

Corrigé de l'épreuve II-A, Banque PT 2004

Trois problèmes indépendants

PROBLEME I

On note $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^2$.

On considère les deux formes quadratiques définies dans la base $\mathcal{B}_0$ par les relations :

$$\begin{cases} q_1(\vec{U}) &= 5x_0^2 - 6x_0y_0 + 5y_0^2 \\ q_2(\vec{U}) &= 2\sqrt{3}x_0y_0 - 2y_0^2 \end{cases}$$

1)

Dans la base $\mathcal{B}_0$ les matrices A_1 et A_2 des formes quadratiques q_1 et q_2 sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

2)

$$A_1A_2 - A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

On désigne respectivement par u_1 et u_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis dans la base $\mathcal{B}_0$ par A_1 et A_2 .
S'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices Δ_1 de u_1 et Δ_2 de u_2 sont toutes deux diagonales, alors comme $\Delta_1\Delta_2 = \Delta_2\Delta_1$, on a bien sûr $u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1$ et nécessairement, en passant aux matrices dans la base canonique $A_1A_2 = A_2A_1$, ce qui est faux.

Il n'existe pas de base commune de diagonalisation de A_1 et A_2 .

3)

On note $\mathcal{R}_0$ le repère $(O, \mathcal{B}_0)$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme plan euclidien orienté.

Soit a un réel strictement positif.

Soient C_1 et C_2 les coniques dont les équations dans le repère $\mathcal{R}_0$ sont respectivement $q_1(\vec{U}) = 8a^2$ et $q_2(\vec{U}) = a^2$.

Le déterminant de A_1 est positif strictement ($=16$), donc C_1 est une ellipse.

Le déterminant de A_2 est négatif strictement ($=-3$), donc C_2 est une hyperbole.

Il est clair que O est le centre (de symétrie) de ces deux coniques.

En effet, si $M(x_0, y_0) \in C_i$, alors $M'(-x_0, -y_0) \in C_i$.

Comme dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y_0 = x_0$, C_1 est invariante puisque si $M(x_0, y_0) \in C_1$, alors $M'(y_0, x_0) \in C_1$, on en déduit que :

les droites $y_0 = x_0$ et $y_0 = -x_0$, orthogonales et passant par le centre sont les axes de l'ellipse C_1 .

Pour obtenir les sommets de l'ellipse, il faut couper C_1 par les axes $y_0 = x_0$ et $y_0 = -x_0$. On obtient deux systèmes :

$$\begin{cases} y_0 &= x_0 \\ 5x_0^2 - 6x_0y_0 + 5y_0^2 &= 8a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 &= 2a^2 \\ y_0 &= x_0 \end{cases} \quad \text{Deux sommets } A(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}), A'(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$$

et :

$$\begin{cases} y_0 &= -x_0 \\ 5x_0^2 - 6x_0y_0 + 5y_0^2 &= 8a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 &= \frac{a^2}{2} \\ y_0 &= -x_0 \end{cases} \quad \text{Deux sommets } B(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}), B'(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$$

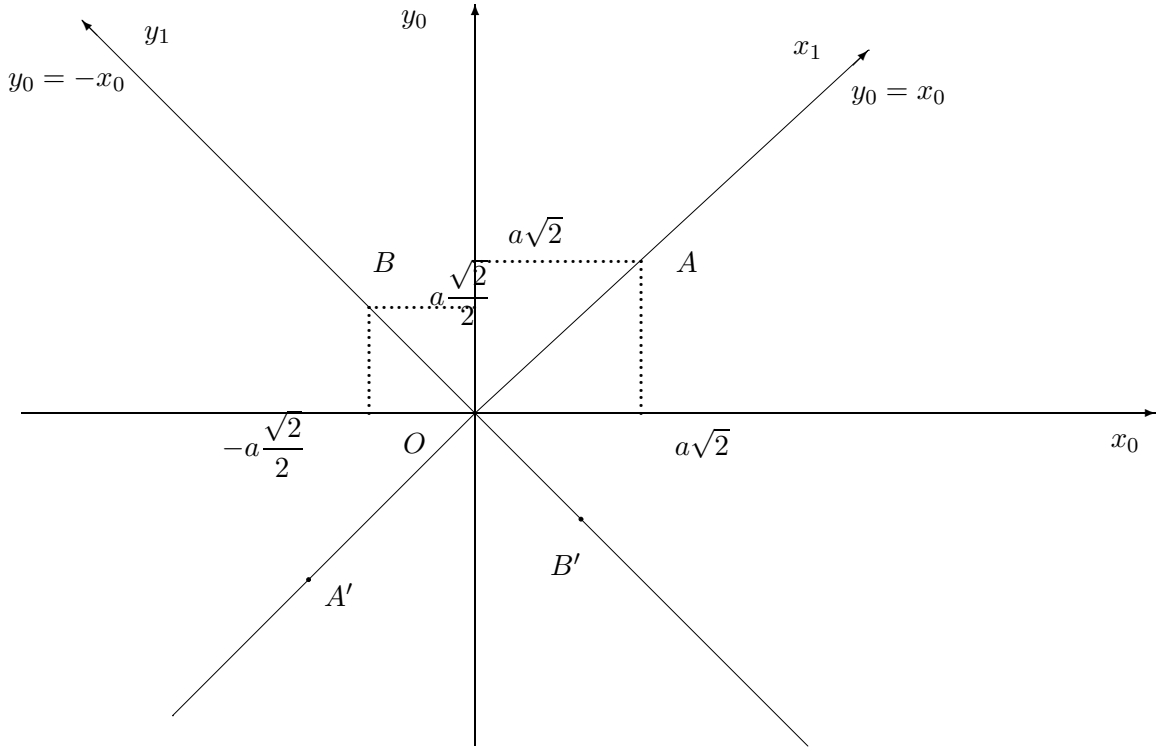


FIG. 1 – Ellipse C_1

$$OA^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4a^2, \quad OB^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2.$$

On obtient ainsi les demi-axes focaux $OA = 2a$ et $OB = a$.

Les asymptotes de C_2 sont obtenues en annulant le premier membre de l'équation de C_2 :

$$2\sqrt{3}x_0y_0 - 2y_0^2 = 0 \Leftrightarrow 2y_0(\sqrt{3}x_0 - y_0) = 0$$

Donc les asymptotes de C_2 sont les droites $y_0 = 0$ (l'axe des abscisses) et la droite d'équation $y_0 = \sqrt{3}x_0$ passant par O et faisant l'angle $\frac{\pi}{3}$ avec Ox_0 , puisque $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Les axes (de symétrie) de C_2 sont les bissectrices de ces deux asymptotes : ce sont les droites orthogonales passant par O et faisant respectivement l'angle $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ avec Ox_0 .

Les sommets C et C' de C_2 sont obtenus en coupant l'hyperbole par l'axe focal, ici la droite $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_0$.

On résoud le système :

$$\begin{cases} y_0 &= \frac{\sqrt{3}}{3}x_0 \\ 2\sqrt{3}x_0y_0 - 2y_0^2 &= a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 &= \frac{\sqrt{3}}{3}x_0 \\ x_0^2 &= \frac{3}{4}a^2 \end{cases}$$

D'où les deux sommets de l'hyperbole C_2 : $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2})$, $C'(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2})$.

On a représenté une demi-hyperbole.

Les axes de symétrie de C_1 et C_2 sont différents.

Il n'existe donc pas de rotation de $\mathbb{R}^2$ qui amène simultanément les axes de $\mathcal{R}_0$ sur les axes de symétrie de C_1 et C_2 .

4)

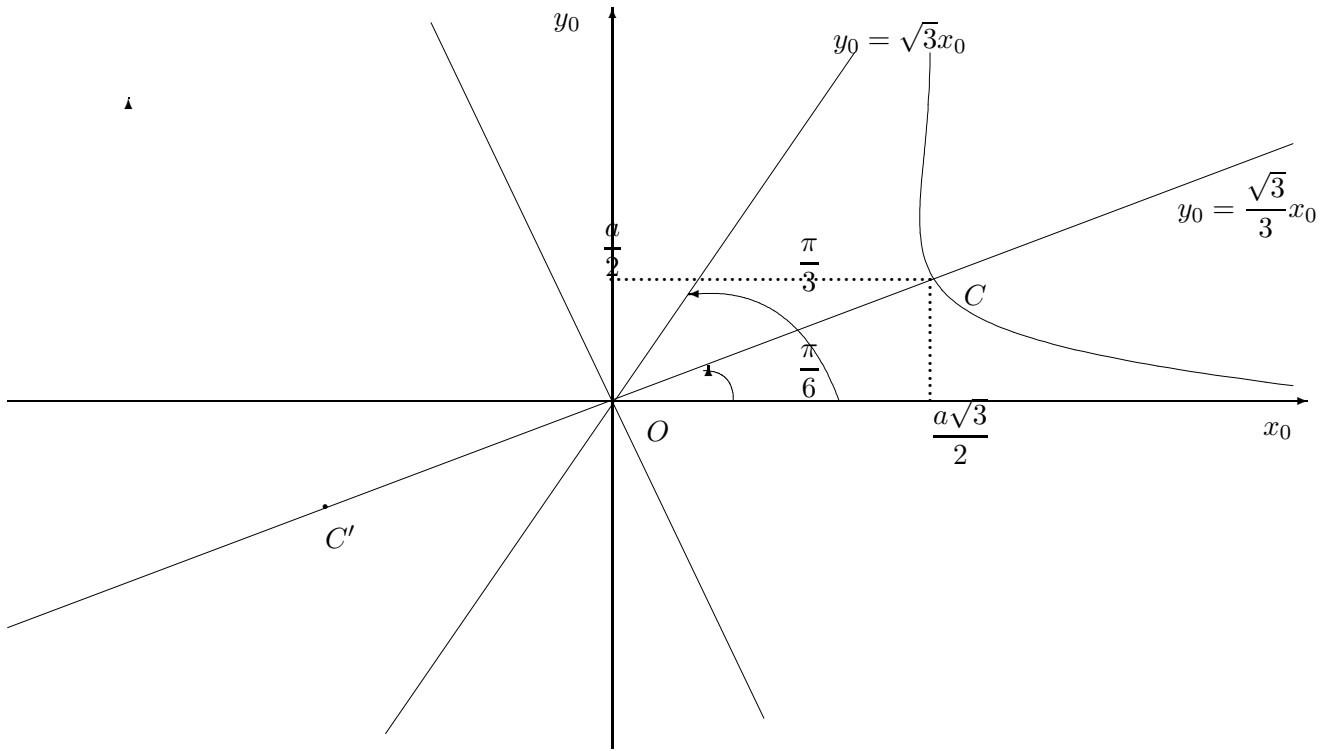


FIG. 2 – Hyperbole C_2

L'unique angle θ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que la rotation de centre O et d'angle θ transforme le repère $\mathcal{R}_0$ en un repère $(O, (\vec{i}_1, \vec{j}_1))$ noté $\mathcal{R}_1$ dont les axes soient les axes de symétrie de C_1 est évidemment $\theta = \frac{\pi}{4}$.

C_1 , dont les demi-axes focaux sont $OA = 2a$ et $OB = a$, a pour équation dans ce nouveau repère $\mathcal{R}_1$ qui est celui de ses axes de symétrie :

$$C_1 \quad \frac{x_1^2}{4a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1$$

Le changement de base pour C_2 se fait par le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

L'équation de C_2 dans le nouveau repère est donc :

$$2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \right) - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \right)^2 = a^2$$

i.e $\boxed{C_2 \quad \sqrt{3}(x_1^2 - y_1^2) - (x_1 + y_1)^2 = a^2}$

5)

On note $\vec{i}_2 = 2\vec{i}_1$, $\vec{j}_2 = \vec{j}_1$, puis $\mathcal{R}_2$ le nouveau repère $(O, (\vec{i}_2, \vec{j}_2))$.

Le changement de base se fait par le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Les équations de C_1 et C_2 dans ce repère $\mathcal{R}_2$ sont respectivement :

$$\boxed{C_1 \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{a^2} = 1, \quad C_2 \quad \sqrt{3}(4x_2^2 - y_2^2) - (2x_2 + y_2)^2 = a^2}$$

Il n'existe pas une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices des formes quadratiques q_1 et q_2 soient toutes deux diagonales, comme déjà vu en fait à la première question.

PROBLEME II

A

1)

Déterminons le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle définie par :

$$x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-xt} \ln t \, dt$$

Quel que soit $x > 0$, la fonction $F_x : t \mapsto e^{-xt} \ln t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, car continue.

$$|F_x(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln t|$$

Or, $\int_0^1 |\ln t| \, dt = -\int_0^1 \ln t \, dt$ converge (intégrale de référence). Donc, par comparaison par équivalence des fonctions positives, $\int_0^1 |\ln t| \, dt$ converge.

Quel que soit $t \geq 1$, $F_x(t) \geq 0$, et $\forall x > 0$, $t^2 F_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance et le logarithme). D'après la règle $x^\alpha f(x)$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} |F_x(t)| \, dt = \int_1^{+\infty} F_x(t) \, dt$ converge.

Par Chasles, on en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} |F_x(t)| \, dt$ et donc la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t \, dt$, quel que soit $x > 0$.

Pour $x \leq 0$, $\forall t \geq e$, $e^{-xt} \ln t \geq e \geq 0$, $\int_e^{+\infty} e \, dt$ diverge, puisque $\forall a \geq e$, $\int_e^a e \, dt = (a - 1)e \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, par comparaison par inégalité des fonctions positives, $\forall x \leq 0$, $\int_0^{\infty} e^{-xt} \ln t \, dt$ diverge.

Le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$. De plus, ce qui va servir dans la suite :
 $\forall x > 0$, $F_x : t \mapsto e^{-xt} \ln t$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$.

2)

Déterminons le domaine de définition de la fonction g de la variable réelle définie par :

$$x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-xt} t \ln t \, dt$$

Quel que soit $x > 0$, la fonction $G_x : t \mapsto e^{-xt} t \ln t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, car continue.

$$G_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

On peut prolonger G_x par continuité en 0, en posant $G_x(0) = 0$. $\int_0^{\infty} e^{-xt} t \ln t \, dt$ est **faussement généralisée en 0**.

Quel que soit $t \geq 1$, $G_x(t) \geq 0$, et $\forall x > 0$, $t^2 G_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance et le logarithme). D'après la règle $x^\alpha f(x)$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} G_x(t) \, dt$ converge.

On en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} t \ln t \, dt$, quel que soit $x > 0$.

Pour $x \leq 0$, $\forall t \geq e$, $e^{-xt} t \ln t \geq e \geq 0$, Comme dans la question précédente, par comparaison par inégalité des

fonctions positives, $\forall x \leq 0$, $\int_0^\infty e^{-xt} t \ln t dt$ diverge.

Le domaine de définition de g est $]0, +\infty[$.

En fait, nous avons montré que, quel que soit $x >$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} t \ln t$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$, puisque prolongeable par continuité en 0, en prenant la valeur 0, et puisque $\int_1^\infty e^{-xt} t |\ln t| dt = \int_1^\infty e^{-xt} t \ln t dt$ converge.

3) Etudions la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0, f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \ln t dt$$

Posons sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ $F : (x, t) \mapsto e^{-xt} \ln t$.

Quel que soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, car continue. Elle y est intégrable, comme on l'a vu.

$$\forall x > 0, \forall t > 0, \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = -t e^{-xt} \ln t$$

existe, continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t , car continue sur $]0, +\infty[$

D'autre part, $\forall a >$, $\forall t \in [a, +\infty[$, $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \right| \leq t |\ln t| e^{-at} = \varphi_a(t)$.

On a vu dans la question précédente, que quel que soit $x >$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} t \ln t$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$, donc $\varphi_a(t)$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme, avec hypothèse de domination locale.

f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt = -g(x)$$

4)

$$\forall x > 0, \forall 0 < a < b, I(a, b) = \int_a^b e^{-xt} \ln t dt \xrightarrow{a \rightarrow 0, b \rightarrow +\infty} f(x)$$

Intégrons par parties :

$$\forall x > 0, I(a, b) = \int_a^b \underbrace{e^{-xt}}_{u(t)}, \overbrace{\ln t}^{v'(t)} dt = [e^{-xt}(t \ln t - t)]_{t=a}^{t=b} + x \int_a^b e^{-xt}(t \ln t - t) dt$$

$$\forall x > 0, I(a, b) = [e^{-xt}(t \ln t - t)]_{t=a}^{t=b} + x \left[\int_a^b e^{-xt} t \ln t dt - \int_a^b e^{-xt} t dt \right]$$

Or $\forall x > 0$, $\int_a^b e^{-xt} t dt = \frac{1}{x} (e^{-ax} - e^{-bx}) \xrightarrow{a \rightarrow 0, b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$. En passant à la limite, pour $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$, puisque les intégrales généralisées existent, on obtient :

$$\forall x > 0, f(x) = xg(x) - \frac{1}{x} \iff \boxed{\forall x > 0, xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x} = 0}$$

Résolvons sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $E xy' + y + \frac{1}{x} = 0$.

On associe l'équation sans second membre $H xy' + y = 0 \iff (xy(x))' = 0 \iff xy(x) = \lambda$.

La solution générale de H sur $]0, +\infty[$ est donnée par $y(x) = \lambda y_1(x)$ en posant $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Cherchons sur

$]0, +\infty[$ une solution particulière de E par la méthode de la variation de la constante, en posant $y_0(x) = \lambda(x)y_1(x)$. On a :

$$xy'_0(x) + t_0(x) + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lambda(x) \underbrace{(xy'_1(x) + y_1(x))}_{=0} + \frac{1}{x} + x\lambda'(x)y_1(x) = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \lambda'(x) = -\frac{1}{x}$$

On peut choisir sur $]0, +\infty[$: $\lambda(x) = -\ln x$ et donc $y_0(x) = -\frac{\ln x}{x}$.

la solution générale de E sur $]0, +\infty[$ est donnée par :

$$\forall x > 0, y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x), \lambda \in \mathbb{R}$$

En particulier f solution de E sur $]0, +\infty[$ s'écrit :

$$\forall x > 0, f(x) = - - \frac{\ln x}{x} + \lambda \frac{1}{x}$$

Or $f(1) = \lambda$. D'où :

$$\boxed{\forall x > 0, f(x) = - - \frac{\ln x}{x} + f(1)\frac{1}{x}, f(1) = \int_0^\infty e^{-t} \ln t dt}$$

5)

Comme A supérieur ou égal à 1 :

$$u(A) = \left| \int_A^\infty e^{-t} \ln t dt \right| - (A+1)e^{-A} = \int_A^\infty e^{-t} \ln t dt - (A+1)e^{-A}$$

Comme $u(A) = \int_0^\infty e^{-t} \ln t dt - \int_0^A e^{-t} \ln t dt - (A+1)e^{-A}$ et que $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est continue sur $[1, +\infty[$, $u(A)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :

$$\forall A \geq 1, u'(A) = -e^{-A} \ln A - e^{-A}(-A-1+1) = e^{-A}(A - \ln A) \geq 0$$

Donc u est croissante sur $[1, +\infty[$. La convergence de $\int_A^\infty e^{-t} \ln t dt$ montre que :

$$\int_A^\infty e^{-t} \ln t dt = \int_0^\infty e^{-t} \ln t dt - \int_0^A e^{-t} \ln t dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

D'où :

$$\boxed{\forall A \geq 1, \left| \int_A^\infty e^{-t} \ln t dt \right| - (A+1)e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \leq 0}$$

6)

Etudions sur $]0, 1]$ la fonction $v(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} + \ln t$.

$$\forall t \in]0, 1], v'(t) = -\frac{1}{(\sqrt{t})^3} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \leq 0$$

Donc $v(t)$ est décroissante sur $]0, 1]$, et comme $v(1) = 2 \geq 0$:

$$\boxed{\forall t \in]0, 1], \frac{2}{\sqrt{t}} + \ln t \geq 0}$$

$$\forall \varepsilon \in]0, 1], w(\varepsilon) = 4\sqrt{\varepsilon} - \left| \int_0^\varepsilon e^{-t} \ln t dt \right| = 4\sqrt{\varepsilon} + \int_0^\varepsilon e^{-t} \ln t dt =$$

$$4\sqrt{\varepsilon} + \left[\int_1^\varepsilon e^{-t} \ln t dt - \int_1^0 e^{-t} \ln t dt \right]$$

Comme $\varepsilon \mapsto e^{-t} \ln t$ est continue sur $]0, 1]$, on peut dériver et :

$$\forall \varepsilon \in]0, 1], w'(\varepsilon) = 2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon$$

Or $\forall \varepsilon \in]0, 1]$, $e^{-\varepsilon} \leq 1$ et $\ln \varepsilon \leq 0$. Donc $\forall \varepsilon \in]0, 1]$, $e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon \geq \ln \varepsilon$.

Donc, d'après la première partie de la question :

$$\forall \varepsilon \in]0, 1], w'(\varepsilon) = 2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon \geq 2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \ln \varepsilon \geq 0$$

$w(\varepsilon)$ est croissante sur $]0, 1]$. D'autre part, comme $\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt$ converge, alors $\int_0^\varepsilon e^{-t} \ln t \, dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ et $w(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

La croissance de w sur $]0, 1]$ montre alors que :

$$\boxed{\forall \varepsilon \in]0, 1], w(\varepsilon) = 4\sqrt{\varepsilon} - \left| \int_0^\varepsilon e^{-t} \ln t \, dt \right| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \int_0^\varepsilon e^{-t} \ln t \, dt \right| \leq 4\sqrt{\varepsilon}}$$

B

On désigne par a, b, α, β quatre constantes réelles vérifiant $a < b$ et $\alpha < \beta$.

Soit φ une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles, continue et croissante au sens large.

1)

Pour n entier naturel strictement positif, on pose $h = \frac{b-a}{n}$. Comme φ croissante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(a+kh) \, dt \leq \int_a^b \varphi(t) \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(t) \, dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(a+(k+1)h) \, dt$$

D'où les inégalités :

$$h \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+kh) \leq \int_a^b \varphi(t) \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(t) \, dt \leq h \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+(k+1)h)$$

i.e :

$$\boxed{h \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+kh) \leq \int_a^b \varphi(t) \, dt \leq h \sum_{k=1}^n \varphi(a+kh)}$$

2)

Les inégalités obtenues si φ avait été décroissante au sens large sont évidemment :

$$\boxed{h \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+kh) \geq \int_a^b \varphi(t) \, dt \geq h \sum_{k=1}^n \varphi(a+kh)}$$

3)

Bien sûr :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_a^b \varphi(t) \, dt - h \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+kh) \right| \\ \left| \int_a^b \varphi(t) \, dt - h \sum_{k=1}^n \varphi(a+kh) \right| \end{array} \right\} \leq \left| h \sum_{k=1}^n \varphi(a+kh) - h \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+kh) \right| = \frac{b-a}{n} (\varphi(b) - \varphi(a))}$$

4)

On suppose désormais que φ admet une dérivée seconde sur $[a, b]$ et qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que, pour tout t de $[a, b]$, on a :

$$\alpha \leq \varphi''(t) \leq \beta$$

Etudions sur $[a, b]$ le signe de la dérivée seconde de la fonction θ définie sur $[a, b]$ par la relation :

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{\alpha}{2}(t-a)(b-t) \implies \theta'(t) = \varphi'(t) + \frac{\alpha}{2}(-2t+a+b) \implies \theta''(t) = \varphi''(t) - \alpha \geq 0$$

5)

Posons :

$$g(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a) + \varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t) dt - \alpha \frac{(x-a)^3}{12}$$

On a $g'(x) = \frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(x)) + \frac{x-a}{2}\varphi'(x) - \varphi(x) - \alpha \frac{(x-a)^2}{4}$ et :

$$\forall x \in [a, b], g''(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{x-a}{2}\varphi''(x) - \varphi'(x) - \alpha \frac{(x-a)}{2} = \frac{x-a}{2}(\varphi''(x) - \alpha) \geq 0$$

Donc g' est croissante sur $[a, b]$ et comme $g'(a) = 0$, g' est positive sur $[a, b]$, donc g est croissante sur $[a, b]$. Or $g(a) = 0$. Donc :

$$\forall x \in [a, b], g(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a) + \varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t) dt - \alpha \frac{(x-a)^3}{12} \geq 0$$

De même, on étudie la fonction h définie sur $[a, b]$ par :

$$h(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a) + \varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t) dt - \beta \frac{(x-a)^3}{12}$$

On trouve successivement :

$$h'(x) = \frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(x)) + \frac{x-a}{2}\varphi'(x) - \varphi(x) - \beta \frac{(x-a)^2}{4}$$

$$\forall x \in [a, b], h''(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{x-a}{2}\varphi''(x) - \varphi'(x) - \beta \frac{(x-a)}{2} = \frac{x-a}{2}(\varphi''(x) - \beta) \leq 0$$

Donc h' décroissante sur $[a, b]$ et comme $h'(a) = 0$, h' est négative sur $[a, b]$. Donc h décroît sur $[a, b]$. Comme $h(a) = 0$, on a :

$$\forall x \in [a, b], h(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a) + \varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t) dt - \beta \frac{(x-a)^3}{12} \leq 0$$

Donc, quel que soit $x \in [a, b]$, on a :

$$\alpha \frac{(x-a)^3}{12} \leq \frac{x-a}{2}(\varphi(a) + \varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t) dt \leq \beta \frac{(x-a)^3}{12}$$

En particulier, pour $x = b$:

$$\boxed{\alpha \frac{(b-a)^3}{12} \leq \frac{b-a}{2}(\varphi(a) + \varphi(b)) - \int_a^b \varphi(t) dt \leq \beta \frac{(b-a)^3}{12}}$$

6)

Evidemment, en remplaçant a par $a + kh$, b par $a + (k+1)h$, et donc $b-a$ par $(a + (k+1)h) - (a + kh) = h$, on a les inégalités ($k = 0..(n-1)$) :

$$\alpha \frac{h^3}{12} \leq \frac{h}{2}(\varphi(a + kh) + \varphi(a + (k+1)h)) - \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(t) dt \leq \beta \frac{h^3}{12}$$

En sommant les inégalités de 0 à $(n-1)$, on obtient :

$$\alpha n \frac{h^3}{12} \leq \frac{h}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+kh) + \sum_{k=1}^n \varphi(a+kh) \right] - \int_a^b \varphi(t) dt \leq \beta n \frac{h^3}{12}$$

On pose :

$$S = \frac{h}{2} \left[\varphi(a) + \varphi(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(a+kh) \right]$$

On a donc :

$$\alpha n \frac{h^3}{12} \leq S - \int_a^b \varphi(t) dt \leq \beta n \frac{h^3}{12}$$

Comme $h = \frac{b-a}{n}$, on obtient :

$$\alpha \frac{(b-a)^3}{12n^2} \leq S - \int_a^b \varphi(t) dt \leq \beta \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Donc :

$$\left| S - \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \max(|\alpha|, |\beta|) \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

PROBLEME III

Soit p une constante réelle strictement positive.

1)

La courbe $\mathcal{P}$ d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

est évidemment une parabole, de **foyer** O , d'axe de symétrie Ox , lieu des points M tels que $OM = MH$, où MH est la distance de M à la **directrice** D , d'équation $x = p$.

Remarque : une fois que l'on sait qu'il s'agit d'une parabole, de foyer O , d'axe Ox , **c'est facile de retrouver la directrice**. En effet, le sommet S est obtenu pour $\theta = 0$. Il a donc pour abscisse $\frac{p}{2}$. D'où l'équation de la directrice $Dx = p$.

2)

Donnons une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi[, \begin{cases} x = \frac{p}{1 + \cos \theta} \cos \theta = p \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = p \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) = p \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \\ y = \frac{p}{1 + \cos \theta} \sin \theta = p \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

On pose $t = \tan \frac{\theta}{2}$. D'où une équation catésienne de $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \frac{p}{2}(1 - t^2) \\ y(t) = pt \end{cases}$$

3)

Pour θ décrivant l'intervalle $] - \pi, \pi[$, on associe au point $P(\theta)$ de $\mathcal{P}$ le point $Q(\theta)$ défini par la relation :

$$\overrightarrow{OQ(\theta)} = p^2 \frac{\overrightarrow{OP(\theta)}}{\|\overrightarrow{OP(\theta)}\|^2}$$

On note $\mathcal{L}$ la courbe décrite par le point $Q(\theta)$.

Posons $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos \theta \overrightarrow{i} + \sin \theta \overrightarrow{j}$.

$$\overrightarrow{OQ(\theta)} = p^2 \frac{(1 + \cos \theta)^2}{p^2} \frac{p}{(1 + \cos \theta)} \overrightarrow{u(\theta)}$$

$\mathcal{L}$ est la cardioïde bien connue d'équation polaire $\rho(\theta) = p(1 + \cos \theta)$

On a représenté la demi-cardioïde pour $y \geq 0$.

Si on note $V(P)$ (resp. $V(Q)$) l'angle de la tangente en $P(\theta) \in \mathcal{P}$ (resp. en $Q(\theta)$ à $\mathcal{L}$) avec $\overrightarrow{u(\theta)}$ on a :

$$\tan(V(P)) = \frac{\rho_P(\theta)}{\rho'_P(\theta)} = \frac{\frac{p}{1 + \cos \theta}}{\frac{p \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2}} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

$$\tan(V(Q)) = \frac{\rho_Q(\theta)}{\rho'_Q(\theta)} = \frac{p(1 + \cos \theta)}{p \sin \theta} = -\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = -\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

Les tangentes en $P(\theta)$ à $\mathcal{P}$ et en $Q(\theta)$ à $\mathcal{L}$ sont donc symétriques par rapport à la droite OPQ

4)

Au point $Q(\theta)$ de $\mathcal{L}$, on associe le point $R(\theta)$ défini par la relation :

$$\overrightarrow{OR(\theta)} = \left(1 - \frac{p}{\|\overrightarrow{OQ(\theta)}\|}\right) \overrightarrow{OQ(\theta)} = p(1 + \cos \theta) \overrightarrow{u(\theta)} - \frac{p}{p(1 + \cos \theta)} p(1 + \cos \theta) \overrightarrow{u(\theta)}$$

$$\overrightarrow{OR(\theta)} = p \cos \theta \overrightarrow{u(\theta)}$$

$R(\theta)$ décrit le cercle $\mathcal{R}$ passant par P , dont le centre est le point $S(\frac{p}{2}, 0)$

5)

On désigne désormais par $\mathcal{L}$ la courbe fermée du plan paramétrée par θ obtenue en complétant la courbe $\mathcal{L}$ définie à la question 3) par les deux relations $Q(-\pi) = Q(\pi) = 0$.

L'aire $\mathcal{A}$ d'un morceau de surface S est donnée par :

$$\mathcal{A} = \iint_S dx dy \underset{\text{en polaires}}{=} \iint_{\Delta} r dr d\theta$$

où Δ décrit S en polaires. Si S est le domaine délimité par les demi-droites OA , d'angle polaire α , OB d'angle polaire β et la courbe C d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, le domaine Δ est défini par $\Delta \begin{cases} \alpha & \leq \theta \leq \beta \\ 0 & \leq r(\theta) \leq \rho(\theta) \end{cases}$.

Alors :

$$\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_0^{\rho(\theta)} r dr \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

L'aire de la surface de $\mathbb{R}^2$ intérieure à $\mathcal{L}$ est donnée, puisque Ox est axe de symétrie de $\mathcal{L}$ par :

$$\mathcal{A} = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} p^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = p^2 \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) + 2 \cos \theta\right) d\theta$$

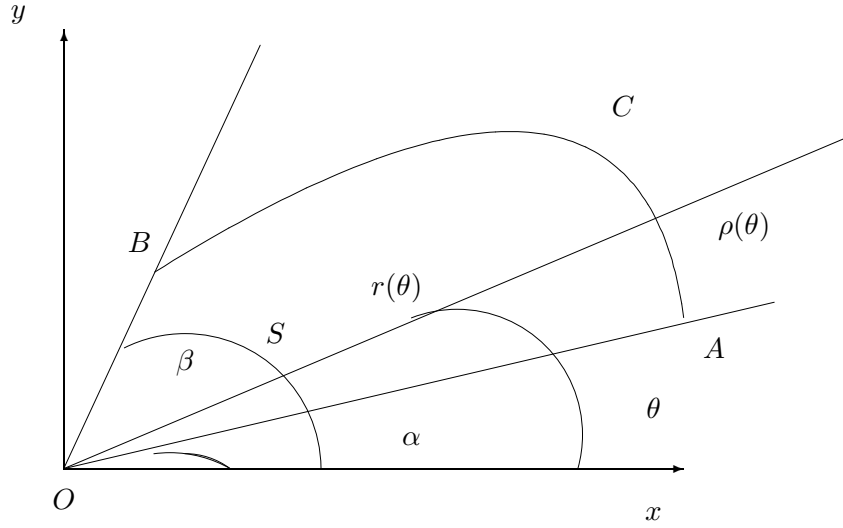


FIG. 3 – Aire d'un secteur

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2}\pi p^2$$

Le centre d'inertie G de cette surface intérieure, supposée homogène est évidemment sur Ox , axe de symétrie de $\mathcal{L}$. Donc $y_G = 0$.

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}} \iint_S x \, dx \, dy \quad \text{en polaires} \quad \frac{1}{\mathcal{A}} \iint_{\Delta} r \cos \theta \, r \, dr \, d\theta \quad \text{sur le secteur} \quad = \quad \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_0^{\rho(\theta)} r^2 \, dr \right) \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\theta) \cos \theta \, d\theta$$

Pour la même raison de symétrie :

$$x_G = \frac{2}{3} \frac{1}{\mathcal{A}} \int_0^{\pi} p^3 (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta = \frac{2p^3}{3} \frac{1}{\mathcal{A}} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta$$

$$\begin{aligned} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta &= \cos^4 \theta + 3 \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta + \cos \theta = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta)^2 + 3 \cos^3 \theta + \frac{3}{2} (1 + \cos 2\theta) + \cos \theta = \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) + 3 \cos^3 \theta + \frac{3}{2} (1 + \cos 2\theta) + \cos \theta = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) \right) + 3 \cos^3 \theta + \frac{3}{2} (1 + \cos 2\theta) + \cos \theta = \\ &= \frac{15}{8} + \cos \theta + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta + 3(1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta = \left[\frac{15}{8} \theta + \sin \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta + \sin \theta - \sin^3 \theta \right]_0^{\pi} = \left[\frac{15}{8} \theta \right]_0^{\pi} = \frac{15}{8} \pi.$$

$$\text{On trouve } x_G = \frac{5}{6} p$$

6)

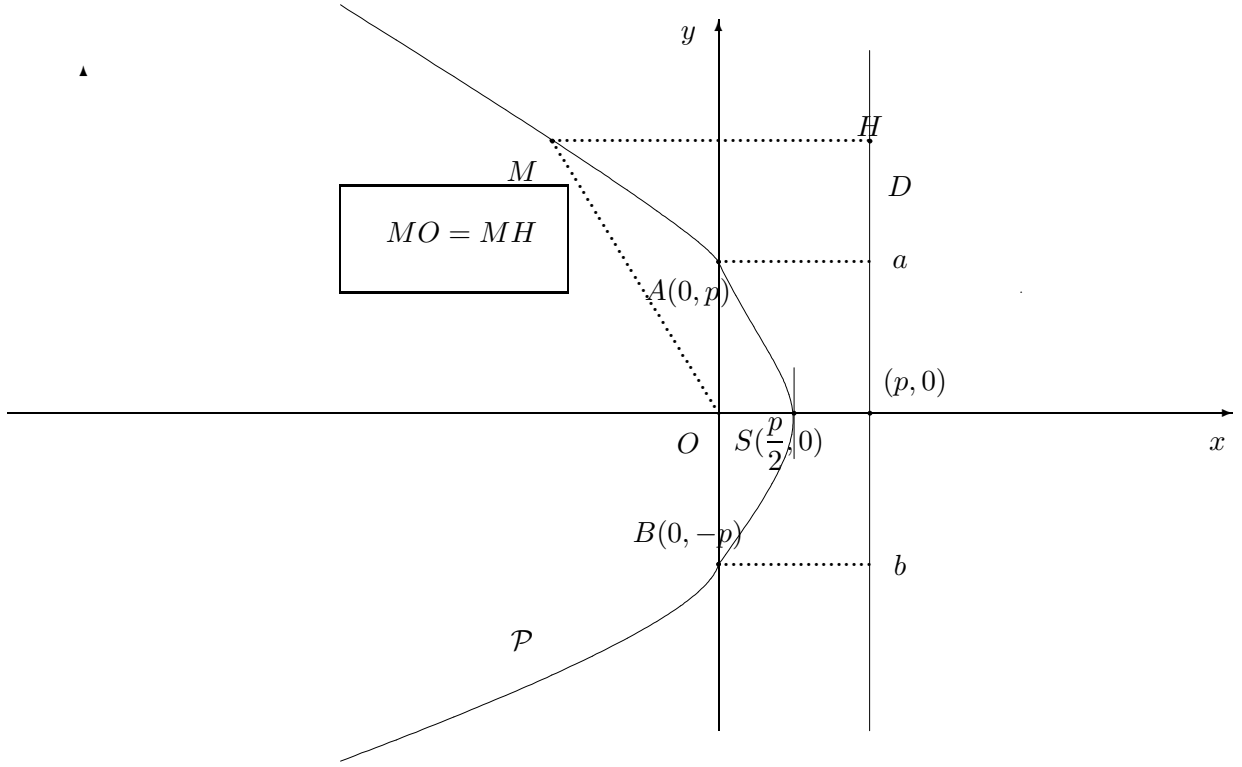


FIG. 4 – Parabole $\mathcal{P}$

A l'aide du repère canonique de $\mathbb{R}^2$, on définit le champ de vecteurs $\vec{V}$ par ses deux composantes :

$$V_x = (1 - e^{-x} \cos y), \quad V_y = (x - e^{-x} \sin y)$$

Pour que le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive sur $\mathbb{R}^2$ d'un potentiel scalaire, i.e qu'il soit un champ de gradients, ou encore qu'il existe une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}f}$.

La condition nécessaire est connue : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$. Cette condition est suffisante car $\mathbb{R}^2$ est étoilé par rapport à un de ses points, n'importe lequel d'ailleurs. Or :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Comme $\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = (1 + e^{-x} \sin y) - e^{-x} \sin y = 1 \neq 0$, le champ $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

La circulation de $\vec{V}$ sur la courbe fermée $\mathcal{L}$ orientée dans le sens trigonométrique vaut :

$$\int_{\mathcal{L}} V_x dx + V_y dy \underset{\text{cf Green}}{\overset{\text{Riemann}}{=}} \iint_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S (1) dx dy = \mathcal{A} = \frac{3}{2} \pi p^2$$

On rappelle que S est la surface intérieure à $\mathcal{L}$.

La circulation de $\vec{V}$ sur la courbe fermée $\mathcal{L}$ orientée dans le sens trigonométrique est donc égale à $\frac{3}{2} \pi p^2$.

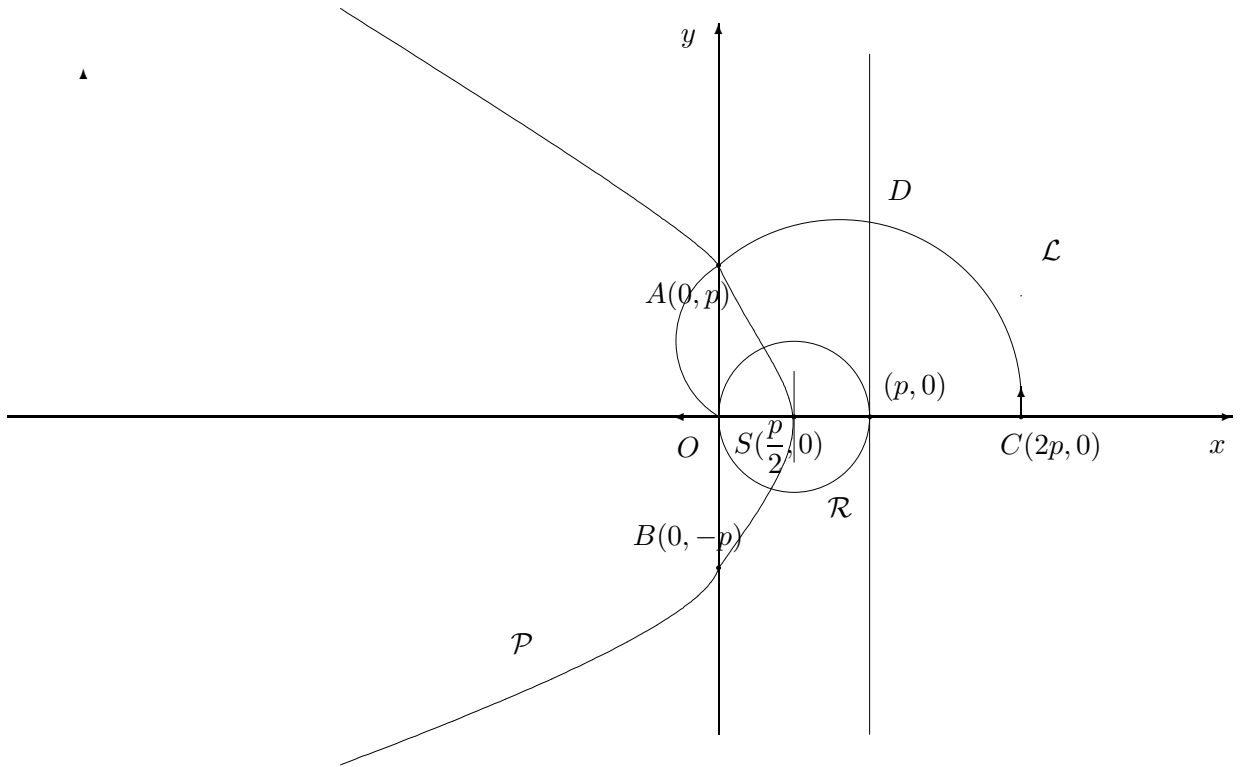


FIG. 5 – Courbes $\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$