

Corrigé de l'épreuve : Ubm math D
Romain Krust et Michel Quercia

Thème : Théorème de Gordan (1868)

I

1. Soit $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_0$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda x) = f(x)$. En particulier, $f(x) = f(0)$: f est une fonction constante. Réciproquement, une fonction constante est bien une fonction polynomiale homogène d'ordre 0.
2. Il est clair que $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$ est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ une famille presque nulle (ie dont tous les termes sont nuls sauf un nombre au plus fini d'entre eux) de complexes et $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha X^\alpha$. C'est un polynôme homogène d'ordre k si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (\lambda X)^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \lambda^k X^\alpha$, ou, en posant $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (\lambda^{|\alpha|} - \lambda^k) X^\alpha = 0$. Puisque $(X^\alpha)_\alpha$ est une base, c'est équivalent à $a_\alpha (\lambda^{|\alpha|} - \lambda^k) = 0$ pour tout α (et tout λ). Finalement

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k = \text{Vect}(\{X^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k\}),$$

et la dimension $d_{n,k}$ de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$ est égale au cardinal de $C = \{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| = k\}$. Donnons deux calculs de ce cardinal (bien évidemment, au concours, un seul suffit ; en fournir deux est une perte de temps et risque même, dans certains cas, de donner au correcteur le sentiment que le propos n'est pas assuré) :

1. On a

$$d_{n,k} = \sum_{r=0}^k d_{n-1,k-r} \quad \text{et} \quad d_{n,k-1} = \sum_{r=0}^{k-1} d_{n-1,k-1-r}$$

d'où $d_{n,k} = d_{n,k-1} + d_{n-1,k}$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{n,0} = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, d_{1,k} = 1$$

Sur les premiers termes du tableau des $d_{n,k}$, on voit apparaître en diagonale les lignes successives du triangles de Pascal. Une récurrence sur $n+k$ permet de confirmer que

$$d_{n,k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

2. On peut aussi constater que l'application

$$\alpha \mapsto (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + 1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + (n-2))$$

de C dans l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur $n-1$ à valeurs dans $\llbracket 0, k+n-2 \rrbracket$ est une bijection.

3. La base $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ peut être partitionnée en sous-familles $(X_\alpha)_{|\alpha|=k}$, $k \in \mathbb{N}$, et chacune est une base de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$. Donc

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_k$$

Note : la notion de somme directe d'une famille quelconque de sous-espaces est hors programme.

4. (a) Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ la matrice de u dans les bases canoniques. On a

$$f \circ u = f \left(\sum_{j=1}^m a_{1,j} X_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{n,j} X_j \right) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$$

- (b) La linéarité est immédiate. Il s'agit même d'un morphisme d'algèbre conservant le degré d'homogénéité. S'il s'agit d'un isomorphisme, il induit un isomorphisme de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_1 = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$ sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]_1 = \text{Vect}(X_1, \dots, X_m)$. En identifiant $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_1$ et $\mathbb{C}^n$ d'une part, $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]_1$ et $\mathbb{C}^m$ d'autre part, l'application induite n'est autre que u elle-même. Donc $n = m$ et u est un isomorphisme. Réciproquement, si u est un isomorphisme, l'application considérée admet pour réciproque $f \mapsto f \circ u^{-1}$.

II

1. (a) Notons tout d'abord que si cet ensemble est non vide, il est égal à l'ensemble des matrices diagonales inversibles. En effet, si ${}^t A M A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ (où λ et μ sont non nuls), alors, en notant ζ et η des racines carrées de λ et μ et en posant $B = \begin{pmatrix} u/\zeta & 0 \\ 0 & v/\eta \end{pmatrix}$, où $u, v \in \mathbb{C}^*$, on a

$${}^t (AB) M (AB) = {}^t B ({}^t A M A) B = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant qu'il est effectivement non vide. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$:

si $a \neq 0$, on a en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t A M A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (ac - b^2)/a \end{pmatrix}$;

si $c \neq 0$, on a en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b/c & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t A M A = \begin{pmatrix} (ac - b^2)/c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$;

si $a = c = 0$, on a en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ${}^t A M A = \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix}$.

- (b) Si $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, alors $\det({}^t A M A) = \det(M)$. L'ensemble cherché est donc contenu dans l'ensemble des matrices diagonales de même déterminant que M . Réciproquement, si N est diagonale et $\det(N) = \det(M)$, il existe, d'après la question précédente, $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $N = {}^t A M A$ et l'on a $\det(N) = \det(A)^2 \det(M)$ d'où $\det(A)^2 = 1$. Si $\det(A) = -1$, alors $A' = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^t A' M A' = N$ et $\det(A') = 1$.

2. (a) Ceci résulte de I.4.a. et de la linéarité de l'application $M \mapsto {}^t A M A$.
(b) C'est immédiat.

3. L'application $A \mapsto \det(A)$ étant polynomiale, il est clair que $f \circ \det$ l'est aussi. En outre, pour toute $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $\Phi^A(M) = f(\det({}^tAMA)) = f(\det(M)) = \Phi(M)$.
4. Les applications coordonnées sont continues et une somme de produits de fonctions continues est continue.
5. Posons $f(x) = \Phi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Soit $M \in \mathcal{V} \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Il existe d'après **1.b.** une matrice $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^tAMA = \begin{pmatrix} \det(M) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on a

$$\Phi(M) = \Phi^A(M) = \Phi\left(\begin{pmatrix} \det(M) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f(\det(M)).$$

Ainsi, les applications continues Φ et $f \circ \det$ coïncident sur $\mathcal{V} \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui est ¹ une partie dense de $\mathcal{V}$. Elles sont donc égales. L'unicité résulte immédiatement de la surjectivité de $\det$.

1 III

1. $\diamond$ Réflexivité : évident.
- $\diamond$ Antisymétrie : Si $\alpha \neq \beta$, on a, en notant i le plus petit entier tel que $\beta_i - \alpha_i \neq 0$, $\beta_i - \alpha_i > 0$ ou $\beta_i - \alpha_i < 0$ donc $\alpha \prec \beta$ ou $\beta \prec \alpha$.
- $\diamond$ Transitivité : Si $\alpha \prec \beta \prec \gamma$ alors, en notant i et j les plus petits indices tels que $\beta_i - \alpha_i \neq 0$ et $\gamma_j - \beta_j \neq 0$, et en supposant par exemple $i \leq j$, i est le plus petit indice tel que $\gamma_i - \alpha_i \neq 0$, et l'on a $\gamma_i - \alpha_i = (\gamma_i - \beta_i) + (\beta_i - \alpha_i) > 0$ donc $\alpha \prec \gamma$.
- $\diamond$ Ordre total : immédiat.
2. Un ensemble fini non vide et totalement ordonné possède évidemment un plus grand élément. Donc toute partie finie non vide de $\mathbb{N}^n$ possède un plus grand élément.
3. Immédiat compte tenu de $(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha$.
4. Soient $\alpha = \deg(f)$ et $\beta = \deg(g)$. L'inégalité $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$ est immédiate. Mais le produit fg ne comporte qu'un unique monôme de degré $\alpha + \beta$ car si $\alpha', \beta' \in \mathbb{N}^n$ sont tels que $\alpha' \preccurlyeq \alpha$ et $\beta' \preccurlyeq \beta$ et $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ alors $(\alpha - \alpha') = -(\beta - \beta')$ qui ne peut être non nul (le premier terme non nul serait strictement positif et strictement négatif), d'où $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \beta$. On a donc $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.
5. Montrons tout d'abord que toute partie non vide de $\mathbb{N}^n$ possède pour $\preccurlyeq$ un plus petit élément. Soit E une partie non vide de $\mathbb{N}^n$. Notons $p_i : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ l'application $x \mapsto x_i$. L'ensemble $p_1(E)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui admet un plus petit élément a_1 . Posons $E_1 = \{x \in E; p_1(x) = a_1\}$, puis $a_2 = \min(p_2(E_1))$, $E_2 = \{x \in E_1; p_2(x) = a_2\}, \dots, a_n = \min(p_n(E_{n-1}))$. L'élément $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est le plus petit élément de E .
- Prouvons maintenant l'énoncé demandé. Soient $k \geq 1$ et $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$. Supposons par l'absurde l'existence de $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ mettant l'énoncé en défaut, et notons F l'ensemble de ces fonctions polynomiales. Alors $f \in F$ ne vérifie pas elle-même le point 2. (sans quoi on peut choisir $q_1 = \dots = q_k = 0$ et $r = f$) et l'on peut poser

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \max\{\alpha \in \mathbb{N}^n; f \text{ contient un monôme de degré } \alpha \\ &\quad \text{vérifiant } \exists i \in \{1, \dots, k\}, \alpha - \deg(b_i) \geq 0\} \end{aligned}$$

1. Pour toute $M \in \mathcal{V}$, $M + \varepsilon I_2 \in \mathcal{V}$ est inversible pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ suffisamment petit en module.

D'après le lemme, on peut choisir f tel que $\alpha(f)$ soit minimal. Soit i tel que $\alpha(f) - \deg(b_i) \geq 0$. Notons a le coefficient de $X^{\alpha(f)}$ dans f et b le coefficient de $X^{\deg(b_i)}$ dans b_i et posons

$$g = f - \frac{a}{b} X^{\alpha(f) - \deg(b_i)} b_i.$$

On a clairement $g \in F$. Comme $\deg(X^{\alpha(f) - \deg(b_i)} b_i) = \alpha(f)$, les monômes intervenants dans g sont de degré $\prec \alpha(f)$. Donc $\alpha(g) \prec \alpha(f)$, ce qui est absurde.

Remarque : Il sera utile de noter que l'on peut, sans modifier la preuve, adjoindre la condition $|\deg(q_i)| < |\deg(f)|$ lorsque $f \neq 0$.

6. (a) Si $X^\beta \in I(\Lambda)$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \Lambda$ et $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$X^\beta = X^{\alpha_1} q_1 + \dots + X^{\alpha_s} q_s$$

et l'un des q_i comporte un monôme de degré γ tel que $\beta = \alpha_i + \gamma$. Donc $\beta - \alpha_i \in \mathbb{N}^n$.

Réciproquement, s'il existe $\alpha \in I(\Lambda)$ tel que $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $X^\beta = X^{\beta - \alpha} X^\alpha \in I(\Lambda)$.

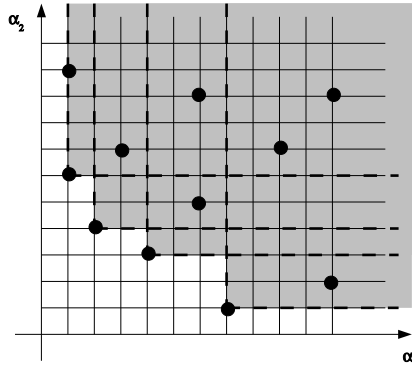
- (b) Si $f \in I(\Lambda)$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \Lambda$ et $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$f = X^{\alpha_1} q_1 + \dots + X^{\alpha_s} q_s$$

et chaque monôme X^β de f est monôme de l'un des $X^{\alpha_i} q_i$. Comme ci-dessus, $\beta - \alpha_i \in \mathbb{N}^n$.

La réciproque est évidente.

- (c) Le diagramme suivant, pour $n = 2$, illustre l'existence d'une telle partie finie (les points noirs sont les éléments de Λ et les zones grisées correspondent aux β tels que $X^\beta \in I(\Lambda)$).



Raisonnons par récurrence sur n , en supposant $\Lambda \neq \emptyset$ (le cas contraire est trivial). L'hypothèse de récurrence sera :

$$H_n : \text{Pour toute } \Lambda \subset \mathbb{N}^n, \text{ il existe } \Lambda_0 \text{ finie telle que } \Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0 + \mathbb{N}^n$$

◊ H_1 est vraie : Il suffit de prendre $\Lambda_0 = \{\min(\Lambda)\}$.

◊ Si $n \geq 2$ et H_{n-1} est vrai : On va montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \beta \in \Lambda, \exists \alpha \in \Lambda; \alpha_n \leq M \text{ et } \beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$$

La conclusion en découlera en raisonnant ainsi : on choisit un tel M et on pose $\Lambda_{n-1} = \{\alpha \in \Lambda; \alpha_n \leq M\}$. On a alors $\Lambda_{n-1} \subset \Lambda \subset \Lambda_{n-1} + \mathbb{N}^n$. On construit ensuite, de la même façon,

$M' \in \mathbb{N}$ tel que, en posant $\Lambda_{n-2} = \{\alpha \in \Lambda_1, \alpha_{n-1} \leq M'\}$, on ait $\Lambda_{n-2} \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_{n-2} + \mathbb{N}^n$, etc. Alors $\Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_0 + \mathbb{N}^n$ et $\Lambda_0 \subset \llbracket 1, M^{(n-1)} \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, M' \rrbracket \times \llbracket 1, M \rrbracket$ est fini.

Prouvons maintenant l'existence de M . À chaque $\alpha \in \Lambda$, associons $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ et posons $\Lambda' = \{\alpha', \alpha \in \Lambda\}$. Il existe, d'après H_{n-1} , Λ'_0 fini tel que $\Lambda'_0 \subset \Lambda' \subset \Lambda'_0 + \mathbb{N}^{n-1}$. Il suffit alors de choisir M tel que, pour tout $\beta \in \Lambda'_0$, il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que $\alpha' = \beta$ et $\alpha_n \leq M$.

7. On peut supposer $I \neq \{0\}$. Soit $\Lambda = \{\deg(f), f \in I \setminus \{0\}\}$ et $\Lambda_0 \subset \Lambda$ une partie finie telle que $I(\Lambda_0) = I(\Lambda)$. Soient $b_1, \dots, b_s \in I \setminus \{0\}$ tels que $\Lambda_0 = \{\deg(b_k), 1 \leq k \leq s\}$ et J l'idéal engendré par $b_1, \dots, b_s$. Soit $f \in I \setminus \{0\}$: il existe $q_1, \dots, q_s$ et r comme dans 5.. Alors $r \in I$ d'après le premier point et, si $r \neq 0$, $\deg(r) \in \Lambda$. Par 6.a., $\deg(r) - \deg(b_i) \in \mathbb{N}^n$ pour un certain $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, ce qui contredit le second point de 5.. Donc $r = 0$, $f \in J$ et $I = J$.
8. Soit F une partie finie de I qui engendre I . Il existe $r \geq 0$ tel que tous les éléments de F appartiennent à l'idéal engendré par $f_0, \dots, f_r$. L'idéal engendré par $f_0, \dots, f_r$ est I .

IV

1. (a) Proviens immédiatement de la linéarité de l'application $(u, v) \mapsto A(u, v)$ et de I.4.b..
(b) L'application Φ^A est polynomiale car composée de $f \mapsto f^A$ qui est linéaire et de Φ qui est polynomiale (I.4.b). La linéarité de $\Phi \mapsto \Phi^A$ est évidente.
2. La remarque faite en I.4.b. montre que si Φ est homogène de d'ordre k , Φ^A aussi.
3. Il s'agit d'une partition de la base canonique $(X^\nu)_{|\nu|=k}$ de $\mathcal{E}_{m,k}$. Noter que le nombre de valeurs de p pour lesquels $\mathcal{E}_{m,k,p} \neq \{0\}$ est fini car un tel p vérifie $p \leq km$.
4. On posera pour $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$, $\|\nu\| = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + m\nu_m$.
(a) On a clairement, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^{m+1}$, $|\deg(X_{i-1}D_i(X^\nu))| = k$ et $\|\deg(X_{i-1}D_i(X^\nu))\| = \|\deg(X^\nu)\| + 1$ (lorsque $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$), ainsi que $|\deg(X_{i+1}D_i(X^\nu))| = k$ et $\|\deg(X_{i+1}D_i(X^\nu))\| = \|\deg(X^\nu)\| + 1$ (lorsque $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$). Les inclusions demandées en résultent.
(b) Notons $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{[0,m]}$ (le terme 1 correspondant à l'indice i). Soit $\nu \in \mathbb{N}^{[0,m]}$ tel que $|\nu| = k$ et $\|\nu\| = p$. On a (on note $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon) :

$$\begin{aligned} DD'(X^\nu) &= D \left(\sum_{j=0}^{m-1} (m-j) \nu_j X^{\nu+e_{j+1}-e_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j) \nu_j (\nu_i + \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}) X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(DD' - D'D)(X^\nu) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j) [\nu_j(\nu_i + \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}) \\
&\quad - \nu_i(\nu_j + \delta_{j,i-1} - \delta_{i,j})] X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)(\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j})(\nu_j - \nu_i) X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m-1} i(m-j)\delta_{i,j+1}(\nu_j - \nu_i) X^{\nu+e_{j+1}-e_j+e_{i-1}-e_i} \\
&= \sum_{i=1}^m i(m-i+1)(\nu_{i-1} - \nu_i) X^\nu \\
&= \sum_{i=0}^m (m-2i)\nu_i X^\nu \\
&= (mk - 2p)X^\nu
\end{aligned}$$

On conclut par linéarité.

- (c) On procède par récurrence sur r . Le cas $r = 1$ vient d'être établi. Supposons (1) vraie pour un certain $r \geq 1$. Alors, pour tout $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$, $D^r(\Phi) \in \mathcal{E}_{m,k,p-r}$ si $r \leq p$ et $D^r(\Phi) = 0$ si $r > p$. Donc

$$\begin{aligned}
(D^{r+1}D' - D'D^{r+1})(\Phi) &= D(D^rD' - D'D^r)(\Phi) + (DD' - D'D)D^r(\Phi) \\
&= r(mk - 2p + r - 1)D^r(\Phi) + (mk - 2(p - r))D^r(\Phi) \\
&= (r + 1)(mk - 2p + r)D^r(\Phi)
\end{aligned}$$

La relation (2) se prouve de façon similaire.

- (d) Soit $\Phi \in E_{mkp} \setminus \{0\}$. Alors, d'après la remarque faite en 3., on a $p \leq km$ et, par 4a., $D^{km+1}(\Phi) = D'^{km+1}(\Phi) = 0$. Les endomorphismes induits par D et D' sur $\mathcal{E}_{m,k}$ sont donc nilpotents. Soient maintenant $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,p}$ tel que $D(\Phi) = 0$ et r minimal tel que $D'^r(\Phi) = 0$. Alors, d'après (2), $r(r-1)D'^{r-1}(\Phi) = 0$, d'où $r \leq 1$ et $D'(\Phi) = 0$. La réciproque est similaire.
5. (a) Pour $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a $e_i(A(u, v)) = e_i(\lambda u, \lambda^{-1}v) = \lambda^{m-2i}e_i(u, v)$, c'est-à-dire

$$e_i^A = \lambda^{m-2i}e_i.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\Phi^A(x_0, \dots, x_m) &= \Phi \left(\left(\sum_{i=0}^m x_i e_i \right)^A \right) = \Phi \left(\sum_{i=0}^m x_i e_i^A \right) \\
&= \Phi \left(\sum_{i=0}^m \lambda^{m-2i} x_i e_i \right) = \Phi(\lambda^m x_0, \lambda^{m-2} x_1, \dots, \lambda^{-m} x_m)
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\Phi = X^\alpha$ (où $|\alpha| = k$; rappelons aussi que l'on a posé $\|\alpha\| = \sum_{i=0}^m i\alpha_i$) :

$$\Phi^A = \lambda^{\sum_{i=0}^m \alpha_i(m-2i)} \Phi = \lambda^{mk-2\|\alpha\|} \Phi$$

Puisque les $(X^\alpha)_{|\alpha|=k}$ forment une base de $\mathcal{E}_{m,k}$, on a $\Phi^A = \Phi$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si $\Phi \in \text{Vect}\{X^\alpha, |\alpha| = k, 2\|\alpha\| = mk\}$, c'est-à-dire si mk est pair (faute de quoi cet espace serait réduit à $\{0\}$) et $\Phi \in \mathcal{E}_{m,k,mk/2}$.

(b) Posons plutôt $A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a ici :

$$e_i(A_\mu(u, v)) = e_i(u + \mu v, v) = \binom{m}{i} (u + \mu v)^{m-i} v^i = \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} u^{m-i-j} (\mu v)^j v^i,$$

c'est-à-dire :

$$e_i^{A_\mu} = \sum_{j=0}^{m-i} \binom{i+j}{i} \mu^j e_{i+j}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Phi^{A_\mu}(x_0, \dots, x_m) &= \Phi \left(\sum_{i=0}^m x_i e_i^{A_\mu} \right) \\ &= \Phi \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{i+j}{j} \mu^j x_i e_{i+j} \right) \\ &= \Phi \left(\sum_{k=0}^m \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j x_{k-j} \right) e_k \right) \\ &= \Phi(x_0, \mu x_0 + x_1, \mu^2 x_0 + 2\mu x_1 + x_2, \dots, \\ &\quad \mu^m x_0 + m\mu^{m-1} x_1 + \frac{m(m-1)}{2} \mu^{m-2} x_2 + \dots + x_m) \end{aligned}$$

Pour $\Phi = X^\alpha$, il vient :

$$\Phi^{A_\mu}(x_0, \dots, x_m) = \prod_{k=0}^m \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j x_{k-j} \right)^{\alpha_k}$$

Or

$$\frac{d}{d\mu} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j x_{k-j} \right) = k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \mu^j x_{(k-1)-j}.$$

On a donc :

$$\frac{d}{d\mu} (\Phi^{A_\mu}(x_0, \dots, x_m)) = D(\Phi)^{A_\mu}$$

Cette relation est, par linéarité, valable pour toute $\Phi \in \mathcal{E}_m$. On a donc $\Phi^{A_\mu} = \Phi$ quel que soit μ si et seulement si $D(\Phi)^{A_\mu} = 0$ quel que soit μ , c'est-à-dire si et seulement si $D(\Phi) = 0$.

(c) C'est un calcul similaire.

6. (a) C'est un sous-espace vectoriel parce que $\Phi \mapsto \Phi^A$ est linéaire. C'est aussi un sous-anneau parce que cette application est un morphisme d'anneau ($(\Phi\Psi)^A = \Phi^A\Psi^A$ et $1^A = 1$). De manière plus synthétique, $\mathcal{J}_m$ est une sous-algèbre (unitaire) de $\mathcal{E}_m$ car $\Phi \mapsto \Phi^A$ est un morphisme d'algèbres (unitaires).

- (b) Soit $\Phi \in \mathcal{J}_m$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\Phi_k)_k \in \prod_{k=0}^N \mathcal{E}_{m,k}$ tels que $\Phi = \sum_{k=0}^N \Phi_k$ et l'on a :

$$\Phi = \Phi^A = \sum_{k=0}^N \Phi_k^A$$

Or $\mathcal{E}_{m,k}$ étant stable par $\Phi \mapsto \Phi^A$, on a $\Phi_k^A \in \mathcal{E}_{m,k}$ d'où $\Phi_k = \Phi_k^A$ et $\Phi_k \in \mathcal{J}_{m,k}$. Ainsi l'on a bien

$$\mathcal{J}_m = \bigoplus_k \mathcal{J}_{m,k}$$

7. (a) C'est immédiat par **5.a**.

(b) Notons que, pour toutes $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $\Phi^{AB} = (\Phi^B)^A$. Soit alors $A \in GL_2(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{C}^*$ une racine carrée de $\det(A)$ et $B = \frac{1}{d}A$ (donc $B \in SL_2(\mathbb{C})$). On a, pour toute $\Phi \in \mathcal{J}_{m,k}$:

$$\Phi^A = \Phi^{(dI_2)B} = (\Phi^B)^{dI_2} = \Phi^{dI_2}.$$

Or, pour toute $f \in \mathcal{B}_m$,

$$\Phi^{dI_2}(f) = \Phi(f \circ (dI_2)) = \Phi(d^m f) = d^{mk} \Phi(f).$$

On a bien

$$\Phi^A = \det(A)^{mk/2} \Phi.$$

V

1. L'application F est polynomiale d'après **I.4.a**. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a

$$F(A) = G(AB) = G(ax + bz, ay + bt, cx + dz, cy + dt)$$

donc $D_d F(A) = (zD_c G + tD_d G)(AB)$ et

$$D_a D_d F(A) = (xzD_a D_c G + yzD_b D_c G + xtD_a D_d G + ytD_b D_d G)(AB).$$

De même

$$D_b D_c F(A) = (xzD_a D_c G + xtD_b D_c G + yzD_a D_d G + ytD_b D_d G)(AB)$$

d'où

$$\Omega(F)(A) = (xt - yz)(D_a D_d G - D_b D_c G)(AB) = \det(B)\Omega(G)(AB)$$

2. (a) Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pour $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a

$$e_i^A(u, v) = e_i(A(u, v)) = \binom{m}{i} (au + bv)^{m-i} (cu + dv)^i.$$

En développant cette expression, on voit qu'il existe des applications $p_{j,i} \in \mathcal{P}$ telles que

$$e_i^A = \sum_{j=0}^m p_{j,i}(a, b, c, d) e_j.$$

Pour $f = \sum_{i=0}^m x_i e_i$, il vient

$$f^A = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^m p_{j,i}(a, b, c, d) x_i \right) e_j$$

et

$$\Phi(f^A) = \Phi \left(\sum_{i=0}^m p_{0,i}(a, b, c, d) x_i, \sum_{i=0}^m p_{1,i}(a, b, c, d) x_i, \dots, \sum_{i=0}^m p_{m,i}(a, b, c, d) x_i \right)$$

Il est maintenant clair que $A \mapsto \Phi(f^A) \in \mathcal{P}$ et $G_f \in \mathcal{P}$.

(b) Notons $\text{Deg}(P) = |\deg(P)|$ le degré total d'un polynôme P . On a clairement $\text{Deg}(\Omega^q(G_f)) \leq 0$ dès que $2q \geq \text{Deg}(G_f)$. Or les applications $p_{j,i}$ ci-dessus étant de degré total m , on a $\text{Deg}(G_f) \leq m\text{Deg}(\Phi) + 2r$. Aussi $\Omega^q(G_f)$ est-il indépendant de A dès que $2q \geq m\text{Deg}(\Phi) + 2r$.

(c) Soient $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{B}_m$. On a, pour tout $M \in \text{M}_2(\mathbb{C})$,

$$G_{fA}(M) = \Phi((f^A)^M) \det(M)^r = \Phi(f^{AM}) \det(AM)^r \det(A)^{-r} = G_f(AM) \det(A)^{-r}$$

et, par 1.,

$$\Omega^q(G_{fA})(M) = \Omega^q(G_f)(AM) \det(A)^q \det(A)^{-r} = \Omega^q(G_f)(M) \det(A)^{q-r}$$

On a bien

$$\Theta(f^A) = \Theta(f) \det(A)^{q-r}$$

L'appartenance de Θ à $\mathcal{J}_m$ en découle immédiatement.

3. De $G(A) = (ad - bc)^q$, on déduit aisément $\Omega(G)(A) = q(q+1) \det(A)^{q-1}$ puis

$$\Omega^q(G)(A) = (q+1) \times q!^2$$

4. Si mk est impair, alors $\Psi = 0$ d'après IV.7.a.. On peut dans ce cas prendre $\Phi = 0$, $q = r = 0$.

Si mk est pair, posons $q = mk/2$, $r = 0$ et $\Phi = \frac{1}{(q+1)q!^2} \Psi$. Alors, d'après IV.7.b.,

$$\Phi^A = \frac{1}{(q+1)q!^2} \det(A)^q \Psi$$

et, pour toute $f \in \mathcal{B}_m$,

$$G_f(A) = \Phi^A(f) = \frac{1}{(q+1)q!^2} \det(A)^q \Psi(f)$$

Par 3., il vient

$$\Omega^q(G_f) = \Psi(f)$$

5. **Étape 1.** Montrons qu'il suffit d'établir l'énoncé sous l'hypothèse additionnelle qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ et $(\ell_i)_{1 \leq i \leq r} \in \llbracket 0, s \rrbracket^r$ tels que $\Psi_i \in \mathcal{J}_{m, \ell_i}$, $\Phi_i \in \mathcal{E}_{m, s-\ell_i}$ (et par conséquent $\Psi \in \mathcal{E}_{m, s}$).

Posons en effet, dans le cas général :

$$\Phi_i = \sum_k \Phi_{i,k}, \quad \Phi_{i,k} \in \mathcal{E}_{m,k} \quad \text{et} \quad \Psi_i = \sum_\ell \Psi_{i,\ell}, \quad \Psi_{i,\ell} \in \mathcal{J}_{m,k}.$$

On a

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \left(\sum_k \Phi_{i,k} \right) \left(\sum_\ell \Psi_{i,\ell} \right) = \sum_s \sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k} \Psi_{i,\ell}$$

Ainsi, $\sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k} \Psi_{i,\ell}$ est la partie homogène d'ordre s de Ψ . Celle-ci appartient $\mathcal{J}_{m,s}$. D'après l'hypothèse, il existe $\Pi_{i,k} \in \mathcal{J}_m$ tel que

$$\sum_i \sum_{k+\ell=s} \Phi_{i,k} \Psi_{i,\ell} = \sum_i \sum_{k+\ell=s} \Pi_{i,k} \Psi_{i,\ell}$$

et on en déduit

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \left(\sum_k \Pi_{i,k} \right) \Psi_i$$

qui montre que $\Pi_i = \sum_k \Pi_{i,k}$ convient.

Étape 2. Supposons maintenant l'existence de $s \in \mathbb{N}$ et $(\ell_i)_{1 \leq i \leq r} \in \llbracket 0, s \rrbracket^r$ tels que $\Psi_i \in \mathcal{J}_{m, \ell_i}$ et $\Phi_i \in \mathcal{E}_{m, s-\ell_i}$. On a $\Psi \in \mathcal{J}_{m, s}$. Si ms est impair, alors $\Psi = 0$ et $\Pi_i = 0$ conviennent. Supposons ms pair et posons $q = \frac{ms}{2}$. On a :

$$\Psi(f^A) = \sum_{i=1}^r \Phi_i(f^A) \Psi_i(f^A)$$

donc, par **IV.7.b.**,

$$\Psi(f) \det(A)^q = \sum_{i=1}^r \Phi_i(f^A) \det(A)^{m\ell_i/2} \Psi_i(f)$$

En appliquant Ω^q , il vient :

$$(q+1)q!^2 \Psi(f) = \sum_{i=1}^r \Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2})(A) \Psi_i(f)$$

Or, $M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2}$ est homogène de degré $m(s-\ell_i) + 2m\ell_i/2 = 2q$. Donc $\Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2})$ est indépendante de M et, d'après **V.2.c.**,

$$\Pi_i : f \mapsto \frac{1}{(q+1)q!^2} \Omega^q(M \mapsto \Phi_i(f^M) \det(M)^{m\ell_i/2})$$

appartient à $\mathcal{J}_m$. On a en outre :

$$\Psi = \sum_{i=1}^r \Pi_i \Psi_i$$

6. Soit I l'idéal de $\mathcal{E}_m$ engendré par $\bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{J}_{m,k}$. Par **III.7.**, I admet une famille génératrice finie $\Psi_1, \dots, \Psi_r$. Soit $\Psi \in \mathcal{J}_m$. Il existe $\Phi_1, \dots, \Phi_m \in \mathcal{E}_m$ tels que

$$\Psi = \Psi(0) + \sum_{i=1}^r \Phi_i \Psi_i$$

La remarque faite en **III.5.** montre que l'on peut choisir Φ_i vérifiant $\text{Deg}(\Phi_i) < \text{Deg}(\Psi)$ (si $\Psi \neq 0$). Il existe, d'après **5.**, $\Pi_1, \dots, \Pi_r \in \mathcal{J}_m$ tels que

$$\Psi = \Psi(0) + \sum_{i=1}^r \Pi_i \Psi_i$$

L'examen de la preuve de **5.** montre que $\text{Deg}(\Pi_i) \leq \text{Deg}(\Phi_i)$ donc $\text{Deg}(\Pi_i) < \text{Deg}(\Psi)$ (si $\Psi \neq 0$). En appliquant ce même procédé aux polynômes Π_i on obtient, en un nombre fini d'étapes, une expression de Ψ de la forme $f(\Psi_1, \dots, \Psi_r)$.