

PRÉLIMINAIRES

P1a - P est la matrice de passage de \mathcal{B}_0 (pour X) à \mathcal{B} (pour U) donc $X = PU$.

P1b - u, v, x, y vérifient l'égalité vectorielle $u\vec{i} + v\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$ soit $2u\vec{i} + v\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$$(\vec{i}, \vec{j}) \text{ est libre donc : } \begin{cases} 2u = x \\ v = y \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} u = x/2 \\ v = y \end{cases}.$$

Ce que l'on vérifie par la relation précédente avec $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

P2 - Si la base \mathcal{B} est orthonormale alors γ d'équation $u^2 + v^2 = 1$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

P3a - $Q_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (obtenu par calculatrice par exemple).

P3b - Par simple produit matriciel on obtient $16A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 13 \end{bmatrix} = B$.

Le polynôme caractéristique de B est $P(\lambda) = \lambda^2 - 17\lambda + 16 = (\lambda - 1)(\lambda - 16)$. Les valeurs propres de B sont donc 1 et 16.

Le noyau de $B - I$ est l'espace propre associé à la valeur propre 1, il est engendré par la colonne $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Une deuxième colonne propre s'en déduit par orthogonalité (B est symétrique réelle) soit $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. vecteur propre associé à la valeur propre 16.

Ainsi après normalisation des vecteurs propres on trouve $R_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $D_0 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$.

P4 - La forme quadratique $q(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2$ se réduit dans une base orthonormée en $\lambda X^2 + \mu Y^2$ avec λ et μ valeurs propres de la matrice symétrique $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$; donc $\lambda\mu = ab - c^2$ et l'on peut supposer $\lambda \leq \mu$.

Si $ab - c^2 > 0$ alors λ et μ sont non nuls et de même signe donc $q(x, y) = 1$ est l'équation d'une ellipse pour $0 < \lambda < \mu$, d'un cercle pour $0 < \lambda = \mu$, de l'ensemble vide si $\lambda \leq \mu < 0$.

PARTIE I

- I.1-** $(u', v') = (u, -v)$
- I.2-** L'équation $u^2 + v^2 = 1$ est invariante en changeant v en $-v$ donc $s(\gamma^+)$ est la partie de γ telle que $v \leq 0$.
D'où $s(\gamma^+) = \gamma^-$.
Clairement γ est la réunion de γ^+ et de γ^- donc $\gamma = \gamma^+ \cup s(\gamma^+)$.
- I.3-** De $u^2 + v^2 = 1$ on déduit $u^2 \leq 1$ donc $u \in [-1, 1]$.
- I.4-** Il suffit d'exprimer v en fonction de u . On obtient ainsi $\varphi(u) = \sqrt{1 - u^2}$ pour $u \in [-1, 1]$.
- I.5-** On peut paramétrer γ^+ par $u \mapsto u\vec{i} + \varphi(u)\vec{j} = (2u + 3\varphi(u))\vec{i} + 2\varphi(u)\vec{j}$ pour tracer γ^+ puis construire $s(\gamma^+)$ et obtenir ainsi toute la courbe.
Remarque : la paramétrisation $\gamma : t \mapsto \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$ semble mieux adaptée.
- I.6-** De la relation $X = PU$ on déduit $U = QX$ en notant $Q = P^{-1}$.
On obtient alors successivement $u^2 + v^2 = {}^tUU = {}^t(QX)QX = {}^tX{}^tQQX = {}^tXAX$.
 P est la matrice P_0 de la question P.3 donc $A = A_0$ ce qui permet de conclure :
une équation de γ est $\frac{1}{16}(4x^2 - 12xy + 13y^2) = 1$.
- I.7-** La réduction de A_0 en P.3 permet d'obtenir, dans la base orthonormale associée à la matrice R_0 , l'équation réduite de γ sous la forme $\frac{1}{16}x'^2 + y'^2 = 1$.
C'est l'équation réduite d'une ellipse de demi grand axe $a = 4$ dirigé par $2\vec{i} + \vec{j}$, de demi petit axe $b = 1$ dirigé par $-\vec{i} + 2\vec{j}$ et d'excentricité $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ soit $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

PARTIE II

- II.1-** Déjà traitée en I.6
- II.2-** Déjà traitée en I.6
- II.3-** ${}^tA = {}^t({}^tQQ) = {}^tQ{}^t({}^tQ) = {}^tQQ = A$ donc A est symétrique.
En vertu du théorème spectral, A est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale R .
 R est aussi la matrice de changement de base de \mathcal{B}_0 vers \mathcal{B}' , base orthonormale comme \mathcal{B}_0 .
Dans cette nouvelle base, l'équation de γ est $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$.
- II.4-** $\|QX\|^2 = {}^t(QX)QX = {}^tX{}^tQQX = {}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$
Puisque X est non nul (vecteur propre), $\lambda = \frac{\|QX\|^2}{\|X\|^2}$ ce qui prouve que λ est positif.
- II.5-** Q est inversible (d'inverse P) donc $A = {}^tQQ$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
 0 n'est donc pas valeur propre de A .
Etant positives, les valeurs propres de A sont strictement positives.
- II.6-** Dans la base orthonormale \mathcal{B}' , l'équation de γ est $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$ avec $\lambda_i > 0$.
Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors γ est un cercle ; sinon c'est une ellipse dont les axes sont dirigés par les vecteurs de base qui sont vecteurs propres de A .

PARTIE III

III.1- Puisque f a pour matrice P relativement à \mathcal{B}_0 on a $f(\vec{v}) = \vec{I}$ et $f(\vec{j}) = \vec{J}$ donc par linéarité de f :
 $f(\vec{m}) = x\vec{I} + y\vec{J}$ d'où $(x, y) = (u', v')$.

III.2- $f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{m}) \mid \vec{m} \in \gamma\} = \{x\vec{I} + y\vec{J} \mid x^2 + y^2 = 1\} = \gamma$.

III.3- D est tangente à \mathcal{C} en \vec{a} donc $f(D)$ est tangente à $f(\mathcal{C})$ en $f(\vec{a})$. Or dans \mathcal{B} , $f(D)$ a pour équation $u = 1$ et $f(\vec{a})$ a pour coordonnées $(1, 0)$. Ainsi la droite d'équation $u = 1$ est tangente à γ en $(u, v) = (1, 0)$.

De même, la droite d'équation $u = -1$ est tangente à γ en $(u, v) = (-1, 0)$,

$v = -1$ en $(u, v) = (0, -1)$

$v = 1$ en $(u, v) = (0, 1)$.

Remarque : ce résultat s'obtient directement par la paramétrisation de $\gamma : t \mapsto \cos t \vec{I} + \sin t \vec{J}$.

III.4- Dans la base orthonormale \mathcal{B}_0 , les vecteurs $\overrightarrow{AB_\lambda}$ et $\overrightarrow{CD_\lambda}$ ont pour coordonnées $(-\lambda, 1)$ et $(1, \lambda)$.

Leur produit scalaire est nul donc les droites $D_{1,\lambda}$ et $D_{2,\lambda}$ sont orthogonales.

Elles sont donc sécantes en un point m_λ et le triangle $Am_\lambda C$ est rectangle en m_λ .

Or $[AC]$ est un diamètre du cercle \mathcal{C} . par conséquent m_λ appartient à \mathcal{C} .

$$n_\lambda = f(D_{1,\lambda} \cap D_{2,\lambda}) = f(D_{1,\lambda}) \cap f(D_{2,\lambda})$$

n_λ est donc intersection des droites définies dans \mathcal{B} par les points $A'(1, 0)B'(1 - \lambda, 1), C'(-1, 0)D'(0, \lambda)$.

III.5-

III.6- Si K est le parallélogramme défini par deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} alors en notant Det le déterminant relativement à une base orthonormale quelconque, on a $\mathcal{A}(K) = |Det(\vec{u}, \vec{v})|$.

$f(K)$ est encore un parallélogramme, défini par $f(\vec{u}), f(\vec{v})$ donc

$$\mathcal{A}(f(K)) = |Det(f(\vec{u}), f(\vec{v}))| = |\det(f) Det(\vec{u}, \vec{v})| = |\det f| \mathcal{A}(K)$$

L'aire délimitée par le cercle \mathcal{C} est π donc l'aire délimitée par γ est égale à $\pi |\det f|$.

Remarque : on retrouve le résultat connu sur l'aire d'une ellipse soit πab où a et b sont les demi axes puisque
 $(ab)^2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{(\det Q)^2} = (\det P)^2 = (\det f)^2$