

CCINP 2024 MP Mathématiques 1

Proposition de corrigé

Exercice I

Q1. On suppose que la variable aléatoire X est définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
Soit $k \in \mathbb{N}^*$: pour tout $\omega \in \Omega$, la valeur $X(\omega)$ est un entier donc

$$X(\omega) = k \iff X(\omega) > k - 1 \text{ et } \text{non}(X(\omega) > k)$$

autrement dit, l'événement $\{X = k\}$ est égal à la différence $\{X > k - 1\} \setminus \{X > k\}$; de plus, pour tout $\omega \in \Omega$ si $X(\omega) > k$ alors $X(\omega) > k - 1$, donc l'événement $\{X > k\}$ est inclus dans $\{X > k - 1\}$. Il en découle que

$$\boxed{P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)}$$

On utilise cette identité pour calculer la somme suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(X = k) &= \sum_{k=1}^n k(P(X > k - 1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n (P(X > k - 1) + (k - 1)P(X > k - 1) - kP(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n P(X > k - 1) + \sum_{k=1}^n ((k - 1)P(X > k - 1) - kP(X > k)) \\ &\stackrel{\text{téléscopage}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) + [0P(X > 0) - nP(X > n)] = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n) \end{aligned}$$

et on peut constater que l'égalité $\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$ demeure valable pour $n = 0$ aussi en convenant que dans ce cas les deux sommes qui y apparaissent sont nulles.

Soit $n \in \mathbb{N}$; le réel $nP(X > n)$ est un produit de réels positifs ou nuls, donc $nP(X > n) \geq 0$; d'autre part on peut en obtenir une majoration :

$$nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$$

puisque pour tout entier $k \geq n + 1$ on a $P(X = k) \geq 0$, donc $nP(X = k) \leq kP(X = k)$, et par croissance de la somme (si X est d'espérance finie, la série $\sum_{k \geq n+1} kP(X = k)$ converge ; dans tous les cas, cette majoration est valable dans $[0, +\infty]$). Par conséquent

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) \leq \sum_{k=1}^n kP(X = k) + nP(X > n) \leq \sum_{k=1}^n kP(X = k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k)$$

En utilisant l'identité établie auparavant on obtient l'encadrement

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = E(X)$$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kP(X = k) = E(X)$ on déduit l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = E(X).$$

Q2. On peut modéliser l'expérience aléatoire à l'aide d'un p -uplet (on suppose $p \in \mathbb{N}^*$) de variables aléatoires (X_1, \dots, X_p) définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , où X_i représente le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée : pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ la variable X_i suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ (équiprobabilité des tirages) et (X_1, \dots, X_p) est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes (tirages avec remise) ; on peut alors définir la variable aléatoire $X = \max\{X_1, \dots, X_p\}$, c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} X_i(\omega).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; pour tout $\omega \in \Omega$ on a

$$X(\omega) \leq k \iff \sup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} X_i(\omega) \leq k \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad X_i(\omega) \leq k$$

d'où $\{X \leq k\} = \bigcap_{i=1}^p \{X_i \leq k\}$; les variables X_i sont mutuellement indépendantes et de même loi, donc

$$P(X \leq k) = \prod_{i=1}^p P(X_i \leq k) = (P(X_1 \leq k))^p;$$

comme X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$P(X_1 \leq k) = \frac{|\{x \in \llbracket 1, n \rrbracket : x \leq k\}|}{|\llbracket 1, n \rrbracket|} = \frac{|\llbracket 1, \min(n, k) \rrbracket|}{n} = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{si } k \leq n \\ 1 & \text{si } k > n \end{cases}$$

et on aboutit à
$$\mathbb{P}(X \leq k) = \begin{cases} \left(\frac{k}{n}\right)^p & \text{si } k \leq n \\ 1 & \text{si } k > n \end{cases}$$

La variable aléatoire X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, donc la famille $(P(X \leq k))_{k \in \mathbb{N}}$ caractérise la loi de X ; on peut calculer explicitement la distribution de probabilités discrètes de la loi de X en utilisant le premier résultat de la question **Q1.** et en prenant les probabilités des événements contraires (ou en adaptant le raisonnement fait en **Q1.**) : on obtient

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k) = (1 - P(X \leq k - 1)) - (1 - P(X \leq k))$$

donc
$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p$$

Q3. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$ est la somme de Riemann pointée à gauche de la fonction $f : t \mapsto t^p$, associée à la subdivision régulière $\left(\frac{k}{n}\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ du segment $[0, 1]$ en n sous-intervalles de longueur $\frac{1}{n}$; comme f est continue sur $[0, 1]$ et le pas de ces subdivisions tend vers 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé la variable aléatoire X (dont la loi dépend de n) est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$; d'après **Q1.**,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - P(X \leq k)) = n - \sum_{k=0}^{n-1} P(X \leq k)$$

En utilisant **Q2.** et la limite calculée ci-dessus on obtient

$$\frac{E(X)}{n} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1} \neq 0 \quad \text{donc} \quad E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{p+1} n$$

Exercice II

Q4. (H) est une équation différentielle linéaire homogène, donc l'ensemble $S_I(H)$ de ses solutions sur l'intervalle I est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^I ; de plus (H) est une équation d'ordre 2 et le coefficient du terme d'ordre 2, $x \mapsto x^2$, est une fonction qui ne s'annule pas sur I , donc $\dim(S_I(H)) = 2$ (conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : pour $x_0 \in I$ fixé quelconque, l'application $y \mapsto (y(x_0), y'(x_0))$ est un isomorphisme de $S_I(H)$ sur \mathbb{R}^2).

Q5. Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $] -R, R[$, avec $R \in]0, +\infty[$, et soit $\sum a_n x^n$ son développement en série entière. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence on a, pour tout $x \in] -R, R[$:

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2) f(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + (2 - x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4a_n n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n^2 + 3n + 2)a_n - a_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 1, f est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si

$$2a_0 = 1, \quad 6a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \implies (n^2 + 3n + 2)a_n - a_{n-2} = 0$$

ou, de manière équivalente, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \implies a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$$

Cette relation de récurrence linéaire lie des termes dont les indices diffèrent de 2; une division euclidienne par 2 permet alors de se ramener à un système équivalent de deux relations de récurrence linéaires d'ordre 1, à savoir, en posant $n = 2p + r$:

$$\begin{aligned} \forall (p, r) \in \mathbb{N}^* \times \{0, 1\} \quad a_{2p+r} &= \frac{a_{2(p-1)+r}}{(2p+r+1)(2p+r+2)} \\ \iff \forall r \in \{0, 1\} \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad a_{2p+r} &= a_r \prod_{k=1}^p \frac{1}{(2k+r+1)(2k+r+2)} = a_r \frac{(2+r)!}{(2p+r+2)!} \end{aligned}$$

et la seule suite vérifiant ce système et les conditions initiales $a_0 = \frac{1}{2}$ et $a_1 = 0$ est la suite définie par :

$$(*) \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!} \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = 0.$$

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (*): en utilisant les développements en série entière usuels, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (donc en particulier pour tout $x \in I$) la série $\sum a_n x^n$ converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\text{ch } x - 1}{x^2}$$

On conclut que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence infini, que sa somme f est l'unique solution de (E) développable en série entière sur \mathbb{R} et que $f(x) = \frac{\text{ch } x - 1}{x^2}$ pour tout $x \in I$.

Q6. La fonction g est une solution particulière de l'équation linéaire (E) et $S_I(H)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, donc $S_I(E) = g + S_I(H)$.

La restriction de f à I , notée $f|_I$, est une solution de (E) aussi; par linéarité de l'équation (principe de superposition) la différence $h_1 = f|_I - g : x \mapsto \frac{\text{ch } x}{x^2}$ est une solution de l'équation homogène associée

(H). En observant que $\frac{h(x)}{h_1(x)} = \text{th}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais que h n'est pas la fonction nulle, on déduit que (h_1, h)

est une famille libre d'éléments de $S_I(H)$ (un procédé plus standard mais plus calculatoire consisterait à

former le wronskien de (h_1, h) : on obtient $W(h_1, h) : x \mapsto \begin{vmatrix} h_1(x) & h(x) \\ h_1'(x) & h'(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{x^4} \neq 0$ donc (h_1, h) est

un système fondamental de solutions de (H) sur I). Or $S_I(H)$ est un espace vectoriel de dimension égale à 2 (question Q4.), on en déduit que $S_I(H) = \text{Vect}(h_1, h)$ et que

$$S_I(E) = g + \text{Vect}(h_1, h) = \left\{ x \mapsto \frac{\alpha \text{ch } x + \beta \text{sh } x - 1}{x^2} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Q7. Puisque (H) est une équation linéaire homogène, l'ensemble $S_{\mathbb{R}}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $y \in S_{\mathbb{R}}(H)$: la restriction de y à I est une solution de (H) sur I , donc d'après **Q6**, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y|_I = \alpha h_1 + \beta h$. Vu que $1 = \underset{x \rightarrow 0}{o}(h(x))$ et que $h(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(h_1(x))$, si $\alpha \neq 0$ on a $y(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \alpha h_1(x)$, et si $\alpha = 0$ mais $\beta \neq 0$ alors $y(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \beta h(x)$; dans chaque cas la fonction y n'est pas bornée au voisinage de 0, ce qui contredit la continuité de y en 0 : on conclut que $\alpha = \beta = 0$ et que la restriction de y à I est la fonction nulle.

On considère la fonction $\tilde{y} : x \mapsto y(-x)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x^2 \tilde{y}''(x) + 4x \tilde{y}'(x) + (2 - x^2) \tilde{y}(x) = (-x)^2 y''(-x) - 4x y'(-x) + (2 - (-x)^2) y(-x) = 0$$

donc $\tilde{y} \in S_{\mathbb{R}}(H)$ aussi. Il en découle que la restriction de \tilde{y} à I est nulle, donc $\forall x \in]-\infty, 0[\quad y(x) = 0$. La fonction y est continue sur \mathbb{R} , nulle sur \mathbb{R}^* qui est une partie dense de \mathbb{R} : par conséquent y est nulle sur \mathbb{R} .

Finalement, l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ ne contient aucune fonction non nulle, donc $\boxed{\dim(S_{\mathbb{R}}(H)) = 0}$

Problème

Q8. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, on note S sa somme. La suite à termes positifs $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc sommable; par sommation par paquets selon la parité et par linéarité de la somme on a :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

d'où $S = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-1} \frac{\pi^2}{8}$, c'est-à-dire $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Partie I

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$ sur \mathbb{R} est $\boxed{x \mapsto (n+1)(\sin x)^n (\cos x)}$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n (\sin x) dx = \underbrace{\left[-(\sin x)^n (\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)(\sin x)^n (\cos x)^2 dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n (1 - \sin^2 x) dx = (n+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+2} dx \right) = (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$

Pour $k \in \mathbb{N}$, en substituant $2k+1$ à n dans la relation précédente on obtient $W_{2k+3} = \frac{2k+2}{2k+3} W_{2k+1}$.

On résout cette récurrence linéaire d'ordre 1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$W_{2n+1} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3} \right) W_1 = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^2(k+1)^2}{(2k+2)(2k+3)} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{2^{2n} \left(\prod_{j=1}^n j \right)^2}{\prod_{j=2}^{2n+1} j} \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

donc $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q10. Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $-1 < -x^2 \leq 0$; en utilisant le développement en série entière du binôme de Newton généralisé on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) \right) (-1)^n x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{2^2(k+1)} \right) x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n} n!} \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{n!} x^{2n} \end{aligned}$$

donc $\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$

Par primitivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, comme $\text{Arcsin}(0) = 0$ il résulte que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

Q11. La fonction Arcsin est réciproque de la restriction du sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, en particulier pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\text{Arcsin}(\sin x) = x$; or pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $0 \leq \sin x < 1$, donc en utilisant le résultat de la question **Q10**.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad x = \text{Arcsin}(\sin x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$$

Q12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, de plus f_n est positive sur cet intervalle; d'après **Q11**, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement vers la fonction identité $x \mapsto x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, qui est continue. D'après le théorème de Beppo Levi, on peut intervertir somme et intégrale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$$

Q13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après **Q9**.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc en utilisant l'égalité établie en **Q12**.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

et finalement on applique **Q8** : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Partie II

Q14. Pour $x \in]-1, 1[$ on a $0 \leq x^2 < 1$ donc

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n : \quad \forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}$$

Par linéarité de la somme, il en suit que La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$, qui est continue sur $]0, 1[$, est la limite simple de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$, où g_n est la fonction continue et positive définie sur $]0, 1[$ par $g_n(x) = -x^{2n} \ln x$; d'après le théorème de Beppo Levi,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^{2n} \ln x) dx$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, les fonctions $x \mapsto -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et \ln sont de classe C^1 sur $]0, 1]$ et leur produit converge vers 0 en 0 (croissance comparée); on peut alors intégrer par parties :

$$\int_0^1 (-x^{2n} \ln x) dx = \left[-\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Comme $0 \leq \frac{1}{(2n+1)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série de Riemann à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on déduit par comparaison que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

On conclut que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} < +\infty$

Q15. On considère la fonction F définie sur $([0, +\infty[)^2$ par :

$$\forall (x, t) \in ([0, +\infty[)^2 \quad F(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}.$$

- Pour $t \in [0, +\infty[$ fixé, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour $x \in [0, +\infty[$ fixé, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction Arctan est bornée sur \mathbb{R} , donc

$$\forall (x, t) \in ([0, +\infty[)^2 \quad |F(x, t)| \leq \frac{\|\text{Arctan}\|_\infty}{1+t^2};$$

la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\|\text{Arctan}\|_\infty}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Q16. On reprend la fonction F introduite à la question **Q15**.

- Pour $t \in [0, +\infty[$ fixé, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est de classe C^1 sur $]0, 1]$ et

$$\forall (x, t) \in]0, 1] \times [0, +\infty[\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

- Pour $x \in]0, 1]$ fixé, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (grâce à la domination établie à la question **Q15**.) et la fonction $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Étant donné $a \in]0, 1]$,

$$\forall (x, t) \in [a, 1] \times [0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)};$$

la fonction $\varphi_{1,a} : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi_{1,a}(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\varphi_{1,a}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$.

On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral : la fonction f est de classe C^1 sur $[a, 1]$ pour tout $a \in]0, 1]$, donc f est de classe C^1 sur $]0, 1]$, et

$$\forall x \in]0, 1] \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

Q17. En réduisant les fractions rationnelles au même dénominateur on obtient

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} = \frac{(1-x^2)t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} \quad \text{donc} \quad \frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right).$$

Soit $x \in]0, 1[$; une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}$ est

$$t \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2t^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t^2}{1+x^2t^2};$$

cette fonction vaut 0 en 0 et tend vers $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{x^2} = -\ln x$ en $+\infty$. En utilisant la représentation intégrale de $f'(x)$ établie en **Q16**, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t \, dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+t^2}{1+x^2t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{x^2-1} \end{aligned}$$

comme voulu.

Q18. Par définition

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2} dt = \left[\frac{(\operatorname{Arctan} t)^2}{2} \right]_0^{+\infty} \quad \text{donc} \quad \boxed{f(1) = \frac{\pi^2}{8}}$$

et $f(0) = \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0$. Or la fonction f est continue sur $[0, 1]$ (question **Q15**.) et de classe C^1 sur $]0, 1[$ (question **Q16**.), donc en considérant l'intégrale de f' sur $]0, 1[$ on a

$$\int_0^1 f'(x) \, dx = f(1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1) - f(0) = \frac{\pi^2}{8};$$

ensuite, d'après **Q14**. et **Q17**.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \, dx = \int_0^1 f'(x) \, dx = \frac{\pi^2}{8}$$

et finalement, en utilisant **Q8**, on conclut que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$