

e3a Épreuve de Mathématiques A MP

Corrigé rédigé par Philippe Patte

Partie I

1. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + cy = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue en y' , à coefficients continus sur I , admet une solution unique sur I qu'on peut calculer, par exemple, par la méthode de variation de la constante.

On peut aussi remarquer que $g : x \mapsto \varphi(f)(x) \cdot e^{cx}$ est dérivable sur I et que

$$\forall x \in I, g'(x) = e^{cx}(c\varphi(f)(x) + \varphi(f)'(x)) = e^{cx}f(x).$$

Comme $g(0) = 0 : \forall x \in I, g(x) = \int_0^x e^{ct} f(t) dt$; ce qui montre la formule annoncée.

2. $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est continue, donc $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
La linéarité découle de la formule du I1 et de la linéarité de l'intégrale. On peut aussi la démontrer à l'aide du principe de superposition.

Partie II

1. Vu en cours : $\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty$.
2. Soit $x \in I$.
$$|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx} \int_{[0,x]} e^{ct} |f(t)| dt \leq e^{-cx} \left| \int_0^x e^{ct} dt \right| \|f\|_\infty = \frac{1}{c} |1 - e^{-cx}| \|f\|_\infty \leq \frac{\max(|1 - e^{-ca}|, |1 - e^{-cb}|)}{c} \|f\|_\infty.$$

Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \frac{\max(|1 - e^{-ca}|, |1 - e^{-cb}|)}{c} \|f\|_\infty$.
3. $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx} \int_{[0,x]} e^{ct} |f(t)| dt \leq e^{-ca} \int_{[0,x]} e^{cb} |f(t)| dt \leq e^{c(b-a)} \int_{[a,b]} |f(t)| dt = e^{c(b-a)} \|f\|_1$.
Par intégration, on en déduit que $\|\varphi(f)\|_1 \leq (b-a) \cdot e^{c(b-a)} \|f\|_1$.
4. En combinant les questions II 1 et 4, on obtient $|\varphi(f)(x)| \leq \sqrt{b-a} e^{c(b-a)} \|f\|_2$.
On en déduit que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{b-a} e^{c(b-a)} \|f\|_2$.
5. Comme φ est une application linéaire, les inégalités établies aux questions 2, 3 et 4 assurent que l'application φ de $\mathcal{C}^0([a,b])$ dans lui-même est continue lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, de la norme $\|\cdot\|_1$ ou de la norme $\|\cdot\|_2$.

Partie III

1. On utilise la formule du I 1. Si $\lambda \neq c$, $\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c - \lambda}$; sinon, $\varphi(f_\lambda)(x) = x e^{-cx}$.
2. Dans tous les cas, les fonctions f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont positives, continues sur $I = [0, +\infty[$ et négligeables au voisinage de $+\infty$ devant $\frac{1}{x^2}$, donc intégrables sur I .
On obtient facilement $\|f_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \frac{1}{c\lambda}$.
3. Le même raisonnement donne $\|f_\lambda\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda c(\lambda + c)}}$.
4. La restriction de φ à $L^1(I)$, encore notée φ , est linéaire.

Soit $f \in L^1(I)$. On montre que $\varphi(f)$ (qui est continue) est intégrable en montrant que $\int_0^X |\varphi(f)(x)| dx$ est majorée quand X décrit I .

Le théorème de Fubini sur un domaine triangulaire (donc élémentaire) assure que

$$\int_0^X |\varphi(f)(x)| dx \leq \int_0^X e^{-cx} \int_0^x e^{ct} |f(t)| dt dx = \int_0^X \left(\int_0^x e^{c(t-x)} |f(t)| dt \right) dx = \int_0^X \left(\int_t^X e^{c(t-x)} |f(t)| dx \right) dt$$

Donc $\int_0^X |\varphi(f)(x)| \, dx \leq \int_0^X \frac{1 - e^{c(t-X)}}{c} |f(t)| \, dt \leq \int_0^X \frac{1}{c} |f(t)| \, dt \leq \frac{1}{c} \int_0^{+\infty} |f(t)| \, dt = \frac{1}{c} \|f\|_1.$

On en déduit que $\varphi(f)$ est intégrable sur I et que $\|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c} \|f\|_1.$

Autrement dit, $\varphi(f)$ est dans $L^1(I)$ et φ est un endomorphisme de $L^1(I).$

L'inégalité $\|\varphi(f)\|_1 \leq \frac{1}{c} \|f\|_1$, valable pour tout $f \in L^1(I)$, assure la continuité de l'endomorphisme φ sur $L^1(I).$

De plus, $\|\varphi\|_1 \leq \frac{1}{c}.$

Comme $\frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_1}{\|f_\lambda\|_1} = \frac{1}{c}$, $\|\varphi\|_1 = \frac{1}{c}.$

5. En multipliant l'égalité $f = g' + cg$ par g et en intégrant entre 0 et X , on obtient

$$\forall X > 0, \frac{g^2(X)}{2} + c \int_0^X g^2(t) \, dt = \int_0^X f(t)g(t) \, dt.$$

On en déduit que : $c \int_0^X g^2(t) \, dt \leq \int_0^X f(t)g(t) \, dt \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2 \, dt} \sqrt{\int_0^X g(t)^2 \, dt}.$

Donc $c \sqrt{\int_0^X g^2(t) \, dt} \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2 \, dt}$, que $\sqrt{\int_0^X g(t)^2 \, dt}$ soit nul ou non.

Finalement, si f est dans $L^2(I)$, on a $\forall X > 0, \sqrt{\int_0^X g^2(t) \, dt} \leq \frac{1}{c} \|f\|_2.$ Comme g^2 est continue et positive, cette majoration assure l'intégrabilité de g^2 , donc l'appartenance de g à $L^2(I)$: φ est un endomorphisme de $L^2(I).$

On obtient de plus la majoration $\|g\|_2 = \|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c} \|f\|_2$, qui traduit la continuité de φ sur $L^2(I).$ On a également $\|\varphi\|_2 \leq \frac{1}{c}.$

Comme $\frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \frac{1}{\sqrt{c(c+\lambda)}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{c}$, on a finalement $\|\varphi\|_2 = \frac{1}{c}.$

Partie IV

1. Soit f dans $G.$

On doit montrer que $g = \varphi(f)$ est dans $G.$

Sur $] -R, R[$, f est somme d'une série entière de rayon de convergence ρ au moins égal à $R.$ Il en est de même de la fonction $t \mapsto e^{ct}$ (qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$). Donc, sur $] -R, R[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{ct}$ est somme de la série entière produit, dont le rayon de convergence ρ' est au moins égal à $\min(\rho, +\infty) = \rho.$

Par primitivation, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{ct} \, dt$ est développable en série entière sur $] -R, R[$, la série entière ayant pour rayon de convergence $\rho'.$

Enfin, par produit avec la fonction $x \mapsto e^{-cx}$, qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, g est développable en série entière sur $] -R, R[$, la série entière ayant un rayon de convergence au moins égal à $\rho'.$

2. $\forall x \in] -R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$

Comme la somme d'une série entière est dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$\forall x \in] -R, R[$$
, $\varphi(f)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}x^n$; donc $\forall x \in] -R, R[$, $\varphi(f)'(x) + c\varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)b_{n+1} + cb_n]x^n.$

Par unicité du développement en série entière, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n+1)b_{n+1} + cb_n.$

En notant $u_n = (-1)^n \frac{n!b_n}{c^n}$, la relation précédente s'écrit $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} \frac{n!a_n}{c^{n+1}}.$

Comme $b_0 = \varphi(f)(0) = 0$, $u_0 = 0.$

Donc $u_N = \sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n+1} \frac{n!a_n}{c^{n+1}}.$ Finalement, $b_N = \sum_{n=0}^{N-1} (-c)^{N-n-1} \frac{n!}{N!} a_n.$

Partie V

1. (a) Vu en cours : le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est intégrable sur I .
 (b) Vérification élémentaire.
 (c) C'est la norme associée au produit scalaire ϕ .
2. Comme φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$, on peut trouver β dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq \beta \|f\|_2.$$

- (a) Soit f dans $L^2(I)$. Par hypothèse, $\varphi(f)$ est dans $L^2(I)$, qui est un espace vectoriel, donc $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est dans $L^2(I)$. Donc $\varphi(f)$ est dans $H(I)$, et vaut 0 en 0, donc est dans K .
 De plus, $\|\varphi(f)'\|_2 \leq \|f\|_2 + c \|\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2 + c\beta \|f\|_2 = (1 + c\beta) \|f\|_2$;
 donc $\|\varphi(f)\|_H^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2 \leq \beta^2 \|f\|_2^2 + (1 + c\beta)^2 \|f\|_2^2$.
 Finalement, avec $A = \sqrt{\beta^2 + (1 + c\beta)^2}$, qui est indépendant de f , $\|\varphi(f)\|_H \leq A \|f\|_2$.
- (b) Tout d'abord, φ est une application linéaire de $L^2(I)$ dans K .
 Si $\varphi(f) = 0$, alors $f = \varphi(f)' + c\varphi(f) = 0$. Donc φ est injectif (c'est valable sur $\mathcal{C}^0(I)$).
 Soit g dans K . On pose $f = g' + cg$. Alors f est continue et appartient à $L^2(I)$ (par combinaison linéaire d'éléments de $L^2(I)$). De plus, comme $g(0) = 0$, $g = \varphi(f)$.
 Donc φ est surjective de $L^2(I)$ dans K .
 Finalement, φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K .
- (c) L'inégalité de la question 2.a assure la continuité de l'application linéaire φ de $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ dans $(K, \|\cdot\|_H)$.
- (d) Soit g dans K . D'après la question 2.b, $\varphi^{-1}(g) = g' + cg$.
 Donc $\|\varphi^{-1}(g)\|_2 \leq \|g'\|_2 + c \|g\|_2 \leq \|g\|_H + c \|g\|_H = (1 + c) \|g\|_H$.
 Cette inégalité assure la continuité de l'application linéaire φ^{-1} de $(K, \|\cdot\|_H)$ dans $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$.

Partie VI

1. La solution générale de l'équation $y' + cy = f$ s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation $y' + cy = 0$ (soit $x \mapsto k e^{-cx}$ avec k constante réelle) et d'une solution particulière de l'équation complète, par exemple $\varphi(f)$. Elle s'écrit donc

$$y : x \mapsto k e^{-cx} + \varphi(f)(x) \text{ avec } k \text{ constante réelle.}$$

On écrit que y est 2π -périodique si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = y(x + 2\pi)$. Après simplification de l'égalité, on obtient :

y est 2π -périodique si et seulement si $k = \dots$ (une quantité indépendante de x !!!).

Mais il y a mieux. Si y est solution de l'équation différentielle, comme f est 2π -périodique, on vérifie facilement que $z : x \mapsto y(x + 2\pi)$ est aussi solution.

Alors y est 2π -périodique si et seulement si $y(0) = z(0)$, soit encore $y(0) = y(2\pi)$, soit encore

$$k = \frac{e^{-2\pi c}}{1 - e^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} e^{ct} f(t) dt.$$

D'où l'existence et l'unicité demandée.

Alors $\psi(f)(0) = k = \dots$

Tout d'abord, ψ est linéaire ; ça se voit facilement, par linéarité de l'intégrale, sur l'expression de $\psi(f)$:

$$\psi(f)(x) = \frac{e^{-2\pi c}}{1 - e^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} e^{ct} f(t) dt \cdot e^{-cx} + \varphi(f)(x).$$

On peut aussi le prouver en invoquant le principe de superposition.

Ensuite, ψ est bien à valeurs dans F par construction.

Enfin ψ est bijective de E dans F . La preuve est identique à celle donnée à la question V 2b pour φ .

Donc ψ est un isomorphisme de E dans F .

2. Comme $f = \psi(f)' + c\psi(f)$, on obtient, par linéarité de c_k :
 $c_k(f) = c_k(\psi(f)') + c.c_k(\psi(f)) = ik.c_k(\psi(f)) + c.c_k(\psi(f)) = (c + ik)d_k(f).$

3. La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ converge et $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2$. C'est la formule de Parseval, utilisable avec f dans E .

Pour g dans F : $\|g\|_F^2 = \|g\|_E^2 + \|g'\|_E^2$.

En appliquant à g et à g' le résultat précédent, on obtient :

$$\|g\|_F^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(g)|^2 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(g')|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(g)|^2 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |ikc_k(g)|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2) |c_k(g)|^2.$$

Soit f dans E .

$$\text{Alors } \|\psi(f)\|_F^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2) |d_k(f)|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1+k^2}{c^2+k^2} |c_k(f)|^2.$$

Or l'application $x \mapsto \frac{1+x}{c^2+x}$ est monotone sur $\mathbb{R}^+$ (croissante si $c \geq 1$, décroissante si $c \leq 1$). Donc pour $x \geq 0$, la quantité $\frac{1+x}{c^2+x}$ est comprise entre la valeur en 0 (soit $\frac{1}{c^2}$) et la limite en $+\infty$ (soit 1).

Donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{1+k^2}{c^2+k^2}$ est compris entre les constantes 1 et $\frac{1}{c^2}$.

On en déduit que $\|\psi(f)\|_F^2$ est compris entre $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2$ et $\frac{1}{c^2} \|f\|_E^2$.

Finalement, $\frac{\|\psi(f)\|_F}{\|f\|_E}$ est compris entre 1 et $\frac{1}{c}$:

$$\forall f \in E, f \neq 0, \min(1, \frac{1}{c}) \leq \frac{\|\psi(f)\|_F}{\|f\|_E} \leq \max(1, \frac{1}{c}).$$

4. L'inégalité de droite assure la continuité de l'application linéaire ψ de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

On peut réécrire l'inégalité de gauche :

$$\forall g \in F, g \neq 0, \frac{\|\psi^{-1}(g)\|_E}{\|g\|_F} \leq \max(1, c).$$

Donc l'application linéaire ψ^{-1} est continue de $(F, \|\cdot\|_F)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$.