CAPES interne de Mathématiques
session 2003

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag55e]

PREMIER PROBLÈME

Un concours de tir au pistolet entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chacun des compétiteurs, en un tir visant à atteindre une cible. Les deux compétiteurs tirent simultanément, chacun d'eux disposant de sa cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire.

N.B. : il n'est pas nécessaire que le candidat explicite un espace probabilisé correspondant à cette expérience.

On suppose que cette expérience aléatoire est telle que :

1° à chaque épreuve :

(i) le compétiteur A a la probabilité $\frac{2}{3}$ de toucher sa cible,

(ii) le compétiteur B a la probabilité $\frac{1}{2}$ de toucher sa cible,

(iii) les résultats obtenus par A et par B sont indépendants l'un de l'autre ;

2° toutes les épreuves sont mutuellement indépendantes.

À l'issue de chaque épreuve, il faut avoir touché sa cible pour être autorisé à poursuivre le concours ; sinon, on est éliminé. Le concours cesse lorsque les deux compétiteurs ont été éliminés.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère les événements suivants :

A_n : à l'issue de la n^e épreuve, seul le compétiteur A n'est pas éliminé ;

B_n : à l'issue de la n^e épreuve, seul le compétiteur B n'est pas éliminé ;

C_n : à l'issue de la n^e épreuve, aucun compétiteur n'est éliminé ;

D_n : à l'issue de la n^e épreuve, les deux compétiteurs sont éliminés.

On convient en outre que C_0 désignera l'événement certain, et que A_0, B_0, D_0 désigneront l'événement impossible.

D'autre part : E et F étant deux événements quelconques associés à cette expérience :

– on désignera par $p(E)$ (respectivement $p(F)$) la probabilité de l'événement E (respectivement F) ;

– on utilisera la notation habituelle $p(E/F)$ pour désigner la probabilité conditionnelle de E sachant F.

On convient enfin de poser, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $p(D_{n+1}/D_n) = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre d'épreuves à l'issue desquelles intervient la première élimination.

1. Déterminer les 12 probabilités conditionnelles suivantes :

$$\begin{array}{cccc} p(A_{n+1}/A_n) & p(B_{n+1}/A_n) & p(C_{n+1}/A_n) & p(D_{n+1}/A_n) \\ p(A_{n+1}/B_n) & p(B_{n+1}/B_n) & p(C_{n+1}/B_n) & p(D_{n+1}/B_n) \\ p(A_{n+1}/C_n) & p(B_{n+1}/C_n) & p(C_{n+1}/C_n) & p(D_{n+1}/C_n) \end{array}$$

2. On note T la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le numéro de l'épreuve à l'issue de laquelle a lieu la première élimination. Pour tout entier naturel n non nul, l'événement « la première élimination intervient à l'issue de la n^e épreuve » sera noté $\{T = n\}$, et la probabilité de cet événement sera notée $p(T = n)$.

   2.1. Déterminer la probabilité de l'événement $\{T = 1\}$.

   2.2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

   2.2.1. Décrire l'événement représenté par $\bigcap_{1 \le k \le n} \overline{C_k} = \overline{C_1} \cap \ldots \cap \overline{C_n}$. Déterminer la probabilité de cet événement.

   2.2.2. L'événement $\overline{C_n}$: « aucun compétiteur n'est éliminé à l'issue de la n^e épreuve », est également noté $\{T > n\}$. Déterminer sa probabilité $p(T > n)$, puis en déduire la probabilité $p(T = n)$. Vérifier que cette formule reste valable pour $n = 1$.

   2.3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} p(T = k)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

   2.4. On suppose toujours que l'entier n est supérieur ou égal à 2.

   2.4.1. Démontrer que : $p(T > n - 1) = p(T = n) + P(T > n)$.

   2.4.2. Vérifier l'égalité : $n \cdot p(T > n) + \sum_{k=1}^{n} k \cdot p(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(T > k)$.

   2.4.3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k \cdot p(T = k)$. Quelle interprétation peut-on en donner ?

Partie II

Dans cette partie, on s'intéresse à la probabilité de chacune des éventualités observables à l'issue d'un nombre donné d'épreuves.

1. Soit n un entier naturel. Dans $\mathbf{R}^4$, on désigne par V_n le vecteur $(p(A_n) ; (p(B_n) ; (p(C_n) ; (p(D_n))$ et par X_n la matrice unicolonne associée à ce vecteur :

$$X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \\ p(D_n) \end{pmatrix}$$

   On appelle M la matrice 4×4 telle que $X_{n+1} = MX_n$ (appelée *matrice de transition*).

   1.1. En utilisant la formule des probabilités totales et les résultats obtenus dans la partie I, déterminer la matrice M.

   1.2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $X_n = M^n X_0$.

2. On se propose ici de calculer la matrice M^n. On considère pour cela les deux matrices 4×4 ci-dessous :

$$\Delta = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   2.1. Calculer le produit de matrices $P\Delta P$.

   2.2. Pour tout entier naturel n non nul, calculer Δ^n.

   2.3. Calculer la matrice P^2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $M^n = P\Delta^n P$.

3. On cherche maintenant à déterminer les limites des probabilités $p(A_n)$, $p(B_n)$, $p(C_n)$, $p(D_n)$, lorsque l'entier n tend vers l'infini.

   3.1. Expliquer pourquoi, pour déterminer X_n, il suffit de calculer la 3^e colonne de M^n.

   3.2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p(A_n)$, $\lim_{n \to +\infty} p(B_n)$, $\lim_{n \to +\infty} p(C_n)$, $\lim_{n \to +\infty} p(D_n)$. Pouvait-on prévoir ces résultats ?

SECOND PROBLÈME

Dans sa Géométrie *parue en 1637 chez Jan Mair à Leyde, René Descartes (1596-1650) énonce une règle permettant de majorer le nombre de solutions réelles d'une équation polynomiale d'inconnue* x, *de la forme* $P(x) = 0$, *à partir des signes des coefficients du polynôme P ; elle revient à dire que, si 0 n'est pas solution de l'équation, le nombre de solutions réelles positives est inférieur ou égal au nombre de changements de signe dans la suite finie des coefficients non nuls de P (ordonnée selon les puissances décroissantes des monômes correspondants). [N.B. : Pour obtenir une majoration du nombre de solutions négatives, il suffit d'appliquer cette règle à l'équation* $P(-x) = 0$.*]*

Exemple : Soit l'équation $x^5 - 3x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$. *La suite des coefficients associée à cette équation est 1, − 3, − 4, 2, 4. On constate qu'il y a deux changements de signes. La règle de Descartes permet alors d'affirmer que l'équation admet au plus deux solutions positives. Pour majorer le nombre de solutions négatives, on considère la suite − 1, 3, − 4, − 2, 4 qui comporte trois changements de signes ; l'équation admet donc au plus trois solutions négatives. (La résolution de l'équation montre qu'elle admet en fait trois racines réelles, qui sont − 1, 1 et 2.)*

Nous allons, sur quelques cas particuliers, vérifier la règle de Descartes et étudier quelques développements collatéraux.

1. Exemple de l'équation du troisième degré : $x^3 - 2x - a = 0$, où a est un nombre réel

1.1. Étude du cas particulier $a = \dfrac{1}{2}$.

1.1.1. Étudier la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = x^3 - 2x - \dfrac{1}{2}$ (on précisera l'ensemble de définition, l'existence éventuelle d'un élément de symétrie et le choix d'un intervalle d'étude qui en découle, la continuité, l'étude des branches infinies, la dérivabilité et l'étude des variations de f).

1.1.2. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (on prendra 2 cm pour mesurer les vecteurs unités).

1.1.3. Déduire de l'étude précédente le nombre de solutions réelles positives et le nombre de solutions réelles négatives de l'équation :

[1] $$x^3 - 2x - \frac{1}{2} = 0.$$

1.2. On se propose maintenant de donner une résolution « trigonométrique » de l'équation [1] : $x^3 - 2x - \dfrac{1}{2} = 0$.

1.2.1. Établir que, pour tout nombre réel α, on a $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$. (*N.B.* : la notation $\cos(\theta)$ désigne, ici et dans la suite, le cosinus de l'angle dont une mesure en radians est θ).

1.2.2. En utilisant le changement d'inconnue $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x$, montrer que résoudre l'équation [1] revient à résoudre l'équation :

[2] $$4y^3 - 3y - \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} = 0.$$

1.2.3. Déterminer le nombre réel φ $(0 < \varphi < \pi)$ tel que $\cos(\varphi) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$ (on n'oubliera pas de justifier l'existence et l'unicité de φ, et on en donnera une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près).

1.2.4. Déterminer les nombres réels α tels que $\cos(3\alpha) = \cos(\varphi)$.

1.2.5. En déduire, pour chacune des solutions réelles de l'équation [1], une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut.

1.3. Étude du cas général (a est ici un nombre réel quelconque).

1.3.1. Préciser une transformation géométrique dans laquelle la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie en 1.1.1. a pour image la courbe représentative $\mathcal{C}_a$ de la fonction g_a définie par $g_a(x) = x^3 - 2x - a$, où a est un paramètre réel.

1.3.2. En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation $x^3 - 2x - a = 0$ selon les valeurs de a (on justifiera avec soin les affirmations énoncées et on vérifiera dans ce cas la règle énoncée par Descartes).

2. $\boxed{\text{Étude des équations du type } x^3 + px + q = 0 \text{ (où } p \text{ et } q \text{ sont des nombres réels)}}$

2.1. Degré de généralité de ce type.

On se propose tout d'abord de démontrer de façon classique que l'on peut ramener l'étude d'une équation de la forme :

[3] $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

(où a, b, c, d sont des coefficients réels tels que $a \neq 0$)

à l'étude d'une équation de la forme :

[4] $$y^3 + py + q = 0$$

(où p et q sont des coefficients réels).

Pour cela, après avoir mis le coefficient a en facteur, on cherchera y sous la forme $y = x - k$, où k est un réel que l'on déterminera. On précisera alors les valeurs de p et de q en fonction des coefficients a, b, c, d.

2.2. Exemples divers.

Donner, pour chacun des six cas cités ci-après, un exemple d'équation du type [3] et vérifier, pour chaque exemple, la validité de la règle donnée par Descartes.

(1) L'équation a une seule solution réelle, qui est strictement négative.

(2) L'équation a une seule solution réelle, qui est strictement positive.

(3) L'équation a deux solutions réelles distinctes, strictement positives.

(4) L'équation a deux solutions réelles non nulles, de signes contraires.

(5) L'équation a trois solutions distinctes, strictement négatives.

(6) L'équation a trois solutions réelles distinctes non nulles, dont l'une est de signe contraire à celui des deux autres.

2.3. Solutions réelles de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (où p et q sont des nombres réels).

2.3.1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x^3 + px + q$.

2.3.2. En déduire que l'équation [4] admet toujours au moins une solution réelle.

2.3.3. Dans le cas où p est strictement positif, montrer que l'équation [4] n'admet qu'une seule solution réelle. Donner son signe selon le signe de q et vérifier, dans ce cas, la règle énoncée par Descartes.

2.3.4. Que deviennent les résultats de la question précédente lorque p est nul ?

2.3.5. Dans le cas où p est strictement négatif, on note x_1 et x_2 les réels où g atteint ses extremums (avec $x_1 < 0 < x_2$), et on pose $y_1 = g(x_1)$ et $y_2 = g(x_2)$. Déduire de ce qui précède une étude du nombre de solutions réelles de l'équation [4] et de leur signe, dans chacun des trois cas $q > 0$, $q = 0$ et $q < 0$. Là encore, on s'assurera que la règle de Descartes est bien vérifiée.

2.4. Un peu d'histoire.

Quelle(s) notion(s) usuelle(s) figurant dans les programmes de l'enseignement secondaire pouvez-vous attribuer à René Descartes ?

3. Approche numérique des solutions d'une équation polynomiale du troisième degré

On se propose maintenant de rechercher, à l'aide de deux algorithmes classiques, des valeurs décimales approchées, à une précision donnée, des solutions d'une équation polynomiale du troisième degré. Le procédé utilisé dans le premier cas est connu depuis l'Antiquité : il s'agit de la dichotomie, que l'on retrouve par exemple dans les fameux paradoxes de Zénon d'Élée (V^e siècle avant notre ère). Le second, plus sophistiqué, a pour origine Isaac Newton (1642-1727).

3.1. Application de la dichotomie à l'approximation d'une solution de l'équation polynomiale du troisième degré : $x^3 - 5x + 2 = 0$.

3.1.1. Montrer qu'un nombre rationnel non nul, représenté par la fraction irréductible $\frac{u}{v}$ (où $u \in \mathbf{Z}^*$ et $v \in \mathbf{N}^*$), est un nombre décimal si, et seulement si, la décomposition de v en facteurs premiers est de la forme $v = 2^m 5^p$, avec $m \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}$.

3.1.2. Soit h la fonction de la variable réelle x définie par $h(x) = x^3 - 5x + 2$. Montrer que l'équation [5] : $h(x) = 0$ admet une solution, et une seule, dans l'intervalle $[0\,;\,1]$. On note s cette solution, et on se propose d'en donner une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-5} près.

3.1.3. Soient x_1 et x_2 deux nombres réels de l'intervalle $[0\,;\,1]$. Montrer que l'on a $h(x_1)\cdot h(x_2) \leq 0$ si, et seulement si, la solution s est comprise entre x_1 et x_2 (c'est-à-dire si l'on a $x_1 \leq s \leq x_2$ ou $x_2 \leq s \leq x_1$).

3.1.4. On définit sur $\mathbf{N}$ deux suites réelles (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

(i) $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$,

(ii) pour tout entier n :

a. si $h(a_n)\cdot h\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$;

b. sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

3.1.4.1. Montrer que ces deux suites sont des suites monotones de nombres décimaux, admettant toutes deux pour limite le réel s défini en 3.1.2.

3.1.4.2. Déterminer un entier n_0 tel que a_{n_0} soit une valeur approchée de s à 10^{-5} près.

3.1.4.3. En utilisant ce qui précède, écrire un algorithme permettant de programmer une calculatrice pour déterminer une valeur décimale approchée de s par défaut à 10^{-5} près. Indiquer la valeur obtenue grâce à cet algorithme.

3.2. Application de la méthode dite de Newton (ou « de la tangente ») à l'approximation d'une solution de l'équation polynomiale du troisième degré [6] : $x^3 - 2x - 5 = 0$.

3.2.1. Soit k la fonction de la variable réelle x définie par $k(x) = x^3 - 2x - 5$. Montrer que l'équation [6] : $k(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[2\,;\,2,1]$. On notera σ cette solution.

3.2.2. Soit Γ la courbe représentative de k dans un repère orthonormal du plan, et soit c un nombre réel quelconque. Donner une équation cartésienne de la tangente à Γ au point $C(c\,;k(c))$. En déduire l'abscisse $\psi(c)$ du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses, lorsqu'il existe.

3.2.3. Soit c un nombre réel strictement supérieur à σ. Montrer que l'on a $k(c) > 0$, puis établir que l'on a $0 < \psi(c) < c$.

3.2.4. Montrer que, quels que soient les nombres réels a et b, on a :

$$k(b) - k(a) = (b-a)k'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} k''(a) + \frac{(b-a)^3}{6} k'''(a).$$

3.2.5. On appelle m la valeur minimale de $|k'(x)|$ sur l'intervalle $[2\,;2{,}1]$ et M la valeur maximale de $|k''(x)|$ sur ce même intervalle. Démontrer que, pour tout réel c de l'intervalle $[\sigma\,;2{,}1]$, on a :

$$0 \leq \psi(c) - \sigma \leq \frac{\mathrm{M} + 0{,}2}{2m}(c-\sigma)^2.$$

3.2.6. On définit sur $\mathbf{N}$ la suite réelle (c_n) suivante :

(i) $c_0 = 2$,

(ii) pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = \psi(c_n)$.

Calculer c_1, puis montrer qu'à partir du rang 1 la suite (c_n) est décroissante et que cette suite converge vers σ.

3.2.7. Écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée par défaut de σ à 10^{-8} près.

3.3. **Retour aux sources :**

En réalité, la méthode décrite sous forme d'algorithme par Newton dans son ouvrage (en latin) De Methodis Serierum et Fluxionem, *rédigé entre 1664 et 1671, ne fait pas explicitement appel à la notion de tangente. Dans le cas qui nous occupe ici, elle peut se résumer ainsi :*

a. *on prend* $x_0 = 2$, *qui diffère de* σ *de moins de* 0,1 ;

b. *on pose* $x = 2 + p$. *La résolution de l'équation* [6] *se ramène alors, par substitution, à celle de l'équation :*

[7] $$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0\,;$$

c. *on néglige* $p^3 + 6p^2$ *« à cause de sa petitesse », ce qui ramène alors à l'équation* $10p - 1 = 0$, *qui donne* $p = 0{,}1$;

d. *on applique à* [7] *le procédé utilisé avec* [6], *en posant cette fois* $p = 0.1 + q$. *La résolution de* [7] *se ramène alors à celle de l'équation :*

[8] $$q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0\,;$$

e. *on réitère le même procédé, en résolvant l'équation* $11{,}23q + 0{,}061 = 0$ *qui donne « à peu près »* $q = -0{,}0054$;

f. *on poursuit en posant* $q = -0{,}0054 + t$, *et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention de la précision désirée.*

Quel est le lien entre l'algorithme donné par Newton et la méthode mise en œuvre en 3.2. ?