Concours communs polytechniques 2004-Math2

Corrigé par M.TAIBI Lycée Moulay Youssef RABAT

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\| = n \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$

Préliminaires :

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = (m_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$, on a :
   $MX = Y \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i\,j} x_j$, donc :
   $\|MX\|_\infty = \|Y\|_\infty = \max\limits_i |y_i| \leqslant \|X\|_\infty \left(\sum_{j=1}^n \max\limits_{i,j} |m_{i\,j}|\right) = n\,\|M\|\,\|X\|_\infty$.
   D'où :
   $$\|MX\|_\infty = n\,\|M\|\,\|X\|_\infty$$

2. $\mathcal{M}$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $d \geqslant 1$. $\beta = (B_1, ..., B_d)$ une base de $\mathcal{M}$.

   (a) $N(M) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|$ où $M = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k B_k$, définit une norme sur M en effet :
   - Si $N(M) = 0$, alors $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, donc $M = 0$
   - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}$, on a : $N(\lambda M) = |\lambda| \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k| = |\lambda|\, N(M)$
   - Pour M et $M' = \sum\limits_{k=1}^{d} x'_k B_k$ dans $\mathcal{M}$, on a :
     $N(M + M') = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k + x'_k| \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k| + \max\limits_{1\leqslant k\leqslant d} |x'_k| = N(M) + N(M')$

   (b) On note encore $\|.\|$ restriction de la norme $\|.\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ (c'est aussi une norme). L'espace $\mathcal{M}$ est de dimension finie, donc toutes les normes sur $\mathcal{M}$ sont équivalentes. D'où l'existence de $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :
   $$\forall M \in \mathcal{M}, a\,\|M\| \leqslant N(M) \leqslant b\,\|M\|$$

   (c) Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $M_p = \sum\limits_{k=1}^{d} x_p(k) B_k$, ona :
   $$\begin{aligned} (M_p)_p \text{ converge vers 0 dans } (\mathcal{M}, \|.\|) &\Leftrightarrow \|M_p\| \underset{p\to+\infty}{\to} 0 \\ &\Leftrightarrow N(M_p) \underset{p\to+\infty}{\to} 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, d]\!],\ |x_p(k)| \underset{p\to+\infty}{\to} 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, d]\!],\ (x_p(k))_p \text{ converge dans } \mathbb{R} \text{ vesr } 0 \end{aligned}$$

Partie I : Une relation d'équivalence sur C_I^∞

3. $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in I$, $f \in C_I^\infty$ tels que : $f^{(k)}(\lambda) = 0$ pour tout $k \in \{1, ..\ell-\}$

   (a) La formule de Taylor appliquée à f sur $[\lambda, x]$ pour ut $x \in I$, donne :
   $$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell} f^{(k)}(\lambda)}_{=0} + \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)du = \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)du.$$

   (b) Dans l'intégrale précèdente, on fait le changement de variable : $u = t(\lambda - x) + x$, alors :

$$\int_{\lambda}^{x} \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)du = \int_0^1 \frac{(t(x-\lambda))^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(t(\lambda-x)+x)(\lambda-x)dt$$
$$= (\lambda-x)^{\ell} \int_0^1 \frac{-t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(t(\lambda-x)+x)dt$$

On pose $h(x) = -\int_0^1 \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(t(\lambda-x)+x)dt$ pour tout $x \in I$.

L'application $g : (x,t) \mapsto -\frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(t(\lambda-x)+x)$ est C^{∞} sur $I \times [0;1]$, donc h est aussi de classe C^{∞} sur I et que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = (x-\lambda)^{\ell} h(x).$$

4. $f, g \in C_I^{\infty}$.

   (a) Supposons : $\exists h \in C_I^{\infty}$, tq : $f = g + h\Pi_A$, alors :
   $\forall k \in \mathbb{N}$, $\quad f^{(k)} = g^{(k)} + \sum_{j=0}^{k} \complement_k^j h^{(k-j)} \Pi_A^{(j)}$ $\quad$ (grâce à la formule de Leibniz).
   Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$, et α ordre de multiplicité de λ, alors :
   $\forall j \in \{0, ..., \alpha-1\}$, $\quad \Pi_A^{(j)}(\lambda) = 0$ et par suite :
   $f^{(k)}(\lambda) - g^{(k)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \complement_k^j h^{(k-j)}(\lambda) \underbrace{\Pi_A^{(j)}(\lambda)}_{=0} = 0$ pour tout $k \in \{0, ..., \alpha-1\}$.
   D'où :
   $$f \underset{A}{\equiv} g$$

   (b) Si $f \underset{A}{\equiv} g$, alors $f - g \underset{A}{\equiv} 0$, et donc, pour tout $\lambda \in Sp_R(A)$, d'ordre α, on a : $(f-g)^{(k)}(\lambda) = 0$ pour tout $k \in \{0, ..., \alpha-1\}$.
   Par 3.*b*) : $\quad (f-g)(x) = (x-\lambda)^{\alpha} h_{\lambda}(x)$ $\quad$ où $h_{\lambda} \in C_I^{\infty}$.
   Si $\Pi_A = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$, alors $\ (f-g)(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} h_1(x)$ pour tout $x \in I$, où $h_1 \in C_I^{\infty}$. Comme h_1 vérifie les hypothèses de la question 3) pour $\lambda = \lambda_2$, on applique, donc 3) à h_1, alors h_1 s'écrit :
   $h_1(x) = (x-\lambda_2)^{m_2} h_2(x)$ où $h_2 \in C_I^{\infty}$.
   On réetère le procédé et on a alors :
   $\forall x \in I, \quad (f-g)(x) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i} h(x)$ ou $h \in C_I^{\infty}$.

5. $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $\begin{cases} (1) & P \underset{A}{\equiv} Q \\ (2) & \exists H \in \mathbb{R}[X]\ ; \ \ P = Q + H\Pi_A \end{cases}$
   L'équivalence de (1) et (2) résulte des théorèmes de divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$.
   (1) $\Leftrightarrow P - Q \underset{A}{\equiv} 0 \Leftrightarrow \Pi_A$ divise $P - Q \Leftrightarrow \exists H \in R[X]$ tq : $\ P - Q = H\Pi_A$ $\quad$ (2).

Partie II : Définition de la matrice $f(A)$.

A)On considère l'application :
$$\varphi : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_{m-1}[X] & \to & \mathbb{R}^m \\ P & \mapsto & \varphi(P) = \big((P^{(k_1)}(\lambda_1))_{0 \leqslant k_1 \leqslant m_1-1}, ...(P^{(k_r)}(\lambda_1))_{0 \leqslant k_r \leqslant m_r-1}\big) \end{array} \quad , \quad .$$

6. Il est clair que φ est linéaire (dérivation est linéaire)
   Soit $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$,Si $\varphi(P) = 0$, alors : $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\forall k \in \{0, ..m_i-1\}$, $P^{(k)}(\lambda_i) = 0$ et apr suite λ_i est racine de P d'ordre m_i pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe, donc, $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$P = H\Pi_A \quad (*)$.
Comme $\deg(P) \leqslant m-1$ et $\deg(\Pi_A) = m$, on a par l'identité $(*)$: $H \equiv 0$ et puis $P \equiv 0$.
L'application φ est linéaire et injective et comme $\dim \mathbb{R}_{m-1}[X] = m = \dim \mathbb{R}^m$, on en déduit que φ est bijective.

7. Soit $f \in C_I^\infty$, considèrant le m-uplet de $\mathbb{R}^m$: $\big((f^{(k_1)}(\lambda_1))_{0\leqslant k_1\leqslant m_1-1}, ...(f^{(k_r)}(\lambda_1))_{0\leqslant k_r\leqslant m_r-1}\big)$. par la question 6.), il existe un unique $P_f \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que :
$\varphi(P_f) = \big((f^{(k_1)}(\lambda_1))_{0\leqslant k_1\leqslant m_1-1}, ...(f^{(k_r)}(\lambda_1))_{0\leqslant k_r\leqslant m_r-1}\big)$ (car φ est bijectif). Donc P_f vérifie :
$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \forall k_i \in \{0, ..m_i - 1\}, \qquad P_f^{(k_i)}(\lambda_i) = f^{(k_i)}(\lambda_i).$$
C'est-à-dire :
$$f \underset{A}{\equiv} P_f.$$
On pose $f(A) = P_f(A)$ (définition de $f(A)$)

B) Exemples

8. Soit $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$
Ecrivant $f(x) = P_f + \Pi_A(x)H(x)$ (division euclidienne de f par Π_A).
Comme $\Pi_A(A) = 0$, il vient $f(A) = P_f(A)$.

9. Ici $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $I = R$.
   (a) Calcul de Π_A : Le polynôme caractéristique de A est :
   $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 5-X & -4 \\ 4 & -3-X \end{vmatrix} = (X-1)^2$.
   Comme Π_A divise χ_A et que $A - I_2 \neq 0$, alors $\Pi_A = \chi_A = (X-1)^2$.
   (b) Calcul de la matrice $f(A)$ dans les cas suivants :
      (1) $f(x) = ax + b$ avec a et b réels :
      On a : $\deg(f) = 1 \leqslant m - 1$ (ici $m = 2$), donc $f(A) = aA + bI_2$.
      (2) $f(x) = \sin(\pi x)$.
      $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda = 1\}$, $m = 2$ ($= m_1$), on a aussi : $f(1) = 0$ et $f'(1) = \pi\cos(\pi) = -\pi$. soit alors $P_f \in \mathbb{R}_1([X]$ tel que : $P_f 1) = 0$ et $P_f'(1) = -\pi$, on a : $P_f(X) = -\pi(X-1)$ et donc $f(A) = P_f(A) = -\pi(A - I_2) = ...$
      (3) $f(x) = (x-1)^2 g(x)$, avec $g \in C_I^\infty$, alors $f'(x) = 2(x-1)g(x) + (x-1)^2 g'(x)$.
      On a : $f'(1) = 0$, $f(1) = 0$, donc $P_f(x) = 0$ pour tout $x \in I$ et par suite $f(A) = 0$.

Partie III : Calcul systématique de $f(A)$

A) Formule générale

10. On sait que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{m-1}[X] & \to & \mathbb{R}^m \\ P & \mapsto & \varphi(P) = \big((P^{(k_1)}(\lambda_1))_{0\leqslant k_1\leqslant m_1-1}, ...(P^{(k_r)}(\lambda_1))_{0\leqslant k_r\leqslant m_r-1}\big) \end{array}$
est un isomorphisme d'ev.
Or $\left(P^{(k)}(\lambda_j)\right)_{0\leqslant k\leqslant m_j-1} \in \mathbb{R}^{m_j}$, soit alors $(e_{j,k})_{0\leqslant k\leqslant m_j-1}$ l base canonique du sous-espace vectoriel $\underbrace{\{0\} \times .. \times \{0\}}_{(j-1)\ fois} \times \mathbb{R}^{m_j} \times \underbrace{\{0\} \times ... \times \{0\}}_{r-(j+1)\ fois}$, de $\mathbb{R}^m$ ($m = \sum\limits_{j=1}^{r} m_j$).
On a : $e_{j,k} = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{(k+j)\ place}, 0, ..., 0)$ et que $(e_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant r, 0\leqslant k\leqslant m_j-1}$ est la base canonique

de $\mathbb{R}^m$. Soit alors $Q_{j,k} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que $\varphi(Q_{j,k}) = e_{j,k}$ ($Q_{j,k} = \varphi^{-1}(e_{j,k})$ ...). La famille $(Q_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant r, 0\leqslant k\leqslant m_j-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$.

Pour tout $P = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{k,j} Q_{k,j} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on a : $\varphi(P) = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{k,j}\varphi(Q_{k,j}) = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{k,j} e_{,j,k}$. D'autre part : $\varphi(P) = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} P^{(k)}(\lambda_j)e_{j,k}$, donc : $\alpha_{k,j} = P^{(k)}(\lambda_j)$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$et $k \in \{0, ..., m_j - 1\}$.

En paticulier : Pou tout $f \in C_I^\infty$, il existe une famille de poynômes $(Q_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant r, 0\leqslant k\leqslant m_j-1}$ telle que :

$$P_f = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} P_f^{(k)}(\lambda_j)Q_{k,j} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Q_{k,j}.$$

On pose : $Z_{j,k} = Q_{j,k}(A)$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$, $0 \leqslant k \leqslant m_j - 1$.

11. Soit $\alpha_{j,k}$ des scalaires tels que : $\sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Z_{j,k} = 0$, en posant : $P = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} \alpha_{j,k} Q_{j,k} \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on a : $P(A) = 0$, donc il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = H\Pi_A$, pour des raisons de degrés , on a : $P = 0$ et par suite la famille $(Z_{j,k})_{1\leqslant j\leqslant r,\ 0\leqslant k\leqslant m_j-1}$ est libre dans $M_n(\mathbb{R})$.
Pour tout $f \in C_I^\infty$, on a : $f(A) = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Q_{k,j}(A) = \sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)Z_{j,k}$.. D'où le résultat demandé.

B) Exemples

12. Ici $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.

a et b) On a : $\Pi_A(X) = (X-1)^2$ (donc $r = 1$ et $m_1 = 2 = m$)
$Q_{1,0} = \varphi^{-1}((1,0))$, donc $\begin{cases} Q_{1,0}(1) = 1 \\ Q'_{1,0}(1) = 0 \end{cases}$ et puis $Q_{1,0} = 1$
$Q_{1,1} = \varphi^{-1}((0,1))$, donc $\begin{cases} Q_{1,1}(1) = 0 \\ Q'_{1,1}(1) = 1 \end{cases}$ et puis $Q_{1,1} = X - 1$
En conséquence $Z_1 = Z_{1,0} = Q_{1,0}(A) = I_2$ et $Z_2 = Z_{1,1} = Q_{1,1}(A) = A - I_2$ et par la question 11) $f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2$ pour tout $f \in C_I^\infty$.
Autre façon : pour $a)$: On asit que $f = P_f + \Pi_A H$ où $h \in C_I^\infty$ avec $\deg P_f = 1$, donc $P_f = P_f(1 + P_f'(1)(X-1) = f(1 + f'(1)(X-1)$ (formule de Taylor ...). Par $f(A) = P_f(A)$ la conclusion en résulte.

b) Si l'on ulitise la seconde méthode et si Z_1 et Z_2 vérifient : $(*)$ $f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2$ pour tout $f \in C_I^\infty$., alors avec $f = 1$, on a : $I_2 = Z_1$ et puis avec $f = X$,on a : $A = Z_1 + Z_2$, donc $Z_2 = A - Z_1 = A - I_2$.

c) Calcul de A^{2004} : ici $f(x) = x^{2004}$ $x \in I$, donc $f \in C_I^\infty$, avec $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2004$. Donc :
$f(A) = A^{2004} = Z_1 + 2004Z_2 = I_2 + 2004(A - I_2) = -2003I_2 + 2004A$
Calcul de $\sqrt{A}$: ici $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in I$, donc $f \in C_I^\infty$ avec $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$. Donc $f(A) = \sqrt{A} = I_2 + \frac{1}{2}(A - I_2) = \frac{1}{2}(I_2 + A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calcul de $\frac{1}{A}$: ici $f(x) = x^\alpha$, $x \in I$, $f \in C_I^\infty$, avec $f(1) = 1$ et $f'(1) = \alpha$. Donc $f(A) = A^\alpha = I_2 + \alpha(A - I_2) = (1-\alpha)I_2 + \alpha A = \begin{pmatrix} 1+4\alpha & -4\alpha \\ 4\alpha & 1-4\alpha \end{pmatrix}$

13. Ici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $I = \mathbb{R}$.

   (a) On a : $\Pi_A = (X+1)X^2$ (On commence par calculer le polynôme caractéristique.....), donc $j \in [\![1,2]\!]$, $m_1 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $m_2 = 2$, $\lambda_2 = 0$ ($m = m_1 + m_2 = 3$). Le polynôme minimal de A n'a pas de racines simples sur R, donc la matrice A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

   (b) On a : $Q_{1,0} = \varphi^{-1}((1,0,0))$, donc $\begin{cases} Q_{1,0}(-1) = 1 \\ Q_{1,0}(0) = 0 \\ Q'_{1,0}(0) = 0 \end{cases}$ et puis $Q_{1,0} = X^2$.

   $Q_{2,0} = \varphi^{-1}((0,1,0))$, donc $\begin{cases} Q_{2,0}(-1) = 0 \\ Q_{2,0}(0) = 1 \\ Q'_{2,0}(0) = 0 \end{cases}$ et puis $Q_{2,0} = -X^2 + 1$

   $Q_{2,1} = \varphi^{-1}((0,0,1))$, donc $\begin{cases} Q_{2,1}(-1) = 0 \\ Q_{2,1}(0) = 0 \\ Q'_{2,1}(0) = 1 \end{cases}$ et puis $Q_{2,1} = X^2 + X$

   Donc $Z_{1,0} = Q_{1,0}(A) = A^2$, $Z_{2,0} = Q_{2,0}(A) = -A^2 + I_3$ et $Z_{2,1} = Q_{2,1}(A) = A^2 + A$.
   Remarque : On peut caculer les $Z_{j,k}$ associées à A, en partant de l'identité : $f(A) = f(1)Z_{1,0} + f(0)Z_{2,0} + f'(0)Z_{2,1}$ pour tout $f \in C_I^\infty$.
   On prend successivement , $f = X$, $f = 1$ et $f = X^2$, pour avoir le système $\begin{cases} A = Z_{1,0} + Z_{2,1} \\ I_3 = Z_{1,0} + Z_{2,0} \\ A^2 = Z_{1,0} \end{cases}$ qui est simple à résoudre.

Partie IV : Un calcul fonctionnel sur la matrice A

A) Quelques identités bien naturelles

14. Soient f et g deux élèments de C_I^∞ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Pour tout $k \in N$, on a : $(\alpha f)^{(k)} = \alpha f^{(k)}$, donc, pa la question 11), on : $P_{\alpha f} = \alpha P_f$.
   De même $(f+g)(k) = fh(k) + g(k)$, donc $P_{f+g} = P_f + P_g$.

   (b) En écrivant $f = P_f + H_1\Pi_A$ et $g = P_g + H_2\Pi_A$ avec H_1 et H_2 dans C_I^∞ , on alors : $fg = P_fP_g + \Pi_A H$ où $H = (P_fH_2 + P_gH_1 + H_1H_2\Pi_A)$ qui est bien un élèment de C_I^∞. Soit $fg \underset{A}{\equiv} P_{fg}$
   D'autre part : $fg \in C_I^\infty$ et donc $fg = P_{fg} + \Pi_A K$ où $K \in C_I^\infty$, donc $fg \underset{A}{\equiv} P_fP_g$.
   De ces deux résultats, on déduit que $P_{fg} = P_fP_g$.

15. Soit $S : C_I^\infty \to M_n(R)$, $f \mapsto f(A)$.

   (a) Montrons que S est un morphisme d'algèbres.
   Soient f et g dans C_I^∞ et $\alpha \in R$, alors :
   • $S(\alpha f) = P_{\alpha f}(A) = \alpha P_f(A) = \alpha S(f)$
   • $S(f+g) = P_{f+g}(A) = P_f(A) + P_g(A) = S(f) + S(g)$
   •$S(fg) = P_{fg}(A) = (P_fP_g)(A) = P_f(A)P_g(A) = S(f)S(g)$
   •$S(\tilde{1}) = I_n$ où $\tilde{1} : x \mapsto 1$
   Donc S est bien un morphisme d'algèbes.

   (b) Soit $f \in C_I^\infty$, on a :
   Si $f \in \ker(S)$ alors $S(f) = 0$, donc $P_f(A) = 0$.¨P_f est donc un polynôme annulateur de A et par suite, il est divisible par le polynome minimal Π_A .Puique son dégré est inférieur ou égal à $\deg \Pi_A - 1$, il en résulte que $P_f = 0$ et par suite $f \in \Pi_A C_I^\infty =$

$\{\Pi_A H \ / \ H \in C_I^\infty \}$.
En conclusion : $\ker(S) = \Pi_A C_I^\infty$.

16. sin, cos $\in C_I^\infty$ où $I = \mathbb{R}$ et $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dans C_I^∞ avec $I = \mathbb{R}_+^*$.

    (a) Avec $f = \cos$ et $g = \sin$, on alors :
    $$\begin{aligned}(\cos(A))^2 + (\sin(A))^2 &= (S(f))^2 + (S(g))^2 \\ &= S(f^2) + S(g^2) \\ &= S(f^2 + g^2) \\ &= S(\tilde{1}) \\ &= I_n\end{aligned}$$

    (b) Ici les λ_j sont strictement positifs :
    Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $S(f) = \sqrt{A}$, donc $\left(\sqrt{A}\right)^2 = S(f)S(f) = S(f^2) = S(id_I) = A$.
    Si $f(x) = \frac{1}{x}$, on a : $S(f) = \frac{1}{A}$. Par $xf(x) = 1$ pour tout $x \in I = R_+^*$, on a : $S(id_I)S(f) = I_n$, soit $A.S(f) = I_n$. Donc A est inversible et $\frac{1}{A} = A^{-1}$.

B-Le spèctre de $f(A)$

17. Soit $\mathcal{M}_A = \{f(A) \ / \ f \in C_I^\infty \}$, alors : $\mathcal{M}_A = S(C_I^\infty) = \{P(A) \ / \ P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]\}$, c'est donc une $\mathbb{R}$-algèbre (comme image par un morphisme d'algèbres, d'une algèbre). Elle est commutative car C_I^∞ est une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative.
    $\dim(\mathcal{M}_A) = \dim(\{P(A) \ / \ P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]\}) = m$.

18. Soit $M \in \mathcal{M}_A$ tel que M inversible, alors, il existe $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que $M = P(A)$ et M inversible.
    En considèrant l'application $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on déduit l'existence de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(M) = \frac{1}{M} = M^{-1}$ (voir question 16) et puis $M^{-1} = Q(M) = Q \circ P(A) \in \mathcal{M}_A$ car $Q \circ P \in C_I^\infty$.

19. Soit $f \in C_I^\infty$.
    (1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$, d'après la question 18. il existe $g \in C_I^\infty$ tel que $f(A)g(A) = I_n$, donc $fg \underset{A}{\equiv} 1$ et par suite, il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $fg = 1 + H\Pi_A$. Donc, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $f(\lambda_j)g(\lambda_j) = 1$ et puis $f(\lambda_j) \neq 0$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$.
    (2) $\Rightarrow$ (1) : Supposons $f(\lambda_j) \neq 0$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on a alors : $P_f(\lambda_j) \neq 0$ pour tout j et par suite $\Pi_A \wedge P_f = 1$. En écrivant $P_f R + \Pi_A S = 1$ (identité de Bezout), il vient : $I_n = R(A)P_f(A)$ car $\Pi_A(A) = 0$ et par suite $f(A)$ est inversible .

20. Notons par l'ensemble des valeurs propres **réelles** de $M \in M(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g = f - \lambda$, .on a :
    $\lambda \in \Lambda_{f(A)} \Leftrightarrow f(A) - \lambda I_n$ est non inversible$\Leftrightarrow$ $g(A)$ est non inversible $\overset{quest\ 19}{\Leftrightarrow}$ $\exists j \in [\![1, r]\!]$tel que : $g(\lambda_j) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in [\![1, r]\!]$tel que : $\lambda = f(\lambda_j)$.
    En conclusion : $\Lambda_{f(A)} = \Lambda_A$.

V- Application de la résolution d'un système différenteil :

21. C'est du cours : Dans un evn de dimension finie, muni d'une base B, une suite converge si et seulement si les suites composantes dans B convergent.
    Ici l'espace $\mathcal{M}_A$ est de dimension finie, muni de la base β définie dans la question 11., donc l'équivalence demandée en résulte.

22. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, posons $f_{t,p}(x) = \sum_{\ell=0}^{p} \dfrac{t^k x^k}{\ell!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors : $f_t(x) = \lim_{p \to +\infty} f_{t,p}(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \dfrac{t^k x^k}{\ell!}$ (développement en série entière de $x \mapsto \exp(tx)$). Par le théorème

de dérivation terme à terme, on a : $f_{t,p}^{(k)}(x) \underset{p\infty}{\to} f_t^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
Par la question 21. la suite $(f_{t,p}(A))_p$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$, vers $f_t(A)$ et on peut écrire : $f_t(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{\ell!}$.

23. Matriciellement le système proposé s'écrit : $X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les solutions du système sont de la forme : $X(t) = \exp(tA)\lambda = f_t(A)\lambda$ où $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$. Or, par la question 13 , on a : $f_t(A) = f_t(-1)Z_1 + f_t(0)Z_2 + f_t'(0)Z_3 = \begin{pmatrix} 1+t & -t & t \\ -e^{-t}+1+t & e^{-t}+t & t \\ -e^{-t}+t & e^{-t}-1 & t \end{pmatrix}$

D'où $X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_1 t - t\lambda_2 + t\lambda_3 \\ -\lambda_1 e^{-t} + \lambda_1 + \lambda_1 t + \lambda_2 e^{-t} + t\lambda_2 + t\lambda_3 \\ -\lambda_1 e^{-t} + \lambda_1 t + \lambda_2 e^{-t} - \lambda_2 + t\lambda_3 \end{pmatrix}$ pour tout t .