\theta)$$

avec $\theta = mt$.

10. $(F(t)X|Y) = {}^t X {}^t F(t)Y = {}^t X F(-t)Y = (X|F(-t)Y)$.

$F(t)$ est une matrice de rotation et le produit vectoriel est invariant par rotation (ou par changement de base orthonormale directe), donc $F(t)(X \wedge Y) = F(t)X \wedge F(t)Y$.

11. Les coefficients de $F(t)$ définissent des fonctions C^∞ de t , on dérive :

$$F'(t) = \begin{pmatrix} -m \sin(mt) & -m \cos(mt) & 0 \\ m \cos(mt) & -m \sin(mt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F(t)M = MF(t)$$

12. $(MX|X) = {}^t X^t M X = -{}^t X M X = -(X|M X)$ donc $(MX|X) = 0$. $X \mapsto (I + M)X$ peut s'exprimer : $X \mapsto X + \Omega \wedge X$ avec $\Omega = (0, 0, m)$.

13. Si $((I_3 + M)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors elle converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Si $m = 0$, alors $M = 0$ et la suite converge car elle est constante. Si $m \neq 0$, $I_3 + M$ admet les 3 valeurs propres distinctes $1, 1 + im, 1 - im$. $I_3 + M$ est donc diagonalisable et semblable à $\Delta = \text{diag}(1, 1 + im, 1 - im)$. Si $(I_3 + M)^n$ converge, alors également Δ^n et en particulier $(1 + im)^n$, ce qui est absurde car $|1 + im| = \sqrt{1 + m^2} > 1$.

Conclusion : $(I_3 + M)^n$ converge ssi $m = 0$.

14. Posons $u(x) = \|T(x)\|^2 = (T(x)|T(x))$. Alors u est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2(T(x)|T'(x)) = 2(G'(x)|G''(x)) = 0$ (car $G''(x) \perp G'(x)$, par propriété du produit vectoriel). On en déduit que u est constante sur \mathbb{R} et comme $u(0) = 1, \|T(x)\| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

15. En appliquant la formule du double produit vectoriel :

$$2G'(x) \wedge G''(x) = \|G'(x)\|^2 (I_3 + M)G(x) - [(I_3 + M)G(x) \cdot G'(x)]G'(x)$$

Posons $v(x) = (I_3 + M)G(x) \cdot G'(x)$. La fonction v est au moins de classe C^1 sur \mathbb{R} et $v'(x) = [(I_3 + M)G'(x)] \cdot G'(x) = (G'(x) + MG'(x)) \cdot G'(x) = \|G'(x)\|^2 = 1$ car $MG'(x) \perp G'(x)$ d'après 12. Comme $v'(0) = 0$, on intègre : $(I_3 + M)G(x) \cdot G'(x) = \int_0^x v'(t) dt = x$. On a bien :

$$2G'(x) \wedge G''(x) = (I_3 + M)G(x) - xG'(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

16. Par application des théorèmes généraux, $G(., x)$ est C^1 sur \mathbb{R}_+^* pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $G(t, .)$ est C^2 sur \mathbb{R} pour tout $t > 0$.

On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln t}{2}\right) \left[G(x/\sqrt{t}) + MG(x/\sqrt{t}) - \frac{x}{\sqrt{t}} G'(x/\sqrt{t}) \right] \\ \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(t, x) &= F\left(\frac{\ln t}{2}\right) G'(x/\sqrt{t}) \\ \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln t}{2}\right) G''(x/\sqrt{t}) \end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide de 10. :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(t, x) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \left(F\left(\frac{\ln t}{2}\right) G'(x/\sqrt{t}) F\left(\frac{\ln t}{2}\right) G''(x/\sqrt{t}) \right) \\ &= F\left(\frac{\ln t}{2}\right) \left[G(x/\sqrt{t}) + MG(x/\sqrt{t}) - \frac{x}{\sqrt{t}} G'(x/\sqrt{t}) \right] = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(t, x) \end{aligned}$$

17. D'après 14., $\|G'(x)\| = 1$ donc $|G'_1(x)| \leq 1$. Par inégalité des accroissements finis, $|G_1(x)| = |G_1(x) - G_1(0)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

18. Soit $k \geq 2$ tel que G soit C^k sur \mathbb{R} . G' est donc C^{k-1} donc $G'' = \frac{1}{2}(G \wedge G')$ est C^{k-1} , et donc G est C^{k+1} sur \mathbb{R} . On en déduit par récurrence que G est C^∞ sur \mathbb{R} .

19. T est donc également C^∞ et $T'' = \frac{1}{2}(G \wedge G'') = \frac{1}{4}(G \wedge (G \wedge G'))$. Avec la formule du double produit vectoriel :

$$T'' = \frac{1}{4}(G \cdot G')G - \frac{1}{4}\|G\|^2 G'$$

donc $T'' \perp T' = \frac{1}{2}G \wedge G'$, et donc $T' \cdot T'' = 0$. On en déduit que $\|T''\|^2$ (donc également $\|T'\|$) est constante, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\|T'(x)\| = \|T'(0)\| = \lambda$.

20. (a) D'après 15., $b(x) = \frac{1}{\lambda}G'(x) \wedge G''(x) = \frac{1}{2\lambda}(G(x) - xG'(x))$. En dérivant, on obtient $b'(x) = -\frac{x}{2\lambda}G''(x) = -\frac{x}{2}n(x)$.

(b) (T, n, b) est une base orthonormale directe, donc $n = b \wedge T$, $n \wedge b = T$ (et $T \wedge n = b$). On simplifie :

$$\begin{aligned} n'(x) &= b(x) \wedge T'(x) + b'(x) \wedge T(x) \\ &= b(x) \wedge (\lambda n(x)) - \frac{x}{2}n(x) \wedge T(x) \\ &= -\lambda T(x) + \frac{x}{2}b(x) \end{aligned}$$

(c) On a établi :

$$\begin{aligned} G'(x) &= T(x) \\ G''(x) &= \lambda n(x) \\ G'''(x) &= -\lambda^2 T(x) + \frac{\lambda x}{2}b(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$G'''(x) + (\lambda^2 + \frac{x^2}{4})G'(x) - \frac{x}{4}G(x) = \frac{\lambda x}{2}b(x) + \frac{x^2}{4}G'(x) - \frac{x}{4}G(x) = 0$$

car $\lambda b(x) = \frac{1}{2}G(x) - \frac{x}{2}G'(x)$ (établi au 20a).

21. (a) Les systèmes différentiels d'ordre > 1 ne sont pas au programme en PSI. Ce qu'on peut attendre d'un étudiant de cette filière, c'est qu'il sache transformer l'équation différentielle scalaire vérifiée par les composantes de G , c'est-à-dire :

$$y''' + (\lambda^2 + \frac{x^2}{4})y' - \frac{x}{4}y = 0$$

en le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ X_2' = X_3 \\ X_3' = \frac{x}{4}X_1 - (\lambda^2 + \frac{x^2}{4})X_2 \end{cases}$$

dont la matrice est

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{4} & -(\lambda^2 + \frac{x^2}{4}) & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut espérer que les étudiants qui auront corrigé $Y \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ en $Y \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et auront répondu $n = 3$ et $A = A_0$ ne seront pas pénalisés.

On attendait probablement $n = 9$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 \\ \frac{x}{4}I_3 & -(\lambda^2 + \frac{x^2}{4})I_3 & 0_3 \end{pmatrix}$$

de sorte que Y est solution de l'équation différentielle ssi (Y, Y', Y'') est solution du système $X' = AX$.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $H(x) = (-G_1(-x), G_2(-x), G_3(-x))$. On vérifie $H(0) = G(0)$, $H'(0) = G'(0)$, $H''(0) = G''(0) = (0, \lambda, 0)$. D'autre part :

$$\frac{1}{2}H(x) \wedge H'(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -G_1(-x) \\ G_2(-x) \\ G_3(-x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} G'_1(-x) \\ -G'_2(-x) \\ -G'_3(-x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -G''_1(-x) \\ G''_2(-x) \\ G''_3(-x) \end{pmatrix} = H''(x)$$

Ainsi, H vérifie également l'équation vectorielle du 20c.

Pour tout $i = 1, 2, 3$, les fonctions vectorielles (G_i, G'_i, G''_i) et (H_i, H'_i, H''_i) sont solutions du système différentiel $X' = AX$, avec les mêmes conditions initiales. D'après le théorème de Cauchy linéaire, $H_i = G_i$ pour tout i , donc $H = G$, ce qui justifie les égalités demandées.

- (c) D'après 20., $G(x) = xG'(x) + 2G'(x) \wedge G''(x) = xT(x) + 2\lambda b(x)$, donc $\|G(x)\|^2 = x^2 + 4\lambda^2$ (base orthonormale).

- (d) Soient $x \neq y$ tels que $G(x) = G(y)$. D'après 21d., $x^2 + 4\lambda^2 = y^2 + 4\lambda^2$ donc $x = -y$ (et donc $x \neq 0$). Or G_1 est impaire, donc $G_1(x) = -G_1(x) = 0$.

Par contraposée, si G_1 ne s'annule pas, alors G est injective.

22. (a) Posons $y = G'_1$. G_1 est solution de l'équation 21a, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y''(x) + \lambda^2 y(x) = \frac{x}{4}(G_1(x) - xG'_1(x))$.

On a $y(0) = G'_1(0) = 0$ et $y'(0) = G''_1(0) = 0$, donc (indication donnée) :

$$G'_1(x) = \cos(\lambda x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \frac{s}{4}(G_1(s) - sG'_1(s)) \sin(\lambda(x-s)) ds$$

On a vu $|G_1(s)| \leq |s|$ (17.) et $|G'_1(s)| \leq \|G'(s)\| = 1$ donc $|G_1(s) - sG'_1(s)| \leq 2|s|$. Comme $|\sin(\lambda(x-s))| \leq 1$, on majore :

$$|G'_1(x) - \cos(\lambda x)| \leq \frac{1}{\lambda} \int_J \frac{s^2}{2} ds = \frac{|x|^3}{6\lambda}$$

avec $J = [0, x]$ si $x \geq 0$ ou $[x, 0]$ sinon (l'énoncé semble oublier le cas $x < 0$).

- (b) Soit $x > 0$. On a $G_1(x) = \int_0^x G'_1(t) dt$ et

$$\left| \int_0^x G'_1(t) dt - \int_0^x \cos(\lambda t) dt \right| \leq \int_0^x |G'_1(t) - \cos(\lambda t)| dt \leq \int_0^x \frac{t^3}{6\lambda} dt$$

On en déduit :

$$\left| G_1(x) - \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \right| \leq \frac{1}{24\lambda} x^4$$

En particulier,

$$G_1\left(\frac{3\pi}{2\lambda}\right) \leq -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{24\lambda} \left(\frac{3\pi}{2\lambda}\right)^4 < 0$$

pour λ assez grand, et :

$$G_1\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{24\lambda} \left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^4 > 0$$

pour λ assez grand.

On peut donc trouver $\lambda_0 > 0$ tel que, pour $\lambda \geq \lambda_0$, $G_1(\frac{3\pi}{2\lambda}) < 0$ et $G_1(\frac{\pi}{2\lambda}) > 0$. Comme G_1 est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que G_1 s'annule en un certain $x_0 \neq 0$.

23. D'après 20., on a $k_G = \lambda$, $\tau_G = \frac{x}{2}$, et donc $\Psi(t, x) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right)$.

On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) &= \frac{-\lambda}{2t^{3/2}} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \frac{ix^2}{4t^2} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, x) &= \frac{\lambda ix}{2t\sqrt{t}} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right) \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\lambda i}{2t^{3/2}} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right) - \frac{\lambda}{4t^2\sqrt{t}} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right)\end{aligned}$$

On constate $i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, x) = 0$. Comme $|\Psi(t, x)|^2 = \lambda^2/t$, il suffit de trouver α tel que $\alpha \frac{\lambda^2}{t} + \frac{1}{t} = 0$, donc $\alpha = \frac{-1}{\lambda^2}$ convient.