

I. Produit de convolution**A. Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire**

- L'ensemble J_x est déjà non vide car il contient le polynôme nul.
- Pour tous polynômes A et B de J_x et tous scalaires α et β de $\mathbb{K}$ on a, par morphisme d'algèbre de $P \mapsto P(\sigma)$:

$$(\alpha A + \beta B)(\sigma)(x) = (\alpha A(\sigma) + \beta B(\sigma))(x) = \alpha A(\sigma)(x) + \beta B(\sigma)(x) = 0,$$

d'où $\alpha A + \beta B \in J_x$.

- Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ et tout $B \in J_x$,

$$(AB)(\sigma)(x) = (A(\sigma) \circ B(\sigma))(x) = A(\sigma)(B(\sigma)(x)) = A(\sigma)(0) = 0,$$

d'où $AB \in J_x$.

L'ensemble J_x est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et, comme x est une suite récurrente linéaire, il existe un polynôme A non nul tel que $A(\sigma)(x) = 0$, donc J_x n'est pas réduit à $\{0\}$.

B. Quelques exemples

- 1°) – x est une suite récurrente linéaire d'ordre 0 si et seulement si il existe un scalaire a_0 non nul tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 x_n = 0$ si et seulement si x est la suite nulle.
 - x est une suite récurrente linéaire d'ordre 1 si et seulement si il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$ si et seulement si il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = r x_n$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont donc exactement les suites géométriques.
 - Les suites récurrentes linéaires dont $(X-1)^2$ est un polynôme caractéristique sont celles qui vérifient la relation $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Le polynôme $(X-1)^2$ étant du second degré et ayant 1 comme racine double, ce sont exactement les suites de la forme

$$x_n = (\alpha n + \beta).1^n$$

où α et β sont deux constantes. De plus, si $(X-1)^2$ en est le polynôme minimal, $(X-1)$ ne doit pas être un polynôme caractéristique donc x ne doit pas être une suite géométrique de raison 1. Les suites récurrentes linéaires de polynôme caractéristique $(X-1)^2$ sont donc les suites de la forme $x_n = \alpha n$, où α est une constante non nulle.

- 2°) Le polynôme minimal B de x divise déjà le polynôme $A(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X+1)^3$, donc $B(X) = (X+1)^p$ avec $p \in \{0, 1, 2, 3\}$.
De plus, $p \geq 2$ car sinon x serait une suite géométrique de raison -1 , ce qu'interdisent les conditions initiales.
Soit y la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par $y_0 = x_0 = 0, y_1 = x_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$. Par définition, $(X+1)^2 \in J_y$ donc $A(X) \in J_y$. Or $y_2 = -2y_1 - y_0 = 2 = x_2$ donc x et y sont deux éléments de $\mathcal{R}_A$ satisfaisant les mêmes trois conditions initiales, d'où $x = y$.
On a ainsi $x \in \mathcal{R}_B$ avec $B(X) = (X+1)^2$ donc le polynôme minimal de x est $(X+1)^2$.

Partie C.

- 1°) – $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est une partie non vide de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (car contient la suite nulle). De plus, $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire vu qu'on a facilement $A(\sigma)(\lambda x + \mu y) = \lambda A(\sigma)(x) + \mu A(\sigma)(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
 $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
 - L'application $\varphi : x \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ est clairement linéaire de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^p$ et est de plus bijective car une suite récurrente linéaire d'ordre p est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes. Autrement dit, φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, d'où $\dim \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = p$.

2°) – Par définition, $\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+p} = 0$, c'est-à-dire telles que $\forall k \geq p, x_k = 0$.

Il s'agit donc de l'ensemble des suites nulles à partir du rang p .

– Les p suites définies par $(1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, $\dots$ $(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (où les "1" figurent en positions successives) forment une famille libre de $\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$ donc une base de celui-ci pour une question de cardinalité.

3°) a) $\psi : Q \mapsto (Q(n)\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit de manière immédiate une application linéaire de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont l'image est $E_A(\mathbb{K})$ par définition : $E_A(\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

L'application ψ est de plus injective car si $\psi(Q) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) = 0$ (vu que $\lambda \neq 0$), d'où $Q = 0$ (car Q a alors une infinité de racines).

Il en résulte que $\dim E_A(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}_{p-1} = p$.

b) Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ et x la suite $(Q(n)\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors $(\sigma - \lambda \text{Id})(x)$ est la suite de terme général $Q(n+1)\lambda^{n+1} - \lambda Q(n)\lambda^n$, c'est-à-dire $(\Delta(Q)(n))\lambda^{n+1}$, où Δ désigne l'opérateur ("de dérivation discrète") défini par $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$. Par une récurrence immédiate sur k , on en déduit que $(\sigma - \lambda \text{Id})^k(x)$ est la suite de terme général $(\Delta^k(Q)(n))\lambda^{n+k}$. Or, $\deg \Delta(Q) \leq \deg Q - 1$, si bien que $\forall k \geq p, \Delta^k(Q) = 0$. En particulier, $(\sigma - \lambda \text{Id})^p(x) = 0$, ce qui montre que x appartient à $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

L'inclusion $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ obtenue et l'égalité des dimensions permettent alors de conclure que $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

Partie D.

1°) – En convenant de poser $\lambda_0 = 0$, les scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts donc les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème de décomposition des noyaux implique alors que

$$\text{Ker } A(\sigma) = \bigoplus_{k=0}^d \text{Ker } ((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma)),$$

soit $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=0}^d \mathcal{R}_{(X - \lambda_k)^{m_k}}(\mathbb{K})$.

– D'après la question **I.C.3°)b)**, les suites de $\mathcal{R}_{(X - \lambda_k)^{m_k}}(\mathbb{K})$ avec $k \geq 1$ sont exactement celles de la forme $(Q_k(n)\lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où Q_k est un polynôme de degré strictement inférieur à m_k .

– Enfin, le **I.C.2°)** établit que $\mathcal{R}_{X^{m_0}}$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang m_0 (et donc telles que $x_0, x_1, \dots, x_{m_0-1}$ soient arbitraires).

– On peut alors conclure que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites de x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \geq m_0, \quad x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n)\lambda_k^n,$$

où $Q_1, Q_2, \dots, Q_d$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, \deg Q_k < m_k$.

II. Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Partie A.

1°) – Soit x un élément de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$. Alors la suite $\sigma(x) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que x et, par une récurrence immédiate, on a $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \sigma^k(x) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Si $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ n'était pas une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$, cela signifierait (puisque $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$) qu'il

existe des scalaires non tous nuls $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k \sigma^k(x) = 0$. Le polynôme non nul

$\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ serait un polynôme caractéristique de x , ce qui contredit la minimalité de p .

– Si $n \leq p$, alors $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre comme sous-famille d'une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$, donc de rang n .

– Si $n > p$, alors $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une partie génératrice de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ (comme sur-famille d'une base), donc est de rang p vu que $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$.

2°) – Une suite de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ étant entièrement déterminée par ses p premiers termes, il en existe au plus une dont les n premiers termes $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ (avec $n \geq p$) sont connus : l'application φ_n est donc injective.

– Le rang de la matrice $H_n(x)$ est égal à celui de la famille de ses vecteurs lignes, c'est-à-dire à celui de $(\varphi_n(x), \varphi_n(\sigma(x)), \dots, \varphi_n(\sigma^{n-1}(x)))$. Dans le cas où $n \geq p$, ce rang vaut p étant donné que $(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{n-1}(x))$ est de rang p et que l'application linéaire φ_n est injective.

B. Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

1°) Il résulte directement du **II.A.2°**) que la suite $(\text{rg}(H_n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ devient stationnaire précisément à partir de l'ordre minimal de x . Comme $\text{rg}(H_m(x)) = p$, l'élément x est d'ordre minimal p .

En particulier, la matrice $H_{p+1}(x)$ de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$ étant de rang p , son noyau est une droite vectorielle d'après le théorème du rang. De plus, un vecteur directeur $(b_0, b_1, \dots, b_p)$ de cette droite ne peut pas vérifier $b_p = 0$ car sinon $(b_0, b_1, \dots, b_{p-1})$ serait un vecteur non nul du noyau de $H_p(x)$, ce qui est impossible vu que cette matrice est inversible.

Quitte à diviser par b_p , on peut enfin se ramener à $b_p = 1$.

2°) Dire que $(b_0, b_1, \dots, b_{p-1}, 1)$ appartient au noyau de $H_{p+1}(x)$ se traduit par l'égalité

$$b_0 \varphi_{p+1}(x) + b_1 \varphi_{p+1}(\sigma(x)) + \dots + b_{p-1} \varphi_{p+1}(\sigma^{p-1}(x)) + \varphi_{p+1}(\sigma^p(x)) = 0.$$

L'injectivité de φ_{p+1} entraîne alors que $b_0 x + b_1 \sigma(x) + \dots + b_{p-1} \sigma^{p-1}(x) + \sigma^p(x) = 0$ et $B(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{p-1} X^{p-1} + X^p$ est ainsi un polynôme caractéristique de x , donc son polynôme minimal car J_x contient un unique polynôme unitaire de degré p .

C. Étude d'un exemple

1°) La procédure suivante, en langage Maple, renvoie la liste des x_k pour $0 \leq k \leq n$:

```
suiterec := proc (n)
local k, x;
x[0] := 1; x[1] := 1; x[2] := 1; x[3] := 0;
for k from 0 to n
do
print(x[k]);
x[k+4] := x[k+3] - 2*x[k+1]
end do
end proc
```

2°) La suite x étant d'ordre minimal $p \leq 4$, la suite $(\text{rg}(H_n))_{n \geq 4}$ est constante d'après le **II.A.2°**). Il suffit donc de calculer $\text{rg}(H_n)$ pour $n \leq 4$ pour répondre à la question.

De manière immédiate, $\text{rg } H_0(x) = 1$ et $\text{rg } H_1(x) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

On vérifie de plus, en utilisant par exemple la méthode du pivot, que $\text{rg } H_2(x) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$

et que $\text{rg } H_3(x) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} = 3$.

En conclusion, $\text{rg } H_0(x) = \text{rg } H_1(x) = 1$ et $\forall n \geq 3, \text{rg } H_n(x) = 3$.

3°) La méthode du pivot, une calculatrice performante ou un peu de bricolage montrent que $(0, 2, -2, 1)$ appartient au noyau de $H_3(x)$. Comme $p = 3$, la question **II.B.2°**) implique que x a pour polynôme minimal $B(X) = 2X - 2X^2 + X^3$.

4°) En se plaçant sur $\mathbb{C}$, le polynôme B est scindé à racines simples et on trouve $B(X) = X(X-\lambda)(X-\mu)$ avec $\lambda = 1+i$ et $\mu = 1-i$. D'après le **I.D.**, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \geq 1, x_n = a\lambda^n + b\mu^n$.

On détermine a et b grâce aux conditions initiales, c'est-à-dire en résolvant le système
$$\begin{cases} \lambda a + \mu b = 1 \\ \lambda^2 a + \mu^2 b = 1 \end{cases}$$

ce qui donne après calculs : $a = \frac{1-i}{4}$ et $b = \frac{1+i}{4}$.

Comme $(1+i)(1-i) = 2$, on obtient : $\forall n \geq 1, x_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n)$.

5°) On observe que changer la valeur de x_0 ne modifie pas les termes suivants : on a donc toujours $x_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n)$ pour $n \geq 1$ et on remarque de plus que $\forall n \geq 1, 2x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = 0$.

L'expression de x_n montre que l'ordre de la nouvelle suite x vaut soit 2 soit 3 et que son polynôme minimal est soit le polynôme $B(X)$ du **II.C.3°** soit le polynôme $(X-\lambda)(X-\mu) = 2 - 2X + X^2$.

Or, en prenant $x_0 = \frac{1}{2}$, la relation $2x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ est également vérifiée si bien que la relation de récurrence minimale de x est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, 2x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = 0$.

III. Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

A. Préliminaires

1°) Toute matrice de Hankel est symétrique réelle donc diagonalisable dans $O(n)$ d'après le théorème spectral. En particulier, elle admet n valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités.

2°) Si $(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ était le n -uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n , alors λ en serait l'unique valeur propre. Comme M est diagonalisable, on aurait $M \sim \lambda I_n$, d'où $M = \lambda I_n$ vu que $P^{-1} \cdot \lambda I_n \cdot P = \lambda I_n$ pour tout $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Or, pour $\lambda \neq 0$ et $n \geq 3$, la matrice λI_n ne peut pas être une matrice de Hankel, ce qui apporte une contradiction.

B. Une première condition nécessaire

1°) – La matrice $H(a)$ étant diagonalisable, $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ en représente la trace, d'où l'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}$.

– De même, la matrice $(H(a))^2$ est diagonalisable, de valeurs propres égales à $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$, donc $\text{tr}(H(a))^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

Or le i -ième terme diagonal de $(H(a))^2$ est donné par $b_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{i+j-2}^2$ d'où

$$\text{tr}(H(a))^2 = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i+j-2}^2.$$

Il en ressort que $\text{tr}(H(a))^2 = \sum_{k=0}^{2n-2} \alpha_k a_k^2$, où α_k désigne le nombre de manières d'écrire l'entier k sous la forme $i+j-2$ avec $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. À l'aide d'une figure, α_k peut être vu comme le nombre de points à coordonnées entières du carré $[1, n] \times [1, n]$ sur une droite parallèle à la diagonale non principale de celui-ci. Un dénombrement élémentaire conduit alors à $\alpha_k = k+1$ si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\alpha_k = 2n-k-1$ si $k \in \llbracket n, 2n-2 \rrbracket$.

On peut ainsi conclure sur la formule $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2$.

2°) En utilisant les expressions des v_i et des w_i selon la position de i par rapport à p ,

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^p a_{2(i-1)} + \sum_{i=p+1}^n a_{2(i-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

De même,

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^p (2i-1)a_{2(i-1)}^2 + \sum_{i=p+1}^n (2n-2i+1)a_{2(i-1)}^2$$

d'où, par une majoration grossière,

$$\|v\|^2 \leq \sum_{k=0}^{2p-2} (k+1)a_k^2 + \sum_{k=2p}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2.$$

– Si $n = 2p$, on obtient directement $\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ grâce au **III.B.1°**) en majorant $\sum_{k=0}^{2p-2} (k+1)a_k^2$ par $\sum_{k=0}^{2p-1} (k+1)a_k^2$.

– Si $n = 2p-1$, on procède de même en majorant $\sum_{k=2p}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2$ par $\sum_{k=2p-1}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2$.

Ceci permet de conclure sur l'inégalité $\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

3°) Par symétrie des rôles de i et j ,

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

soit

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \sum_{i=1}^n \left[n\lambda_i^2 - 2\lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \right]$$

ou encore

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j + n \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = 2n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2,$$

ce qui donne finalement $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - <v, w>$ d'après **III.B.1°**) et **III.B.2°**).

Enfin, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $<v, w>^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$ et, en reportant dans l'inégalité précédente, il vient

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq K_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

4°) Si $n = 3$, alors $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2$ vaut

$$(\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) + (\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2) + (\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2),$$

soit $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3)$, tandis que

$$K_3 = 3 - \left(1 + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}.$$

L'inégalité (III.1) équivaut alors à

$$2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geq 3.(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3).$$

C. D'autres conditions nécessaires

1°) La matrice B n'ayant que trois termes non nuls, $B - X.I_n$ possède $n-3$ colonnes dont le seul terme non nul, situé sur la diagonale principale, est $-X$. En développant successivement $\det(B - X.I_n)$ suivant ces colonnes, on obtient

$$\det(B - X.I_n) = (-X)^{n-3} \cdot \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 0 & -2-X & 0 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix},$$

ce qui amène à $\det(B - X.I_n) = (-1)^n \cdot X^{n-3} (X+2)(X+1)(X-1)$.

Le spectre ordonné de B est donc $(1, 0, 0, \dots, 0, -1, -2)$.

2°) D'après le résultat (III.2) admis dans cette partie,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_{n+1-i} \leq \text{tr}(MB) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i,$$

où $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ désigne ici le spectre ordonné de B . Les calculs du **III.C.1°**) donnent alors

$$-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_n \leq \text{tr}(MB) \leq \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n.$$

Or $\text{tr}(MB) = a_{2p-2} - 2a_{2p-2} + a_{2p-2} = 0$ (en calculant les trois seuls termes diagonaux non nuls de MB), ce qui conduit aux deux inégalités demandées.

D. Un exemple

1°) On commence par remarquer que $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ 0 \\ a-c \end{pmatrix}$ donc $a-c$ est valeur propre de la matrice M .

En explicitant le polynôme caractéristique de M et en effectuant la division euclidienne par $X - (a-c)$, on trouve, après un calcul un peu fastidieux :

$$\chi_M(X) = (X - (a-c)) \cdot (X^2 - (a+2c)X + c^2 + ab - 2b^2).$$

Les deux autres valeurs propres de M (nécessairement réelles car M est symétrique réelle) sont les racines du trinôme $X^2 - (a+2c)X + c^2 + ab - 2b^2$, soit

$$c + \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b^2}.$$

2°) Cherchons a, b, c (avec $b \geq 0$) tels que

$$\lambda_1 = c + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b^2}, \quad \lambda_2 = a - c \quad \text{et} \quad \lambda_3 = c + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b^2} \quad (*).$$

Par substitution, ce système (d'inconnues a, b, c) équivaut à

$$2a + c = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad a + 2c = \lambda_1 - \lambda_3 \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2 + 8b^2} = \lambda_1 - \lambda_3.$$

Les deux premières équations conduisent à

$$a = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3}{3} \quad \text{et} \quad c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{3}$$

et, comme $\lambda_1 \geq \lambda_3$, la troisième équation équivaut à $a^2 + 8b^2 = (\lambda_1 - \lambda_3)^2$ soit, en réinjectant, à

$$8b^2 = (\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \frac{1}{9}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2.$$

Or $(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) \geq 0$ et on vérifie, en développant chacune des deux expressions, que cette inégalité est équivalente au fait que $(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \frac{1}{9}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2$ soit positif.

Il existe donc une solution (d'ailleurs unique) (a, b, c) du système $(*)$ telle que $b \geq 0$, donnée par

$$a = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3}{3}, \quad b = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \frac{1}{9}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2} \quad \text{et} \quad c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{3}.$$

3°) – La condition (III.3) est ainsi une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice de Hankel de spectre ordonné $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans le cas $n = 3$.

– Pour le triplet $(\lambda, 1, 1)$ (avec $\lambda \geq 1$), la condition (III.1) équivaut à $2(\lambda^2 + 2) \geq 3(2\lambda + 1)$, c'est-à-dire à $2\lambda^2 - 6\lambda + 1 \geq 0$. Cette condition est notamment remplie (avec égalité d'ailleurs) lorsque $\lambda = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$, valeur qui ne vérifie pas en revanche l'inégalité $\lambda - 3 \geq 0$ déduite du (III.3).

La condition (III.1) n'est donc pas suffisante pour que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ soit le spectre ordonné d'une matrice de Hankel d'ordre 3.