CORRIGE DE L'ÉPREUVE COMMUNE AUX ENS DE PARIS ET CACHAN 2004

Partie I

1) Il suffit de majorer $|\varphi|^2$ par $N_\infty(\varphi)^2$ i.e.

$$N_2(\varphi) = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \le \left(\int_0^{2\pi} N_\infty(\varphi)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} N_\infty(\varphi)$$

donc $C_\infty = \sqrt{2\pi}$.

2) Comme $|\varphi(x)|^4 \le |\varphi(x)|^2 N_\infty(\varphi)^2$ alors

$$N_4(\varphi) = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^4 \,\mathrm{d}x\right)^{1/4} \le \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/4}}_{N_2(\varphi)^{1/2}} .N_\infty(\varphi)^{1/2}.$$

3) Comme φ est $\mathcal{C}^1$ alors φ est égale à la somme de sa série de Fourier qui converge normalement donc $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi) e_n$.

- Si $\|\varphi\|_s = +\infty$ l'inégalité est vérifiée pour tout choix de $C(s)$.
- Si $\|\varphi\|_s < +\infty$ on écrit que $|c_n(\varphi)| = |c_n(\varphi)|(1+n^2)^{s/2} \times (1+n^2)^{-s/2}$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\varphi(x)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)| \le \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 (1+n^2)^s} \times \underbrace{\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{-s}}}_{=C(s)}$$

$C(s)$ est bien défini car $(1+n^2)^{-s} \sim |n|^{-2s}$ avec $2s > 1$.

Conclusion, on a $\forall \varphi \in C^1_{per},\ N_\infty(\varphi) \le C(s)\|\varphi\|_s$.

4) $c_n(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) e^{-inx} \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi} (\pi - x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x\right)$.

Or $\int (\pi - x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x = \left(-\frac{ix}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{i\pi}{n}\right) e^{-inx}$ d'où

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{n^2} e^{-in\pi} - \frac{i\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^2}, \quad c_0(\varphi) = \frac{\pi}{2}.$$

On a bien évidemment $\varphi \in \mathcal{C}^0_{per}$ et $\varphi \in H^s$ pour $s < 3/2$ ($|c_n(\varphi)|^2 (1+n^2)^s = O\left(\frac{1}{n^{4-2s}}\right)$).

5) Soit $\varphi_n(x) = \sqrt{\psi_n(x)}$ où $\psi_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x| & \text{si } 0 \le |x| \le 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n \le x \le 2\pi - 1/n \end{cases}$ prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. $N_\infty(\varphi) = \sqrt{n}$ et $N_2(\varphi) = 1$ donc il ne peut y avoir de constante C telle que $N_\infty(\varphi) \le C N_2(\varphi)$.

6) Si $\varphi \in \mathcal{C}^1_{per}$ alors $\sum n^2 |c_n(\varphi)|^2$ converge (Parseval appliqué à φ') donc $\sum (1+n^2)|c_n(\varphi)|^2$ converge soit $\varphi \in H^1$.

7) Il suffit de prendre la fonction φ du 4). En effet $\varphi \in \mathcal{C}^0_{per}$ et $\in H^s$ pour $s < 3/2$.

8.1) Si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{per}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum |c_n(\varphi)|^2 n^{2k}$ converge (Parseval appliqué à $\varphi^{(k)}$.

Si $k > s$ alors $\dfrac{(1+n^2)^s}{n^{2k}} \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, $|c_n(\varphi)|^2 (1+n^2)^s = O\left(|c_n(\varphi)|^2 n^{2k}\right)$ et par conséquent $\varphi \in H^s$ i.e. $\mathcal{C}^\infty_{per} \subset H^s$.

Soit $< \varphi, \psi >_s = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(\varphi)} c_n(\psi)(1+n^2)^s$.

$|\overline{c_n(\varphi)} c_n(\psi)| \leq \frac{1}{2}\left[|c_n(\varphi)|^2 + |c_n(\psi)|^2\right]$ donc $\sum \overline{c_n(\varphi)} c_n(\psi)(1+n^2)^s$ est absolument convergente par conséquent convergente.

$(\varphi, \psi) \mapsto < \varphi, \psi >_s$ est donc un produit hermitien (vérification immédiate).

On a ainsi répondu aux deux questions à la fois.

8.3) On pose $g_n = (1+n^2)^{-s/2} e_n$, $c_m(g_n) = (1+n^2)^{-s/2}\delta_{m,n}$ donc $\|g_n\|_s = 1$ et si $m \neq n$, $< g_n, g_m >= 0$.

Montrons que $\mathrm{Vect}(g_n; n \in \mathbb{Z})$ est dense dans C^∞_{per} pour $\|.\|_s$:

soit $\Phi_N = \sum_{n=-N}^{N} < g_n, \varphi >_s g_n$ où $< g_n, \varphi >_s = (1+n^2)^s c_n(\varphi)$. On a en fait $\Phi_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(\varphi) e_n$ et on sait que $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e_n$. On en déduit que

$$\varphi - \Phi_N = \sum_{|n|\geq N+1} c_n(\varphi)e_n \Rightarrow \|\varphi - \Phi_N\|_s^2 = \sum_{|n|\geq N+1} |c_n(\varphi)|^2(1+n^2)^s$$

i.e. $\|\varphi - \Phi_N\|_s \to 0$, donc $\mathrm{Vect}(g_n; n \in \mathbb{Z})$ est dense dans C^∞_{per} pour $\|.\|_s$.

8.4) $e_p\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{per}$ donc M_p qui est visiblement linéaire est un endomorphisme.

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e_n \Rightarrow e_p\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n-p}(\varphi)e_n$$

donc $\|e_p\varphi\|_s^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{n-p}(\varphi)|^2(1+(n+p)^2)^s$.

On suppose $p \neq 0$ (sinon c'est trivial).

- Si $p \neq \pm 1$ alors $1+(n+p)^2 \leq (1+p^2)(1+n^2)$ (car $|p| \geq 2$) donc

$$\|e_p\varphi\|_s^2 \leq (1+p^2)^s \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2(1+n^2)^s \leq (1+p^2)^s\|\varphi\|_s^2$$

- Si $p = \pm 1$ alors $1+(n\pm 1)^2 \leq 3(1+n^2)$ donc

$$\|e_p\varphi\|_s^2 \leq 3^s \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2(1+n^2)^s \leq 3^s\|\varphi\|_s^2$$

Dans tous les cas on a $\|M_p(\varphi)\|_s \leq K_s\|\varphi\|_s$ ce qui assure la continuité de M_p.

Si on prend $\varphi = 1$ alors $\|e_p\varphi\|_s^2 = (1+p^2)^s$ et par conséquent, pour $p \neq \pm 1$, $\sup\{\|M_p(\varphi)\|_s,\ \varphi \in C^\infty_{per} : \|\varphi\|_s = 1\} = (1+p^2)^{s/2}$.

Si $p = 1$ on cherche la constante C minimale telle que $1+(n+1)^2 \leq C(1+n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On étudie la fonction $f(x) = \dfrac{1+(x+1)^2}{1+x^2}$, $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}(1-x-x^2)$ qui s'annule pour $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ d'où

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		-	0	+	0	-	
f	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	1

f présente un maximum en $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\#1,6$ et si l'on restreint l'étude à $\mathbb{Z}$, le maximum de f est à choisir entre $f(1) = \dfrac{5}{2}$ et $f(2) = 2$ d'où $\|M_1(\varphi)\|_s \leq \left(\dfrac{5}{2}\right)^s \|\varphi\|_s$ valeur atteinte pour $\dfrac{e_1}{\|e_1\|_s}$.

On obtient, par symétrie, le même résultat si $p = -1$.

Partie II

1.1) On a $|a(x,n)c_n(\varphi)e_n(x)| \leq A(1+|n|)^m|c_n(\varphi)|$. Or $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{per}$ donc $|c_n(\varphi)| = O\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier $|c_n(\varphi)| = O\left(\dfrac{1}{n^{m+2}}\right)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a(x,n)c_n(\varphi)e_n(x)$ est bien définie.
T_a est évidemment linéaire.
Il reste à montrer que T_a est à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty_{per}$, la périodicité étant immédiate, il suffit donc de montrer que pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{per}$ alors $T_a\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{per}$.
La série $\sum a(x,n)c_n(\varphi)e_n(x)$ converge (normalement), $\partial_x[a(x,n)c_n(\varphi)e_n(x)] = \partial_x[a(x,n)]c_n(\varphi)e_n(x) + ina(x,n)c_n(\varphi)e_n(x)$ donc

$$|\partial_x[a(x,n)c_n(\varphi)e_n(x)]| \leq [A_{0,1} + A|n|]\,|c_n(\varphi)|(1+|n|)^m$$

i.e. comme $|c_n(\varphi)| = O\left(\dfrac{1}{|n|^{m+3}}\right)$ on a convergence normale de cette série donc T_a est continûment dérivable. On obtiendrait, à l'aide de la formule de Leibniz une majoration comparable pour la série $\sum \partial_x^\beta[a(x,n)c_n(\varphi)e_n(x)]$ et ceci permet de conclure au caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $T_a(\varphi)$.

1.2) Si $\varphi \in \mathcal{C}^p_{per}$ alors $n^p c_n(\varphi) \to 0$ (lemme de Lebesgue appliqué à $\varphi^{(p)}$) donc, si $p \geq m+2$ alors $T_a\varphi$ est correctement définie et est dans $\mathcal{C}^0_{per}$.

2) On sait qu'une fonction périodique continue est bornée sur $\mathbb{R}$ ce qui entraîne que $|a(x,\xi)| \leq \|\alpha\|_\infty$. De même $\forall \beta \in \mathbb{N}$, $|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| = |\alpha^{(\beta)}(x)| \leq \|\alpha^\beta\|_\infty$ donc a est un symbole d'ordre 0.
$(T_a\varphi)(x) = \alpha(x)\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e_n(x) = \alpha(x)\varphi(x)$ car φ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ est égale à la somme de sa série de Fourier.

3) On a $|a(x,\xi)| = |\xi| \leq 1+|\xi|$ et $|\partial_\xi a(x,\xi)| = 1 = (1+|\xi|)^{1-1}$, les autres dérivées étant nulles on peut conclure : a est un symbole d'ordre 1.
- $(T_{i\xi}\varphi)(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} inc_n(\varphi)e_n(x) = \varphi'(x)$.
- $(T_{\xi^2}\varphi)(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n^2c_n(\varphi)e_n(x) = -\varphi''(x)$.

4.1) $x \mapsto a(x,\xi)$ est $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique donc

$$(ip)^k\hat{a}(p,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x^k a(x,\xi)e_p(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Or $m=0$, $\alpha=0$ donc $|\partial_x^k a(x,\xi)| \leq A_{0,k}$ d'où $|p|^k|\hat{a}(p,\xi)| \leq A_{0,k}$ et par conséquent

$$(1+|p|)^N|\hat{a}(p,\xi)| = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}|p|^k.|\hat{a}(p,\xi)| \leq \underbrace{\sum_{k=0}^N \binom{N}{k}A_{0,k}}_{=A_N}$$

soit $|\hat{a}(p,\xi)| \leq \dfrac{A_N}{(1+|p|)^N}$.

4.2) $(T_{f_p}\varphi)(y) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{a}(p,n)c_n(\varphi)e_n(y)$ qui est une série absolument convergente car

$$|\hat{a}(p,n)c_n(\varphi)e_n(y)| \leq \frac{A_2}{(1+|p|)^2}|c_n(\varphi)|$$

et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|$ est convergente car φ est $\mathcal{C}^\infty$. On a donc

$$|(T_{f_p}\varphi)(y)| \leq \frac{A_2}{(1+|p|)^2} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|}_{=\Phi}$$

et par conséquent $\sum |(T_{f_p}\varphi)(y)|$ est absolument convergente.
On peut alors appliquer le résultat le résultat 1 du préliminaire (on vient de voir la convergence absolue de la première somme et la majoration de $|\hat{a}(p,n)|$ uniquement en fonction de p permet d'avoir la convergence de la deuxième somme) :

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{Z}} e_p(y).(T_{f_p}\varphi)(y) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e_p(y)\hat{a}(p,n)c_n(\varphi)e_n(y) \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\underbrace{\sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{a}(p,n)e_p(y)}_{=a(y,n)} \right) c_n(\varphi)e_n(y)
\end{aligned}$$

D.S.F. de $y \mapsto a(y,n)$

$$= T_a\varphi(y)$$

4.3) La formule du **4.2** nous donne le développement en série de Fourier de $T_{f_p}\varphi$ donc, en appliquant Parseval, $\|T_{f_p}\varphi\|_0^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{a}(p,n)|^2.|c_n(\varphi)|^2$. Or $|\hat{a}(p,n)| \leq \dfrac{A_N}{(1+|p|)^N}$ donc $\|T_{f_p}\varphi\|_0^2 \leq \dfrac{A_N^2}{(1+|p|)^{2N}}\|\varphi\|_0^2$.
Si on prend $N \geq 2$, la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}} \|T_{f_p}\varphi\|_0$ converge et, par généralisation de l'inégalité triangulaire, on obtient à l'aide de la formule du **4.2** :

$$\begin{aligned}
\|T_a\varphi\|_0 &\leq \sum_{p\in\mathbb{Z}} \underbrace{\|e_p(T_{f_p}\varphi\|_0}_{=\|T_{f_p}\varphi\|_0} \\
&\leq \underbrace{\sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{A_2}{(1+|p|)^2}}_{=C_0} \|\varphi\|_0
\end{aligned}$$

4.4) On a vu au **I.8.4** que $\|M_p(\varphi)\|_s \leq K_s\|\varphi\|_s$ où $K_s = (1+p^2)^{s/2}$ si $p \neq \pm 1$. On a ainsi $\|e_p(T_{f_p}\varphi)\|_s \leq K_s\|T_{f_p}\varphi\|_s$. on choisit $N \geq s+2$ alors

$$\begin{aligned}
\|T_{f_p}\varphi\|_s^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{a}(p,n)|^2.|c_n(\varphi)|^2(1+n^2)^s \\
&\leq \frac{A_N^2}{(1+|p|)^{2N}}\|\varphi\|_s^2
\end{aligned}$$

et comme $\dfrac{K_s}{(1+|p|)^N} \sim \dfrac{1}{|p|^{N-s}}$ qui est le terme général d'une série convergente alors

$$\|T_a\varphi\|_s \leq \sum_{p\in\mathbb{Z}} K_s\|T_{f_p}\varphi\|_s \leq \underbrace{\sum_{p\in\mathbb{Z}} K_s \frac{A_N}{(1+|p|)^N}}_{=C_s} \|\varphi\|_s.$$

5) $T_b\varphi = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(1+in)c_n(\varphi)e_n$ donc $(T_b)^{-1}\varphi = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{1+in}c_n(\varphi)e_n$ et plus généralement $c_n({T_b}^{-m}\varphi) = \dfrac{1}{(1+in)^m}$ d'où

$$[T_a(T_b)^{-m}](\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a(x,n)}{(1+in)^m}c_n(\varphi)e_n$$

somme bien définie car $\left|\dfrac{a(x,n)}{(1+in)^m}\right| \leq A\dfrac{(1+|n|)^m}{|1+in|^m} \to A$ et $\sum|c_n(\varphi)|$ converge.

Soit $\psi = (T_b)^m\varphi = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(1+in)^m c_n(\varphi)e_n$ alors $T_a\varphi = T_a(T_b)^{-m}\psi = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_1(x,n)c_n(\psi)e_n$ où $a_1(x,\xi) = \dfrac{a(x,\xi)}{(1+i\xi)^m} = a(x,\xi)(1+i\xi)^{-m}$.

- Montrons que a_1 est un symbole d'ordre 0.
  - Commençons par un lemme : $\forall l \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{(1+|\xi|)^l}{(1+\xi^2)^{l/2}} \leq H_l$.

    En effet, la fonction $\xi \mapsto \dfrac{(1+|\xi|)^l}{(1+\xi^2)^{l/2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une limite en $\pm\infty$.
  - $|a_1(x,\xi)| \leq AH_m$.
  - $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a_1(x,\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\alpha}\dbinom{\alpha}{k}\left(\partial_x^\beta\partial_\xi^{\alpha-k}a(x,\xi)\right)(-m)(\ldots)(-m-k+1)i^k(1+i\xi)^{-m-k}$ donc

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a_1(x,\xi)\right| &\leq \sum_{k=0}^{\alpha} B_{\alpha,k}A_{\alpha-k,\beta}\frac{(1+|\xi|)^{m+k-\alpha}}{\sqrt{1+\xi^2}^{m+k}} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\alpha} B_{\alpha,k}A_{\alpha-k,\beta}H_{m+k}\right)(1+|\xi|)^{-\alpha}.\end{aligned}$$

- On obtient finalement $\|T_a\varphi\|_s = \|(T_a(T_b)^{-m})\psi\|_s \leq C_s\|\psi\|_s$ (cf. question **4.4**) et $\|\psi\|_s^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^m|c_n(\varphi)|^2\times(1+n^2)^s = \|\varphi\|_{s+m}^2$.

Conclusion : on a ainsi prouvé que $\|T_a\varphi\|_s \leq C_s\|\varphi\|_{s+m}$.

6) C'est la même démonstration...

Partie III

1) On note $a_k(x,\xi) = \partial_x^k a(x,\xi)$ et $b_h(x,\xi) = \partial_x^h b(x,\xi)$. On a donc

$$\left|\partial_\xi^\gamma a_k(x,\xi)\right| \leq A_{\gamma,k}(1+|\xi|)^{m-\gamma} \text{ et } \left|\partial_\xi^\delta b_h(x,\xi)\right| \leq B_{\delta,h}(1+|\xi|)^{m-\delta}$$

d'où $\partial_\xi^\alpha(a_k(x,\xi)b_h(x,\xi)) = \sum\limits_{l=0}^{\alpha}\dbinom{\alpha}{k}\partial_\xi^l(a_k(x,\xi))\partial_\xi^{\alpha-l}(b_h(x,\xi))$ soit

$$\left|\partial_\xi^\alpha(a_k(x,\xi)b_h(x,\xi))\right| \leq \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}A_{l,k}B_{\alpha-l,h}\right)}_{=C_{\alpha,k,h}}(1+|\xi|)^{m+m'-\alpha}$$

et par conséquent

$$\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (a(x,\xi)b(x,\xi)) = \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \partial_\xi^\alpha (a_k(x,\xi) b_{\beta-k}(x,\xi))$$

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (a(x,\xi)b(x,\xi))\right| \le \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} C_{\alpha,k,\beta-k} \right)}_{=D_{\alpha,\beta}} (1+|\xi|)^{m+m'-\alpha}$$

i.e. $a(x,\xi)b(x,\xi)$ est un symbole d'ordre $m+m'$ (la périodicité par rapport à x et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ étant immédiats).

2) $(T_{ab}\varphi)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{a(x,n)b(x,n)}_{=a(x)b(n)} c_n(\varphi) e_n(x)$ et $(T_b\varphi)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{b(n)c_n(\varphi)}_{=c_n(T_b\varphi)} e_n(x)$ d'où

$$(T_a(T_b\varphi))(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(x)b(n)c_n(\varphi)e_n(x) = (T_{ab}\varphi)(x)$$

On a ensuite $(T_a\varphi)(x) = a(x)\varphi(x)$ (**II.2**) donc $(T_b(T_a\varphi))(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)c_n(a\varphi)e_n(x)$ et il n'y a aucune raison pour que $c_n(a\varphi) = a(n)c_n(\varphi)$, prendre par exemple $a = e_1$, $b(\xi) = i\xi$ et $\varphi = 1$ alors $T_{ab}(\varphi)(x) = 0$ et $T_b \circ T_a(\varphi)(x) = ie^{ix}$.

3.1) $b(x,m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{b}(n,m)e_n$ d'où $T_b\varphi = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{b}(n,m)e_n \right) c_m(\varphi)e_m$.
Soit $f(x,m) = b(x,m)e_{m-p}(x)c_m(\varphi)$, la série $\sum f(x,m)$ converge normalement car $|f(x,m)| = |b(x,m)|.|c_m(\varphi)| \le A(1+|m|)^{m'}|c_m(\varphi)|$ (donc on a aussi convergence simple) et, toujours grâce à cette dernière majoration, $\sum \int_0^{2\pi} |f(x,m)|\,\mathrm{d}x$ converge.
On peut alors utiliser le résultat 2 :

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} b(x,m)e_m(x)c_m(\varphi) \right) e_{-p}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} b(x,m)e_{m-p}(x)\,\mathrm{d}x}_{=2\pi\hat{b}(m-p,m)} \right) c_m(\varphi)$$

d'où $c_p(T_b\varphi) = \sum_{m+n=p} \hat{b}(n,m)c_m(\varphi)$.
On a alors

$$\begin{aligned} T_a(T_b\varphi)(x) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{b}(m-p,m)c_m(\varphi) \right) a(x,p)e_p(x) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{b}(m-p,m)a(x,p)e_p(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z)e^{-imz}\,\mathrm{d}z \right) \quad \text{résultat 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} c(x,m)e^{im(x-z)}\varphi(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

en utilisant le résultat 2 + une translation sur l'indice p.

3.2) On écrit $a(x,\xi) = \sum_{p=0}^{q} a_p(x)\xi^p$, la formule du **3.1** donne

$$T_a(T_b\varphi)(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(x,m)c_m(\varphi)e_m(x) = (T_c\varphi)(x)$$

et

$$\begin{aligned}
c(x,\xi) &= \sum_{p=0}^{q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_p(x)(n+m)^p \hat{b}(n,m) e^{ixn} \\
&= \sum_{p=0}^{q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_p(x) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k m^{p-k} \hat{b}(n,m) e^{ixn} \\
&= \sum_{p=0}^{q} a_p(x) \sum_{k=0}^{p} m^{p-k} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k \hat{b}(n,m) e^{ixn}}_{=\frac{1}{i^k}\partial_x^k b(x,m)} \\
&= \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{i^k k!} \partial_x^k b(x,m) \underbrace{\sum_{p=k}^{q} a_p(x) m^{p-k} \frac{p!}{(p-k)!}}_{=\partial_\xi^k a(x,\xi)}
\end{aligned}$$

d'où la formule proposée

$$c = \sum_{n\geq 0} \frac{(\partial_\xi^n a).(\partial_x^n b)}{i^n n!}.$$

Applications

1) Il suffit de prendre $a(x,\xi) = f(x)\xi^2 + g(x)$. $a(x,\xi)$ est un symbole d'ordre 2.

2) $a^{-1}(x,\xi) = \dfrac{1}{f(x)\xi^2 + g(x)}$ est définie car $m_f = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \inf\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = f(x_0) > 0$ (borne inférieure atteinte sur un compact), de même $m_g = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| > 0$.
a^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique.
Montrons que a^{-1} est un symbole d'ordre -2 :
on pose $b = a^{-1}$, on obtient alors $\partial_x b(x,\xi) = \dfrac{P_{0,1}(x,\xi)}{D^2(x,\xi)}$ et $\partial_\xi b(x,\xi) = \dfrac{P_{1,0}(x,\xi)}{D^2(x,\xi)}$ où $P_{0,1}(x,\xi) = -f'(x)\xi^2 - g'(x)$, $P_{1,0}(x,\xi) = -2\xi f(x)$ et $D(x,\xi) = f(x)\xi^2 + g(x)$.
Par récurrence sur $\alpha + \beta = n$, on suppose que $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x,\xi) = \dfrac{P_{\alpha,\beta}(x,\xi)}{D^{n+1}(x,\xi)}$ où $P_{\alpha,\beta}(x,\xi)$ est un polynôme de degré $\leq 2n$ en ξ dont les coefficients sont des fonctions de $\mathcal{C}^\infty_{per}$.
$\partial_x^{\beta+1}\partial_\xi^\alpha b(x,\xi) = \dfrac{\partial_x P_{\alpha,\beta}(x,\xi) D(x,\xi) - (n+1) P_{\alpha,\beta}(x,\xi)\partial_x D(x,\xi)}{D^{n+2}(x,\xi)}$
$\partial_x^{\beta}\partial_\xi^{\alpha+1} b(x,\xi) = \dfrac{\partial_\xi P_{\alpha,\beta}(x,\xi) D(x,\xi) - (n+1) P_{\alpha,\beta}(x,\xi)\partial_\xi D(x,\xi)}{D^{n+2}(x,\xi)}$ et on vérifie bien que les polynômes sont bien de degré $\leq 2n+2$.
Si on écrit $P_{\alpha,\beta}(x,\xi) = \sum\limits_{p=0}^{2n} a_p(x)\xi^p$ alors

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b(x,\xi)\right| &\leq \frac{\sum\limits_{p=0}^{2n} |a_p(x).|\xi|^p}{(m_f\xi^2 + m_g)^{n+1}} \\
&\leq \frac{\sum\limits_{p=0}^{2n} A_p|\xi|^p}{(m_f\xi^2 + m_g)^{n+1}} = O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)
\end{aligned}$$

si on appelle $A_p = \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_p(x)|$ qui existe car a_p est périodique.

On peut alors conclure que $b = a^{-1}$ est un symbole d'ordre 2.

3) Si on pose $\varphi_1 = T_{a^{-1}}\psi$ (qui est bien défini grâce au **II.1.2**), il suffit de montrer que $T_a\varphi_1 - \psi \in H_1$.

On rajoute l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\psi)|$ converge (ce qui permet de définir $T_1\psi$).

Or, vu la question **III.3.2** on a $T_aT_{a^{-1}} = T_c$ où $c = 1 + d$, et

$$d(x,\xi) = -2\xi f(x)\frac{g'(x) + \xi^2 f'(x)}{(g(x) + \xi^2 f(x))^2} + f(x)\frac{(2g'(x) + \xi^2 f'(x))^2 - (g''(x) + \xi^2 f''(x))(g(x) + \xi^2 f(x))}{(g(x) + \xi^2 f(x))^3}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{5} a_i(x)\xi^i}{(g(x) + \xi^2 f(x))^3}.$$

Comme à la question 2 ci-dessus, on vérifie que d est un symbole d'ordre -1.

Si on reprend la question **II.6** avec d à la place de a, $m = -1$ alors le résultat obtenu se généralise au cas où $\varphi = \psi$ est dans $\mathcal{C}^0_{per}$ d'où, pour $s = 1$, $T_d\psi \in H^1$ et $\|T_d\psi\|_1 \leq C_1\|\varphi\|_0$.

Finalement on a $T_a\varphi_1 - \psi = T_{1+d}\psi - \psi = T_d\psi \in H^1$.

4) On procède par récurrence, si on a construit φ_p pour $p \leq n$ (vrai pour $n = 1$) tel que $T_a\varphi_p - \psi \in H^p$ alors on pose $\varphi_{n+1} = T_{a^{-1}}(\psi - T_a\varphi_n) + \varphi_n$. On a ainsi

$$\begin{aligned} T_a\varphi_{n+1} &= T_aT_{a^{-1}}(\psi - T_a\varphi_n) + T_a\varphi_n = T_aT_{a^{-1}}\psi - T_aT_{a^{-1}}T_a\varphi_n + T_a\varphi_n \\ &= \psi + T_d\psi - T_dT_a\varphi_n \end{aligned}$$

d'où $T_a\varphi_{n+1} - \psi = T_d(\psi - T_a\varphi_n)$. On utilise alors le même argument qu'à la question ci-dessus, $\psi - T_a\varphi_n \in H^n$ donc $T_d(\psi - T_a\varphi_n) \in H^{n+1}$.