

# Corrigé de l'épreuve math II (Mines-ponts 2008)

Par A. NAIMI Professeur dau Lycée Technique Mohammedia - Maroc

1. Supposons  $f$  radiale. Si on pose pour tout  $r \geq 0, F(r) = f(r, 0)$ , alors  $F$  est  $C^1$  par composition de fonctions  $C^1$ , d'autre part si  $f$  est nulle en dehors d'une boule  $B(0, M)$ , alors  $F$  est nulle en dehors du segment  $[-M, M]$ , donc  $F \in C_K^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ .

Soit maintenant  $x \in \mathbb{R}^2$  non nul et  $Rot_\theta$  la rotation qui transforme  $x$  en  $(r, 0)$  où  $r = \|x\|$ , alors  $f(x) = f(Rot_\theta(r, 0))$  et comme  $f$  est supposée radiale alors  $f(Rot_\theta(r, 0)) = f(r, 0)$ , donc  $f(x) = F(\|x\|)$  et cette dernière égalité est encore vérifiée pour  $x = 0$ .

2. Si  $y = (y_1, y_2)$  et  $\varphi$  un réel alors  $Rot_\varphi(y) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi \\ y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi \end{pmatrix}$  et donc  $T_{f,x} : (y, \varphi) \mapsto f(x_1 + y_1 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi, x_2 + y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi)$  qui est composé d'applications continues, donc continue. et si  $y \in \mathbb{R}^2$ , l'application  $\varphi \mapsto T_{f,x}(y, \varphi) = f(x_1 + y_1 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi, x_2 + y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi)$  est  $2\pi$ -périodique par périodicité des fonctions sin et cos.

3. Soient  $\theta \in [0, 2\pi[, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{f,x} \circ Rot_\theta)(y) &= \mathcal{T}_{f,x}(Rot_\theta(y)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{f,x}(Rot_\theta(y), \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + Rot_\varphi(Rot_\theta(y))) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + Rot_{\varphi+\theta}(y)) d\varphi \end{aligned}$$

mais en effectuant le changement de variable  $\Psi = \varphi + \theta$ , cette dernière intégrale vaut  $\frac{1}{2\pi} \int_\theta^{\theta+2\pi} f(x + Rot_\Psi(y)) d\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_\theta^{\theta+2\pi} T_{f,x}(y, \Psi) d\Psi$  et compte tenu de la périodicité de la fonction  $\Psi \mapsto T_{f,x}(y, \Psi)$ ,

$\frac{1}{2\pi} \int_\theta^{\theta+2\pi} T_{f,x}(y, \Psi) d\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{f,x}(y, \Psi) d\Psi$ , On conclut alors que  $(\mathcal{T}_{f,x} \circ Rot_\theta)(y) = \mathcal{T}_{f,x}(y)$ , et ceci pour tout  $y$ , donc  $\mathcal{T}_{f,x} \circ Rot_\theta = \mathcal{T}_{f,x}$  et ceci pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ , d'où  $\mathcal{T}_{f,x}$  est radiale

4. Soit  $t$  un réel, alors

$$\begin{aligned} x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta) &= \|x\| \cdot u_\Psi + p.Rot_\varphi(Rot_\theta(e_1)) + t.Rot_\varphi(Rot_\theta(e_2)) \\ &= \|x\| \cdot Rot_\Psi(e_1) + p.Rot_{\varphi+\theta}(e_1) + t.Rot_{\varphi+\theta}(e_2) \\ &= \|x\| \cdot Rot_{\varphi+\theta}(Rot_{\Psi-\varphi-\theta}(e_1)) + p.Rot_{\varphi+\theta}(e_1) + t.Rot_{\varphi+\theta}(e_2) \\ &= \|x\| \cdot Rot_{\varphi+\theta}(\cos(\Psi - \varphi - \theta).e_1 + \sin(\Psi - \varphi - \theta).e_2) \\ &\quad + p.Rot_{\varphi+\theta}(e_1) + t.Rot_{\varphi+\theta}(e_2) \\ &= \|x\| \cos(\Psi - \varphi - \theta).u_{\varphi+\theta} + \|x\| \sin(\Psi - \varphi - \theta).v_{\varphi+\theta} + pu_{\varphi+\theta} + t.v_{\varphi+\theta} \\ &= (\|x\| \cos(\Psi - \varphi - \theta) + p).u_{\varphi+\theta} + (\|x\| \sin(\Psi - \varphi - \theta) + t).v_{\varphi+\theta} \end{aligned}$$

et donc quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ ,  $t + \|x\| \cdot \sin(\Psi - \varphi - \theta)$  décrit  $\mathbb{R}$  et par suite  $D_{x,\varphi}$  est la droite de paramètre le couple  $(\|x\| \cos(\Psi - \varphi - \theta) + p, \varphi + \theta)$ .

5. Puisque l'application  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  alors par composition et multiplication la fonction réelle qu'on notera  $h$  définie sur  $\mathbb{R} \times [0, R]$  par  $h(x_1, r) = r.f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta)$  est continue ainsi que  $\frac{\partial h}{\partial x_1}$  et

$$\forall (x_1, r) \in \mathbb{R} \times [0, R], \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, r) = r. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta),$$

donc d'après le théorème de dérivabilité sous signe intégrale la fonction  $V_1$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x_1 \in \mathbb{R}, (V_1)'(x_1) = \int_0^R r. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r dr$ , de même la fonction  $V_2$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, (V_2)'(x_2) = \int_0^R r. \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r dr.$$

Montrons que la fonction  $W_1$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , en effet si on note  $g$  la fonction réelle définie sur  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ , par  $g(x_1, \theta) = \int_0^R r.f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r dr$ , alors par continuité de la fonction réelle définie sur  $(\mathbb{R} \times [0, 2\pi]) \times [0, R]$  par  $((x_1, \theta), r) \rightarrow r.f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta)$  et d'après le théorème de continuité sous signe intégrale cette fonction  $g$  est continue, d'autre part puisque la fonction  $V_1$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\frac{\partial g}{\partial x_1}$  existe et continue et

$$\forall (x_1, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi], \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \theta) = V_1'(x_1) = \int_0^R r. \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r dr,$$

donc toujours d'après le théorème de dérivabilité sous signe intégrale la fonction  $W_1$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, W_1'(x_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r dr d\theta;$$

de même la fonction  $W_2$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, W_2'(x_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r dr d\theta.$$

6. Par le changement de variable en coordonnées polaires, il vient  $\int \int_{B(x,R)} (\frac{\partial Q}{\partial x_1}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(u,v)) du dv = \int \int_{B(x,R)} (\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x+r.u_\theta) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(x+r.u_\theta)) r dr d\theta$ , et par la formule de Green-Riemann on a

$$\int \int_{B(x,R)} (\frac{\partial Q}{\partial x_1}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(u,v)) du dv = \int_\Gamma P(u,v) du + Q(u,v) dv$$

où  $\Gamma$  est le chemin orienté représenté par  $\gamma$  définie sur  $[0, 2\pi]$  par  $\gamma(t) = x + R.u_\theta$ , or ce dernier intégrale curviligne vaut  $\int_0^{2\pi} [P(x + R.u_\theta)(-R \sin \theta) + Q(x + R.u_\theta).(R \cos \theta)] d\theta$  et par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} P(x + R.u_\theta)(-R \sin \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} Q(x + R.u_\theta).(R \cos \theta) d\theta$$

d'où l'égalité demandée.

7. Soit  $(x, R) \in Q_A$ , et soit  $M > 0$ , tel que  $\text{supp } f \subset B(0, M)$  et notons  $J = B(x, M + 2 \|x\|)$  et  $K = B(x, M + \|x\|)$ , alors d'une part  $\int \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int \int_J f(y_1, y_2) dy_1 dy_2$  et d'autre part on a l'égalité  $\int \int_J f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int \int_J f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) \cdot |J_\varphi(z_1, z_2)| dz_1 dz_2$  grâce au changement de variable  $\varphi$  définie de  $K$  dans  $J$  par  $\varphi(z_1, z_2) = x + (z_1, z_2)$ , mais pour tout  $(z_1, z_2)$ ,  $|J_\varphi(z_1, z_2)| = 1$ , d'où  $\int \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int \int_J f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) dz_1 dz_2$  et comme la fonction  $(z_1, z_2) \rightarrow f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  à support compact et nulle en dehors de  $K$ , alors  $\int \int_J f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) dz_1 dz_2 = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) dz_1 dz_2$ , finalement on a l'égalité

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) dz_1 dz_2$$

.Passons à l'autre égalité.

Puisque  $f$  est supposé à support compact alors il existe  $\rho > 0$  qu'on peut prendre aussi grand que l'on veut, par exemple  $\rho R$ , tel que  $\text{supp } f \subset B(x, \rho)$ , donc  $\int \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int \int_{B(x,\rho)} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2$  et par passage en coordonnées

$$\int \int_{B(x,\rho)} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int_0^\rho g(r) r dr \text{ où } g(r) = \int_0^{2\pi} f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) d\theta,$$

mais puisque  $f$  vérifie les hypothèses du lemme, alors  $g(r) = 0$  pour tout  $r > \|x\| + A$ , donc  $\int_0^\rho g(r) r dr = \int_0^R g(r) r dr$ . On déduit alors que

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int_0^R g(r) r dr = \int_0^R (\int_0^{2\pi} f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) d\theta) r dr$$

mais par FUBINI

$$\int_0^R (\int_0^{2\pi} f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) d\theta) r dr = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) \cdot r dr d\theta$$

d'où l'égalité

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r dr d\theta.$$

8. Soit  $x = (x_1, x_2) \in \overset{0}{B}(0, R)$ , alors  $(x, R) \in Q_A$  et donc d'après la question précédente  $W_i(x_i) = \int \int_{\mathbb{R}^2} f$  qui est constante indépendante de  $x_i$ , en particulier  $W_1'(x_1) = 0$ , donc  $\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta).rdrd\theta = 0$ , mais par application du 7 à  $Q = f$  et  $P = 0$ , il vient

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta).rdrd\theta = \int_0^{2\pi} f(x + R.u_\theta).R \cos \theta d\theta$$

et compte tenu du fait que  $R \neq 0$ ,  $\int_0^{2\pi} f(x + R.u_\theta). \cos \theta d\theta = 0$ , et en utilisant le fait que  $W_2$  est constante, on montre de la même manière  $\int_0^{2\pi} f(x + R.u_\theta) \sin \theta d\theta = 0$ .

9. Si  $i \in \{1, 2\}$  alors  $y_i.f$  est produit de deux fonctions  $C^1$  donc elle-même est  $C^1$  et comme  $f$  est à support compact alors il existe  $M > 0$  telle que  $f$  est nulle en dehors de  $B(0, M)$  donc la fonction  $y_i.f$  aussi, ceci montre que cette fonction est à support compact.

D'autre part si  $A$  est un réel strictement positif et si  $(x, R) \in Q_A$ , alors :

$$\int_0^{2\pi} (y_1.f)(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).d\theta = \int_0^{2\pi} (x_1 + R \cos \theta).f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).d\theta$$

et par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} (x_1 + R \cos \theta).f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).d\theta = x_1 \cdot \int_0^{2\pi} f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).d\theta + R \int_0^{2\pi} \cos \theta.f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).d\theta$$

Le premier terme de cette dernière expression est nul puisque  $f$  vérifie les hypothèses du lemme et le deuxième est nul d'après la question précédente. On conclue alors que  $\int_0^{2\pi} (y_1.f)(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).d\theta = 0$  et que la fonction  $y_1.f$  vérifie les hypothèses du lemme. De même on montre que la fonction  $y_2.f$  vérifie les hypothèses du lemme.

10. Puisque  $f$  vérifie les hypothèses du lemme, alors l'égalité est vérifiée si  $k + l = 0$ . et pour tout  $(x, R) \in Q_A$ . Soit maintenant  $n$  un entier naturel et supposons l'égalité vérifiée pour tout  $k, l$ , tels que  $k + l = n$ , et pour tout  $(x, R) \in Q_A$ .

et soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , tel que  $p + q = n + 1$  alors l'un des entiers naturels  $p$  ou  $q$  est non nul, supposons par exemple  $p \geq 1$ , alors  $(p - 1) + q = n$  et donc par hypothèse de récurrence  $\forall (x, R) \in Q_A, \int_0^{2\pi} f(x + R.u_\theta).(\cos \theta)^{p-1}(\sin \theta)^q d\theta = 0$ . ou encore

$$\forall (x, R) \in Q_A, \int_0^{2\pi} g(x + R.u_\theta).d\theta = 0. \text{ où } g(y_1, y_2) = f(y_1, y_2).(\frac{y_1 - x_1}{R})^{p-1}.(\frac{y_2 - x_2}{R})^q$$

et on vérifie facilement que cette fonction est  $C^1$  à support compact : elle vérifie donc les hypothèses du lemme, donc d'après le 9 la fonction  $y_1.g$  vérifie les hypothèses du lemme :

$$\forall (x, R) \in Q_A, \int_0^{2\pi} (x_1 + R \cos \theta).f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).(\cos \theta)^{p-1}.(\sin \theta)^q d\theta = 0,$$

d'où par linéarité de l'intégrale et compte tenu de l'hypothèse  $\forall (x, R) \in Q_A, \int_0^{2\pi} f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta).(\cos \theta)^p.(\sin \theta)^q d\theta = 0$ , le résultat est donc vraie pour  $n + 1$ , donc vraie pour tout  $n$

11. L'égalité est vérifiée pour  $n = 0$  et si  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k (\sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k}$  et en partageant cette somme en la somme des termes d'indices pair et impair il vient

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (-1)^k (\sin \theta)^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} + i \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} C_n^k (-1)^k (\sin \theta)^{2k+1} (\cos \theta)^{n-2k-1}$$

$$\text{donc } \cos n\theta = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (-1)^k (\sin \theta)^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} \text{ et}$$

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} C_n^k (-1)^k (\sin \theta)^{2k+1} (\cos \theta)^{n-2k-1}$$

et donc par linéarité de l'intégrale et compte tenu de la question précédente

$$\int_0^{2\pi} f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta). \cos(n\theta) d\theta = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta). (\sin n\theta) d\theta = 0.$$

- 12 et 13. Soit  $(x, R) \in Q_A$  et notons  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(\theta) = f(x + R.u_\theta)$ . Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$  périodique donc d'après le théorème de *Weistrass*, elle est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions polynômes trigonométriques de la forme  $P_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$ , or d'après le 11  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\int_0^{2\pi} f(x + R.u_\theta) \cdot e^{ik\theta} \cdot d\theta = 0$ . donc par linéarité de l'intégrale  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{2\pi} f(x + R.u_\theta) \cdot P_n(\theta) \cdot d\theta = 0$  ou encore  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{2\pi} g(\theta) \cdot P_n(\theta) \cdot d\theta = 0$  (\*) et comme  $g$  est continue sur le compact  $[0, 2\pi]$  alors elle y'est bornée et donc la suite de fonctions  $g \cdot P_n$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$  vers la fonction  $g^2$  et donc par passage à la limite dans (\*), il vient  $\int_0^{2\pi} g^2(\theta) \cdot d\theta = 0$  et la fonction  $g^2$  étant positive continue sur le segment  $[0, 2\pi]$ , donc nulle sur ce segment donc  $g$  aussi, on a donc  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ ,  $g(\theta) = f(x + R.u_\theta) = 0$  et ceci pour tout  $(x, R) \in Q_A$  donc  $f$  est nulle en dehors de  $B(0, A)$ . En effet soit  $y \notin B(0, A)$  donc  $\|y\| > A$ , alors il existe  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $y = \|y\| \cdot u_\theta$ , donc  $f(y) = f(x + R.u_\theta)$  avec  $x = 0$ ,  $R = \|y\|$  et  $(x, R) \in Q_A$  donc  $f(y) = 0$ . ceci répond aussi à la question 13.
- Remarquer qu'on peut obtenir directement le résultat de la question 12 en utilisant la formule de Parcevall

14. Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $p \geq 0$  alors

$$\widehat{f}(\theta, p) = \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(p.u_\theta + t.v_\theta) dt = \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} F(\|p.u_\theta + t.v_\theta\|) dt = \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} F(\sqrt{p^2 + t^2}) dt$$

et cette dernière expression ne depend pas de  $\theta$  donc  $\widehat{f}(\theta, p) = \widehat{f}(0, p) = \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} F(\sqrt{p^2 + t^2}) dt$  mais cette dernière intégrale vaut  $2 \int_0^{+\infty} F(\sqrt{p^2 + t^2}) dt$  puisque la fonction qui est sous l'intégrale est pair, d'où les égalités demandées.

15. Soit  $v > 0$ , alors d'après ce qui précède  $\widehat{f}(0, \sqrt{v}) = 2 \int_0^{+\infty} F(\sqrt{v + t^2}) dt$  et par le changement de variable  $v + t^2 = u$  cette dernière intégrale vaut  $\int_v^{+\infty} F(\sqrt{u}) \cdot (u - v)^{-\frac{1}{2}} du$ .
16. Si  $\sqrt{v} > A$  alors par yhypothèse  $\widehat{f}(0, \sqrt{v}) = 0$ , et donc par la question précédente  $\int_v^{+\infty} F(\sqrt{u}) \cdot (u - v)^{-\frac{1}{2}} du = 0$ , et donc compte tenue des notations d'analyses  $\forall v > A^2$   $Lh(v) = 0$  où  $h(u) = F(\sqrt{u})$  qui est aussi à support compact, donc  $\forall v > A^2$   $(L(Lh))'(v) = 0$  mais (résultat admis par l'enoncé)  $(L(Lh))' = -\pi h$ , donc  $\forall v > A^2$   $h(v) = 0$  donc  $F$  est nulle sur  $]A, +\infty[$ , donc  $f$  est nulle en dehors de  $B(0, A)$ , ceci montre donc le théorème dans le cas particulier où  $f$  est radiale.
17. Soit  $(\theta, p) \in [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}^+$  et  $x \in \mathbb{R}^2$   
Puisque  $f$  est supposée à support compact alors elle est nulle en dehors d'une boule  $B(0, M)$  (avec  $M$  un réel strictement positif)  
D'autre part pour tout  $\varphi$  et tout  $t$ , l'inégalité triangulaire donne

$$\|x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)\| \geq \|Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)\| - \|x\|$$

mais une rotation conserve la norme donc

$$\|Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)\| = \|p.u_\theta + t.v_\theta\| = \sqrt{p^2 + t^2}$$

donc  $\|x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)\| \geq \sqrt{p^2 + t^2} - \|x\|$  et pour avoir  $\|x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)\| > M$  il suffit donc d'avoir  $\sqrt{p^2 + t^2} - \|x\| > M$  et cette condition est réalisée pour tout  $t$  si  $(M + \|x\|)^2 - p^2 < 0$  et pour  $|t| > \sqrt{(M + \|x\|)^2 - p^2}$  si  $(M + \|x\|)^2 - p^2 \geq 0$ , donc dans tous les cas la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)) d\varphi$  est nulle en dehors d'un segment ell est donc à support compact et donc son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à son intégrale sur un segment  $[-m, m]$  et par continuité de la fonction qui à  $(t, \varphi)$  associe  $f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta))$  sur  $[-m, m] \times [0, 2\pi]$  on déduie par le théorème de FUBBINI

$$\int_{-m}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)) d\varphi dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-m}^m f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)) dt d\varphi$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)) d\varphi dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)) dt d\varphi$$

d'où l'égalité demandée.

18. Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $p > \|x\|$  alors d'après la question précédente

$$\widehat{\mathcal{T}}_{f,x}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta)) dt d\varphi$$

mais vu les calculs fait de la question 4 :

$$x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta) = p'.u_{\varphi+\theta} + t'.v_{\varphi+\theta} \quad \text{où } p' = \|x\| \cos(\Psi - \varphi - \theta) + p \text{ et } t' = \|x\| \sin(\Psi - \varphi - \theta) + t$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta))dt = \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(p'.u_{\varphi+\theta} + t'.v_{\varphi+\theta})dt$$

et en effectuant le changement de variable  $t' = \|x\| \sin(\Psi - \varphi - \theta) + t$  ce dernier intégrale devient

$$\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(p'.u_{\varphi+\theta} + t'.v_{\varphi+\theta})dt' = \widehat{f}(\varphi + \theta, p')$$

or  $p' = \|x\| \cos(\Psi - \varphi - \theta) + p$  et par hypothèse  $p \rangle A + \|x\|$  donc  $p' \rangle A$  et puisque  $f$  verifie les hypothèses du théorème alors  $\widehat{f}(\varphi + \theta, p') = 0$  donc  $\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(p'.u_{\varphi+\theta} + t'.v_{\varphi+\theta})dt' = 0$  ou encore  $\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta))dt = 0$  et ceci pour tout  $\varphi$  donc

$$\widehat{\mathcal{T}}_{f,x}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta))dtd\varphi = 0.$$

19. C'est le cercle de centre  $x$  et de rayon  $\|y\|$ .
20. D'après le 3 la fonction  $\mathcal{T}_{f,x}$  est radiale et de plus d'après le 18 elle verifie les hypothèses du théorème (pour  $A + \|x\|$ ) donc d'après le 16 :  $\mathcal{T}_{f,x}(y) = 0$  pour  $\|y\| \rangle A + \|x\|$  ou encore  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + Rot_\theta(y))d\theta = 0$  pour  $\|y\| \rangle A + \|x\|$ , en particulier si  $(x, R) \in Q_A$  alors  $R \rangle \|x\| + A$  donc  $\|R.e_1\| \rangle A + \|x\|$  donc  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + Rot_\theta(R.e_1))d\theta = 0$  ou encore  $\int_0^{2\pi} f(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta)d\theta = 0$  donc la fonction  $f$  verifie les hypothèses du lemme et par suite  $f$  est nulle en dehors de  $B(0, A)$ . D'où le théorème.