Ccinp.m1.mp.2020 Corrigé Ait lhouari Assou

1 PARTIE I-développement ternaire

Etude de l'application σ

Q1 On a l^∞ est une partie non vide de l'ensemble des suites réelles bornées car elle contient la suite nulle et vérifie : pour tout u et v dans l^∞ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a : $u+\lambda v$ est bornée en effet $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $|u_n+\lambda v_n| \leq ||u||+|\lambda|||v||$. donc l^∞ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;donc un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
L'application $u \mapsto ||u||$ est une norme surl^∞ en effet :

- pout tout u dans l^∞ si $||u|| = 0$ alors $\max |u_n| = 0$ donc $u_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc u =0.
- $\forall u \in l^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $||\lambda u|| = \max |\lambda u_n)| = |\lambda| \max |u_n| = |\lambda|||u||$.
- Pour tout u et v dans l^∞ on a : $\forall n \in \mathbb{N}|u_n + v_n|| \leq ||u|| + ||v||$ donc $||u + v|| = max|u_n + v_n| \leq ||u|| + ||v||$ inégalité triangulaire. Donc $||.||$ est une norme sur l^∞.

.

Q2 Soit $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ un élément de l^∞ alors u est bornée donc $\exists M \geq 0$ tel que $||u|| \leq M$. donc pour tout n dans $\mathbb{N}$:$|\dfrac{u_n}{3^n}| \leq \dfrac{M}{3^n}$ or la série de terme générale $\dfrac{M}{3^n}$ converge donc la série de terme générale $\dfrac{u_n}{3^n}$ est absolument convergente donc convergente..

Q3 D'après Q3 σ est bien définie.Soient $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}^*$ et $v = (v_n)_n \in \mathbb{N}^*$ deux éléments de l^∞ et $\alpha \in \mathbb{R}$; alors : $\sigma(\alpha u + v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha u_n + v_n}{3^n} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{V_n}{3^n} = \alpha\sigma(u) + \sigma(v)$. donc σ est une forme linéaire sur l^∞ de plus on a :$|\sigma(u)| \leq ||u|| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \dfrac{1}{2}||u||$.Donc σ est continue (continuité des application linéaires).

Q4 Soit $t = (t_n) \in T$ alors $\sigma(t) \geq 0$ et $||u|| \leq 2$.
donc d'après Q3 $\sigma(u) \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 1.\sigma(u) \leq 1$.finalement $\sigma(t)$ est dans l'intervalle$[0, 1]$.

Q5 Soient $\tau et \tau'$ deux éléments de T comme dans l'énoncé alors : $\sigma(\tau) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$ $.\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}$ on a $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$ et $\tau \neq (\tau')$ donc σ n'est pas injective. **Développement ternaire propre**.

Q6 on a : $\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leq 3^{n-1}x < \lfloor 3^{n-1}x + 1$ donc $3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leq 3^n x < 3\lfloor 3^{n-1}x + 3$ donc $3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leq \lfloor 3^n x \rfloor et \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leq 2$. Donc $0 \leq \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leq 2$. Donc $t(x) \in T$.

Q7 On a : $x_{n+1} - x_n = \frac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3\lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}} \geq 0$ d'après Q6. et $y_{n+1} - y_n = \frac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3\lfloor 3^n x \rfloor - 2}{3^{n+1}} \leq 0$ d'après Q6. Donc (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante de plus $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ tend vers 0. c/c $(x_n) et (y_n)$ sont adjacentes or : $x_n \leq x \leq y_n$ donc $(x_n) et (y_n)$ convergent vers la même limite x ; de plus : $\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k(x)}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor 3^k x \rfloor}{3^k} - \frac{\lfloor 3^{k-1}x \rfloor}{3^{k-1}} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \lfloor x \rfloor = x_n$ (car x est dans $[0, 1]$ donc sa partie entière est nulle). d'ou en passant à la limite on aura : $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t_n(x))}{3^n}$. D'après Q6 T est bien définie et d'après ci-dessus T est surjective.

Q8
```
def floteVersTern(n,x):
    T=[]
    for k in range(1,n+1):
        T.append(int(3**k *x-3*int(3**(k-1)*x)
    return T
```

Q9 Calcul de la somme :

```
def ternVersFlot(l):
    x=0
    for k in range(lent(l)):
        x+=l[k]/3**(k+1)
    return x
```

Q10 Test.

```
def ajout(l):
    s=0
    for k in l:
        s+=k
    if s%2==0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(-2)
    return l
```

2 PARTI II-Etude d'une fonction défini par une série

Etude de l'application φ

Q11 on a : les applications $u_n(x) = \frac{1+\sin(nx)}{3^n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :$|\frac{1+\sin(nx)}{3^n}| \leq \frac{2}{3^n}$ et la série de terme général $\frac{2}{3^n}$ converge donc la série de terme général $u_n(x)$ converge de plus $|u_n'(x)| = |\frac{n\cos(nx)}{3^n}| \leq \frac{n}{3^n}$ et $\frac{n}{3^n} = O(\frac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, donc la série de terme général u_n' converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de dérivation sous le signe somme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q12 on a d 'après les opérations sur les séries convergentes :
$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Im(e^{inx}}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + Im(\frac{e^{ix}}{3}\frac{1}{1-\frac{eix}{3}})$
$=\frac{1}{2} + Im(\frac{e^{ix}}{3-e^{ix}}$. Donc $\varphi(x) = \frac{1}{2} + Im(\frac{3\cos(x)+3i\sin(x)-1}{10-6\cos(x)})$. Donc $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)})$.

Q13 D'une part on a φ et de classe C^1 et d autre part on peut dériver sous le signe somme ce qui donne :
$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$.
donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{30\cos(x)-36\cos^2(x)+18}{(10-6\cos(x))^2}$.

Q14 On a :
$\frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)} = \frac{1}{3}(\varphi(x) - \frac{1}{2})$.
$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$. la convergence étant normale donc uniforme de la série de fonction donc on peut intégrer terme à terme et on aura :
$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{-\cos(nx}{n3^n}]_0^{\pi}$.
d'ou le résultat :$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx = sum\_n = 1^{+\infty}\frac{1}{n3^{n+1}}((-1)^{n-1} + 1)$.
Calculons la somme de la série on a : $sum\_n = 1^{+\infty}\frac{1}{n3^{n+1}}((-1)^{n-1} + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1^{n+1}}{n3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}$.
$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{-1}{3}} x^{n-1}dx + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{3}} x^{n-1}dx = \frac{1}{3}(\ln(1+\frac{1}{3}) + \ln(1-\frac{1}{3})$.
donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx = \frac{1}{3}(\ln(1+\frac{1}{3} + \ln(1-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\ln(2)$.(la série converge uniformément sur $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ donc on peut permuter l'intégral et la somme) Remarque : on a : $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ sur $]-1, 1[$ alors pour $x = \frac{1}{3} respectivement \frac{-1}{3}$ on aura le résultat voulu .

Q15 on a : $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx = \frac{1}{6}[\ln(10-6\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\ln(2)$ (une primitive de

$\frac{u'}{u} est \ln|u|)$.

3 Large PARTIE III-Développement ternaires aléatoir

Q16 On a X_n est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble des valeurs est fini donc elle admet une espérance et une variance et on a :
$E(X_N) = E(\sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}$.
$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n} E(T_{n,n})$.
$= (2 - \frac{3}{N}) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n}$
$= \frac{1}{2}(2 - \frac{3}{N})(1 - \frac{1}{3^N})$.
(car $E(T_{n,N} = 0\frac{1}{N} + 1\frac{1}{N} + 2(1 - \frac{1}{N}) = 2 - \frac{3}{N}, et \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^N})$ et $V(X_N) = \sum_{n=1}^{N} V(\frac{T_{n,N}}{3^n}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^2 n} V(Tn, N)$ (car les $T_{n,N}$ donc les $\frac{T_{n,N}}{3^n}$ sont mutuellement indépendantes) or $V(T_{n,N} = E(T_{Nn,}^2) - (E(T_{n,N})^2 = 0^2\frac{1}{N} + 1^2\frac{1}{N} + 2^2(1 - \frac{1}{N}) - (2 - \frac{3}{N})^2$.
Donc : $V(X_N) = \frac{1}{8}(\frac{5}{N} - \frac{9}{N^2})(1 - \frac{1}{3^2 N})$.

Q17 D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebycheve on a : $\mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X_N)}{\epsilon^2}$or on a :

$$\lim_{N \to +\infty} V(X_N) = 0$$

Donc

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \epsilon) = 0$$

(limite de suite et encadrement)

Q18 Soit$\epsilon > 0$, puisque $|E(X_N) - 1|$ est constant alors $|E(X_N) - 1| \geq \frac{\epsilon}{2}$ ou bien $|E(X_N) - 1| < \frac{\epsilon}{2}$.
Si $|E(X_N) - 1| \geq \frac{\epsilon}{2}$ alors : $\mathbb{P}(|E(X_N) - 1| \geq \frac{\epsilon}{2} = 1$ donc :
$\mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \epsilon) \leq 1 \leq \mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{P}(|E(X_N) - 1| \geq \frac{\epsilon}{2})$.
Si $|E(X_N) - 1| < \frac{\epsilon}{2}$ alors :
$\mathbb{P}(|E(X_N) - 1| \geq \frac{\epsilon}{2}) = 0$. Et on a $|X_n - 1| \leq |X_N - E(X_N)| + |E(X_N) - 1| \leq |X_N - E(X_N)| + \frac{\epsilon}{2}$donc :
Si $|X_N - 1| \geq \epsilon$ alors :$|X_N - E(X_N)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ .Donc :
$\mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{P}(|E(X_N) - 1| \geq \frac{\epsilon}{2})$.
On a : $E(X_N) \to 0$ lorsque $N \to +\infty$ donc à partir d'un certain rang$|E(X_N) - 1| < \frac{\epsilon}{2})$ donc :
$\mathbb{P}(|E(X_N) - 1| \geq \frac{\epsilon}{2}) = 0$ et d'après Q17 $\mathbb{P}(|X_N - E(X_N)| \geq \frac{\epsilon}{2})$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$,donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \epsilon) = 0$$

.

Q19 On a :

$$\forall x \in [0,1], f_0(x) = x$$

Alors on déduit que :

$\{\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] :\ f_1(x) = \frac{3}{2}x. \forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[:\ f_1(x) = \frac{1}{2}. \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] :\ f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

puis que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{9}\right] : f_2(x) = \frac{9}{4}x.$$

$$\forall x \in \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[: f_2(x) = \frac{1}{4}.$$

$$\forall x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] : f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}.$$

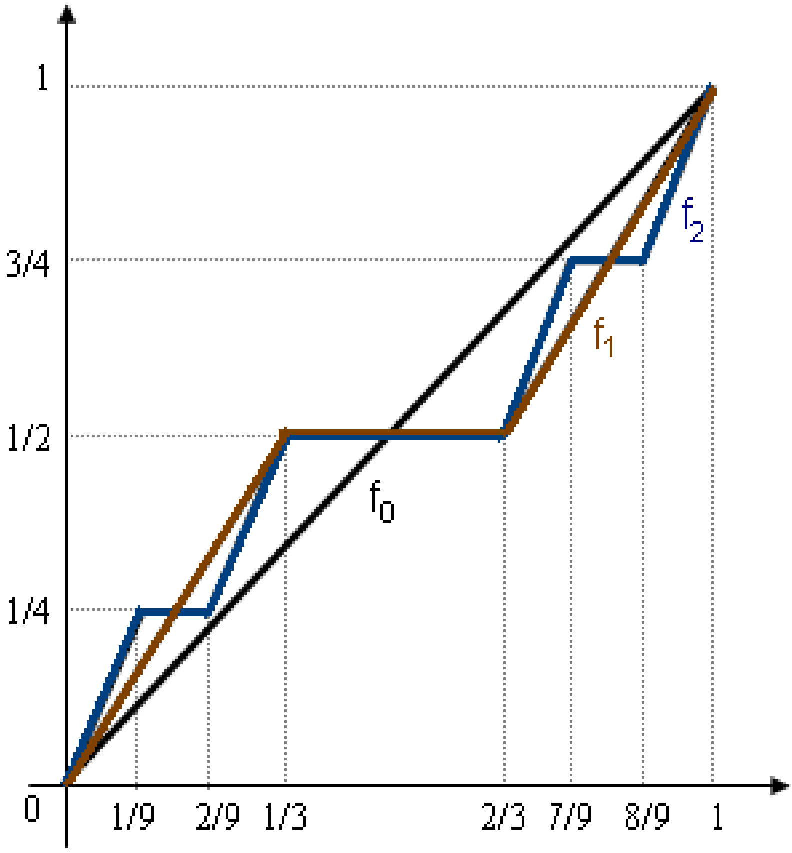
$$\forall x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[: f_2(x) = \frac{1}{2}.$$

$$\forall x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] : f_2(x) = \frac{9}{4}x - 1.$$

$$\forall x \in \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[: f_2(x) = \frac{3}{4}.$$

$$\forall x \in \left[\frac{8}{9}, 1\right[: f_2(x) = \frac{9}{4}x - \frac{5}{4}$$

On en déduit les graphiques respectifs de f_0, f_1 et f_2 .



Montrons par récurrence sur n que f_n est à valeurs dans $[0,1]$. pour n=0 on $f_0(x) = x \in [0,1]$ pour tout $x \in [0,1]$ Supposons pour n entier f_n prend ses valeurs dans $[0,1]$ et soit $x \in [0,1]$ on Si x est dans $[0, \frac{1}{3}]$ alors : $f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)}{2} \in [0,1]$ Si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ alors $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \in [0,1]$. Si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ alors $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3*x-2)}{2} \in [[0,1]$. donc f_{n+1} prend ses valeurs dans $[0,1]$. ce qui achève la démonstration.

Q20 Daprès la définition de f_n) :

```
def cantor(n,x):
if n==0:
    return x
if x=< 1/3:
    return cantor(n-1,3*x)/2
if 2 >=2/3:
    return cantor(n-1,3*x-2)/2+ 1/2
else:
    return 1/2
```

Q21 Montrons l'inégalité par récurrence sur n. pour n=0 $\forall x \in [0, \frac{1}{3}]$on a : $|f_1(x) - f_(x)| = |\frac{3}{2}x - x| = \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{3*2^1}$.
$\forall x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ on a : $|f_1(x) - f_0(x)| = |\frac{1}{2} - x| \leq \frac{1}{3*2^1}$
$\forall x \in [\frac{2}{3}, 1]$ on a :
$|f_1(x) - f_0(x)| = |\frac{1}{2} + \frac{3*x-2}{2} - x| = \frac{3}{2}|x - 1| \leq \frac{1}{3*2^1}$.
Donc l'inégalité est vraie pour 0.

Supposons l 'inégalité vraie pour un entier n ;et soit $x \in [0, \frac{1}{3}]$ on a : $|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3*2^{n+1}} = \frac{1}{3*2^{n+2}}$ De même pour x dans $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ou dans $[\frac{2}{3}, 1]$ .Donc l'inégalité est vraie pour tout n dans IN.

Q22 D'après Q21 la série de fonctions : $\sum_{n=0}^{+\infty}(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est normalement convergente donc absolument convergente donc convergente sur $[0, 1]$ donc la suite de fonctions (f_n) converge sur $[0, 1]$;soit f sa limite.
Montrons que la convergence est uniforme : Soient n et m dans $\mathbb{N}$ tels que $n < m$ pour tout x dans $[0, 1]$ on a :
$|f_m(x) - f_n(x)| = |\sum_{k=n}^{m-1}(f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{3*2^{k+1}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{3*2^{n+1}} = \frac{1}{3*2^n}$. Donc en faisons tendre m vers $+\infty$ on aura : pour tout x dans $[0, 1]$; $|f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{3*2^n}|$ qui tend vers 0 lorsque n tend ers $+\infty$. Dons la suite $f_n)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Q23 On a : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$: $0 \leq f_n(x) \leq 1$ par passage à la limite :$0 \leq f(x) \leq 1$ ie que f est à valeur dans $[0, 1]$. on a les f_n sont croissantes sur $[0, 1]$ donc leur limite f est croissante sur $[0, 1]$. on montre par récurrence que $f_n(0) = 0$ pour tout n ,donc $f(0) = 0$ et que $f_n(1) = 1$ donc f(1)=1 les f_n sont continues et la convergence est uniforme sur $[0, 1]$ donc f est continue Donc $f([0,]) = [0, 1]$ et f est surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Fin