

## Exercice I

Le commutant  $\mathcal{C}(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

La phrase « On suppose dans tout cet exercice que :  $\chi_A = P_A$  pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . » est pour le moins mal venue. Dans tout l'exercice, on fixe une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  vérifiant  $\chi_A = P_A$ . On peut noter que, dans les trois questions de l'exercice, la donnée est  $P_A$ , polynôme de degré 3; le théorème de Cayley-Hamilton assure donc l'égalité  $\chi_A = P_A$  (à un facteur  $(-1)^3$  près, suivant la convention sur le polynôme caractéristique).

1. (a) La matrice  $A$  a un polynôme caractéristique scindé, à racines simples, donc est diagonalisable; de plus ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
  - (b) Si  $B$  commute avec  $A$ , elle stabilise les trois sous-espaces propres de  $A$ , qui sont des droites. Ces trois droites sont donc dirigées par des vecteurs propres de  $B$ . Une base de vecteurs propres de  $A$  est donc aussi une base de vecteurs propres de  $A : B$  et  $A$  sont simultanément diagonalisables.
  - (c) Interpolation de Lagrange ( $\alpha, \beta, \gamma$  distincts). On peut imposer la condition supplémentaire  $\deg T \leq 2$ .
  - (d) D'après la remarque faite en 1.b, il existe une matrice  $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$  telle que  $A = P \cdot \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot P^{-1}$  et  $B = P \cdot \text{diag}(a, b, c) \cdot P^{-1}$ . Alors  $\text{diag}(a, b, c) = T(\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma))$  et  $B = T(A)$ .
  - (e) Le commutant de  $A$  est donc inclus dans l'algèbre commutative  $\mathbb{C}[A]$  des polynômes en  $A$ . L'inclusion inverse est vérifiée pour toute matrice. Donc  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$ . Avec la remarque du 1.c,  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$  et, comme  $P_A$  est de degré 3,  $(I_3, A, A^2)$  est une base de  $\mathcal{C}(A)$ .
2. (a) Par définition,  $P_A$  est un polynôme annulateur de  $A$ , donc  $(A - \lambda I_3)^3 = 0$ . En termes d'endomorphismes,  $g^3 = 0$ . De plus, comme  $P_A$  est le polynôme minimal de  $A$ ,  $(A - \lambda I_3)^2 \neq 0$ , donc  $g^2 \neq 0 : g$  est nilpotent d'indice 2.

- (b) On vérifie facilement que, pour tout vecteur  $u \in \mathbb{C}^3$  tel que  $g^2(u) \neq 0$ , la famille  $\mathcal{B} = (u, g(u), g^2(u))$  est libre. Comme l'espace vectoriel est de dimension 3, cette famille est une base de  $\mathbb{C}^3$ . Dans une telle base,  $g$

a pour matrice  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (c) Tout d'abord,  $h$  commute avec  $f$ , donc avec  $g$ . On en déduit  $h(g(u)) = g(h(u)) = x_1 g(u) + x_2 g^2(u)$  et  $h(g^2(u)) = g^2(h(u)) = x_1 g^2(u)$ . La matrice de  $h$  dans  $\mathcal{B}$  vaut donc  $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 I_3 + x_2 N + x_3 N^2$ .

- (d) On en déduit  $h = x_1 Id + x_2 g + x_3 g^2$ , puis, en substituant  $f - \lambda Id$  à  $g$ , l'existence d'un polynôme  $T$  de degré au plus 2 tel que  $h = T(f)$ . Matriciellement,  $H = T(A)$ .

- (e) On conclut comme au 1.e.

3. (a) Le polynôme  $P_A$  est annulateur de  $A$ , donc de  $f$ . Comme  $X - \lambda_1$  et  $(X - \lambda_2)^2$  sont premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux,  $\mathbb{C}^3 = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \ker(f - \lambda_2 Id)^2$ .

- (b) Comme  $\lambda_1$  est une valeur propre simple de  $f$  (de multiplicité 1 dans  $\chi_A$ ), le sous-espace propre associé  $\ker(f - \lambda_1 Id)$  est de dimension 1; donc  $\ker(f - \lambda_2 Id)^2$  est de dimension 2. De plus, c'est le noyau d'un polynôme en  $f$ , donc il est stable par  $f$ . Dans une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{C}^3$  adaptée à la décomposition du 3.a, la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ , où  $U$  représente  $\tilde{f} = f|_{\ker(f - \lambda_2 Id)^2}$ . Comme  $(\tilde{f} - \lambda_2 Id)^2 = 0$ ,  $N = U - \lambda_2 I_2$  vérifie  $N^2 = 0$ .

Si  $N = 0$ , alors la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$  est diagonale,  $f$  est diagonalisable et son polynôme minimal est à racines simples. Comme ce n'est pas le cas,  $N \neq 0 : N$  est nilpotente d'indice 2.

$$(c) (\alpha) \quad M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2)C = 0 \\ UV = VU \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2)C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$$

Comme  $U$  admet comme polynôme annulateur  $(X - \lambda_2)^2$ , sa seule valeur propre est  $\lambda_2$ , donc  $U - \lambda_1 I_2$

est inversible. On en déduit  $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$

- ( $\beta$ ) Il s'agit de reprendre avec  $U$  le raisonnement des questions 2.a, b, c et d. On peut imposer la condition supplémentaire  $\deg R \leq 1$ .

( $\gamma$ ) Les conditions imposées signifient que  $\lambda_1$  est racine de  $S - \mu$  et que  $\lambda_2$  est racine au moins double de  $S - R$ ; autrement dit, que  $S$  vérifie  $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ (S - R)(\lambda_2) = 0 \\ (S - R)'(\lambda_2) = 0 \end{cases}$ , ou encore  $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}$ .

Or l'application  $\Delta$  définie de  $\mathbb{C}_2[X]$  dans  $\mathbb{C}^3$  par  $\Delta(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), P'(\lambda_2))$  est linéaire, injective (si  $\Delta(P) = 0$ , alors  $P$  est de degré au plus 2 et possède au moins 3 racines comptées avec leur multiplicité, donc vaut 0), entre deux espaces vectoriels de même dimension finie; donc  $\Delta$  est un isomorphisme.

D'où l'existence de  $S \in \mathbb{C}_2[X]$  satisfaisant les conditions  $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}$ .

( $\delta$ )  $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & 0 \\ 0 & S(U) \end{pmatrix}$ . Or  $S(\lambda_1) = \mu$ ; de plus, comme  $(X - \lambda_2)^2$  est annulateur de  $U$ ,  $S(U) = R(U)$ . Donc  $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & R(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = M$ .

(d) Soit  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et  $b$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  canoniquement associé à  $B$ . Alors  $B$  commute avec  $A$  si et seulement si  $b$  commute avec  $f$ , i.e.  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$  commute avec  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ . C'est encore équivalent (la réciproque de 3.c. $\delta$  est évidente) à l'existence d'un polynôme  $S \in \mathbb{C}_2[X]$  tel que  $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$ , i.e.  $S(f) = b$ , i.e.  $S(A) = B$ . Comme dans les questions 1 et 2,  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$  et  $\mathcal{C}(A)$  est de dimension 3.

## Exercice II

1. Soit  $x \in ]0, 2\pi[$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et équivalente en  $+\infty$  à  $2e^{-t^2}$ , donc intégrable sur  $[0, +\infty[$  et *a fortiori* sur  $]0, +\infty[$ .

(a) Soit  $x \in ]0, 2\pi[$ . Alors, sur  $[1, +\infty[$ ,  $0 \leq \frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x} \leq \frac{1}{\text{ch}(t^2) - 1}$ . Comme  $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t^2) - 1}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  (même preuve que pour l'existence de  $I(x)$ ), on obtient l'encadrement  $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t^2) - 1}$ . Donc la fonction  $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x}$  est bornée sur  $]0, 2\pi[$ .

(b) Au voisinage de 0,  $\text{ch}(t^2) = 1 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{24} + o(t^4)$ . On en déduit  $\frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \text{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\text{ch}(t^2) - 1)} \xrightarrow{0} -\frac{1}{6}$ . Donc  $t \mapsto$

$\left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \text{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\text{ch}(t^2) - 1)} \right|$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

(c) Les deux intégrales existent (par continuité des fonctions sur  $[0, 1]$ ).

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{dt}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \text{ch}(t^2)}{\left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right)(\text{ch}(t^2) - \cos^2 x)} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \text{ch}(t^2)}{\left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right)(\text{ch}(t^2) - \cos^2 x)} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \text{ch}(t^2)}{\left(1 + \frac{t^4}{2} - 1\right)(\text{ch}(t^2) - 1)} \right| dt \end{aligned}$$

La majoration est possible du fait de la continuité de la fonction sous l'intégrale sur  $[0, 1]$  et montre le caractère borné de  $x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x}$ .

(d) Avec le changement de variable affine proposé :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x} = \frac{2}{(2(1 - \cos x))^{3/4}} \int_0^1 \frac{1}{(2(1 - \cos x))^{1/4}} \frac{du}{1 + u^4}.$$

La suite du calcul de l'intégrale est parfaitement inutile pour obtenir un équivalent de  $I(x)$ .

Quand  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $\frac{1}{(2(1 - \cos x))^{1/4}}$  tend vers  $+\infty$ , donc  $\int_0^1 \frac{1}{(2(1 - \cos x))^{1/4}} \frac{du}{1 + u^4}$  tend vers  $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ .

De plus,  $2(1 - \cos x) \underset{0}{\sim} x^2$ , donc  $\frac{2}{(2(1 - \cos x))^{3/4}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^{3/2}}$ . Donc  $\int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$ . D'après

1.c,  $\int_0^1 \frac{dt}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t^2) - \cos^2 x}$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ ,  $I(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$ .

2. Par changement de variable affine sur une intégrale convergente,  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt \stackrel{u=nt}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du =$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \Gamma(1/2), \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt.$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{n(-t+ix)} &= e^{-t+ix} \frac{1 - e^{N(-t+ix)}}{1 - e^{(-t+ix)}} = e^{-t+ix} \frac{(1 - e^{N(-t+ix)}) (1 - e^{(-t-ix)})}{(1 - e^{(-t+ix)}) (1 - e^{(-t-ix)})} \\ &= e^{-t+ix} \frac{(1 - e^{N(-t+ix)}) (1 - e^{(-t-ix)})}{(1 - e^{-t} \cos x)^2 + e^{-2t} \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Après simplification, la partie imaginaire vaut

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx) &= \frac{e^{-t} (\sin x - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx))}{(1 - e^{-t} \cos x)^2 + e^{-2t} \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{2(\text{cht} - \cos x)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } S_N(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{2(\text{cht} - \cos x)\sqrt{t}} dt \text{ semble} \\ &\text{converger vers } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2(\text{cht} - \cos x)\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\text{ch}(u^2) - \cos x}. \end{aligned}$$

On peut démontrer ce résultat à l'aide du théorème de convergence dominée ou par simple majoration :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{2(\text{cht} - \cos x)\sqrt{t}} dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{-e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{2(\text{cht} - \cos x)\sqrt{t}} \right| dt \leq \\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nt} + e^{-(N+1)t}}{2(1 - \cos x)\sqrt{t}} dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2(1 - \cos x)} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \right) \text{ converge vers } 0. \end{aligned}$$

4. Finalement,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} I(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ .

## Exercice III

1. Cylindre de révolution de rayon 1 et d'axe  $Oy$ .

2. (a) Domaine carré de centre le point de coordonnées  $(0, 0, \gamma)$  et de côté  $2\sqrt{1 - \gamma^2}$ , donc d'aire  $4(1 - \gamma^2)$ .

(b) Par sommation par tranches, le volume cherché vaut  $\int_{-1}^1 4(1 - z^2) dz = \frac{16}{3}$ .

3. La surface  $\Sigma$  est située dans le plan  $x = y$  dont un système de coordonnées cartésiennes en repère orthonormal est donné par  $\rho = x\sqrt{2}, z$ . La surface  $\Sigma$  est alors définie par  $0 \leq \frac{1}{2}\rho^2 + z^2 \leq 1, \rho \geq 0, z \geq 0$ ; c'est le quart d'un disque elliptique de demi-grand axe  $\sqrt{2}$  et de demi-petit axe 1. Son aire vaut  $\frac{1}{4}\pi\sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ .