

1ère Partie.

$P = \{(x, y); y > 0\}$, soit $G : P \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $G(x, y) = \text{Arc tan}(\frac{x}{y})$.

- 1) G est de classe C^∞ sur P car $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$ et $\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ sont des fractions rationnelles en x et y définies sur P .

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et donc } \Delta G = 0 \text{ sur } P, G \text{ est harmonique sur } P.$$

- 2) Recherche des fonctions φ, C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telles que $F: (x, y) \rightarrow \varphi(\frac{x}{y})$ soit harmonique sur P .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{y} \varphi'(\frac{x}{y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2} \varphi''(\frac{x}{y}) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{x}{y^2} \varphi'(\frac{x}{y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} \varphi'(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y^4} \varphi''(\frac{x}{y}) \end{aligned}$$

Dès lors, pour que $\Delta F = 0$ sur P , il faut que (après avoir multiplié par y^2):

$$\forall (x, y) \in P, (1 + \frac{x^2}{y^2}) \varphi''(\frac{x}{y}) + 2 \frac{x}{y} \varphi'(\frac{x}{y}) = 0 \quad \text{c'est à dire que } \varphi \text{ doit vérifier:}$$

$$\forall t \in \mathbf{R}, (1 + t^2) \varphi''(t) + 2t \varphi'(t) = 0 \quad \text{soit } \left[(1 + t^2) \varphi'(t) \right]' = 0 \quad \text{d'où } (1 + t^2) \varphi'(t) = K \quad \text{soit enfin}$$

$$\underline{\varphi(t) = K \text{Arc tan}(t) + L} \quad \text{où } K, L \text{ sont des constantes réelles.}$$

- 3) Soit $h: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $h(t) = \text{Arc tan}(t) + \text{Arc tan}(\frac{1}{t})$, $h'(t) = 0$ sur chacun des deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ ce qui assure que h est constante sur ces deux intervalles.

$$t = 1 \text{ donne } h(1) = \frac{\pi}{2}, \quad t = -1 \text{ donne } h(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{et finalement } \text{Arc tan}(t) + \text{Arc tan}(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(t)$$

- 4) $\text{Arg}(z)$ est un argument de $z \neq 0$, situé dans $] -\pi, \pi]$. Notons tout de suite que pour $(x, y) \in P$, $\theta = \text{Arg}(x + iy) \in] 0, \pi[$ et par suite:

$$\text{pour } x > 0 \quad \theta = \text{Arc tan}(\frac{y}{x}) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}(\frac{x}{y})$$

$$\text{pour } x < 0 \quad \theta = \pi + \text{Arc tan}(\frac{y}{x}) = \pi - \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}(\frac{x}{y}) \quad \text{et finalement } (x, y) \in P \text{ avec } x \neq 0,$$

$$\text{Arg}(x + iy) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}(\frac{x}{y}), \text{ cette formule restant valable pour } x = 0, (\text{Arg}(iy) = \frac{\pi}{2})$$

Conclusion: $\forall (x, y) \in \mathbb{P} \quad G(x, y) = \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(x + iy)$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\underline{x=0} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} G(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 0 = 0 \quad , \quad \underline{x > 0} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} G(x, y) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \underline{x < 0} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} G(x, y) = -\frac{\pi}{2}$$

et finalement:
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Etude de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$ pour $(x, y) \in \mathbb{P}$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{P}, \quad t \rightarrow \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} = \begin{cases} \frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2 + y^2} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0 \\ -\frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2 + y^2} & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad \text{est continue par morceaux sur}$$

$\mathbb{R}$, donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Le seul problème d'intégrale généralisée est donc en $+\infty$ et $-\infty$.

$$V(t = +\infty) \quad \frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2 + y^2} \approx \frac{\frac{\pi}{2}y}{t^2} \quad \text{et Riemann assure la convergence.}$$

$$V(t = -\infty) \quad -\frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2 + y^2} \approx -\frac{\frac{\pi}{2}y}{t^2} \quad \text{et là encore Riemann donne la convergence.}$$

Calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$.

$$I = \int_{-\infty}^0 -\frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2 + y^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad \text{Posons } t = -u \quad \text{dans la première intégrale.}$$

$$\int_{-\infty}^0 -\frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2 + y^2} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{\pi}{2}y}{(x+u)^2 + y^2} du, \quad \text{par suite} \quad I = \frac{\pi}{2}y \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-t)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+t)^2 + y^2} \right) dt$$

$$\text{soit } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x-t}{y}\right)^2 + 1} - \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{x+t}{y}\right)^2 + 1} \right) dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2 \text{Arc tan}\left(\frac{x}{y}\right) \right) = \pi G(x, y)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt = \pi G(x, y)$$

2ème Partie.

1) Soit la famille de coniques suivantes: $F: \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha-1} = 1$. Cette expression nécessite que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, On verra plus loin ce que l'on peut dire pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

$$\underline{\alpha < 0} \quad \left\{ (x, y); \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha-1} = 1 \right\} = \emptyset$$

$\underline{0 < \alpha < 1}$ $\frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{1-\alpha} = 1$ est l'équation d'une hyperbole centrée en O, d'axe focal Ox, de sommets les points $(\sqrt{\alpha}, 0)$ et $(-\sqrt{\alpha}, 0)$, de foyers les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $y = (+, -) \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} x$.

$\underline{\alpha > 1}$ $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha-1} = 1$ est l'équation d'une ellipse centrée en O, d'axe focal Ox, de sommets les points $(\sqrt{\alpha}, 0)$, $(-\sqrt{\alpha}, 0)$, $(0, \sqrt{\alpha-1})$, $(0, -\sqrt{\alpha-1})$ et de foyers les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

$\underline{\alpha = 0 \text{ et } \alpha = 1}$ Ecrivons alors la relation sous la forme: $(\alpha-1)x^2 + \alpha y^2 = \alpha(\alpha-1)$

Alors $\alpha = 0$ fournit $x^2 = 0$, soit l'axe Oy compté 2 fois (hyperbole du type précédent dégénérée en deux droites lorsque $\alpha \rightarrow 0$).

Et $\alpha = 1$ fournit $y^2 = 0$, soit l'axe Ox compté 2 fois (réunion de l'ellipse dégénérée en le segment $[-1, 1]$ de l'axe Ox ($\alpha \rightarrow 1^+$) et de l'hyperbole dégénérée en les 2 demi-droites $] -\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ de l'axe Ox ($\alpha \rightarrow 1^-$))

2) Soit $M_0(x_0, y_0) \in P$, avec $x_0 \neq 0$, étude de $\Psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\Psi(\alpha) = \frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{y_0^2}{\alpha-1} - 1$.

Le domaine de définition de Ψ est $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\Psi'(\alpha) = -\frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{y_0^2}{(\alpha-1)^2} < 0$.

Ψ décroît de $+\infty$ à $-\infty$ sur $]0, 1[$ et de $+\infty$ à -1 sur $]1, +\infty[$.

Dès lors, soit $(x_0, y_0) \in P$, avec $x_0 \neq 0$. Trouver une conique de la famille F passant par (x_0, y_0) , c'est

rechercher $\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ tel que $\frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{y_0^2}{\alpha-1} = 1$ autrement dit tel que $\Psi(\alpha) = 0$. D'après l'étude

précédente et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe 2 valeurs de α possibles répondant à la question: $\alpha_1 \in]0, 1[\rightarrow$ hyperbole et $\alpha_2 \in]1, +\infty[\rightarrow$ ellipse.

$\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1 \alpha_2$ sont la somme et le produit des racines de l'équation du 2^{ème} degré en α :

$(\alpha-1)x_0^2 + \alpha y_0^2 - \alpha(\alpha-1) = 0$ soit $\alpha^2 - (x_0^2 + y_0^2 + 1)\alpha + x_0^2 = 0$ et on a donc:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = x_0^2 + y_0^2 + 1 \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 = x_0^2$$

Points de P pour lesquels $x_0 = 0$.

On cherche alors α tel que $\frac{y_0^2}{\alpha-1} = 1$ soit $\alpha = 1 + y_0^2$. On ne trouve qu'une seule valeur de α possible,

plus grande que 1. Seule une ellipse de la famille F passe par le point $(0, y_0) \in P$.

Rq: On pourrait à la rigueur dire qu'il passe aussi par ce point l'hyperbole dégénérée en l'axe Oy compté 2 fois dont j'ai parlé précédemment.

3) Soit $M_0(x_0, y_0) \in P$ avec $x_0 \neq 0$ et E et H l'ellipse et l'hyperbole de F passant par M_0 .

$$H: \frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\alpha_1 - 1} - 1 = 0 \quad \alpha_1 \in]0, 1[$$

$$E: \frac{x^2}{\alpha_2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - 1} - 1 = 0 \quad \alpha_2 \in]1, +\infty[$$

La normale en M_0 à H est dirigée par le vecteur $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{\alpha_1} \\ \frac{2y_0}{\alpha_1 - 1} \end{pmatrix}$ et celle à E par $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{\alpha_2} \\ \frac{2y_0}{\alpha_2 - 1} \end{pmatrix}$ et on va

montrer que le produit scalaire $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. Or en effet

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 4 \left[\frac{x_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{y_0^2}{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} \right] = 4 \left[1 + \frac{y_0^2}{x_0^2 - (x_0^2 + y_0^2 + 1) + 1} \right] = 4[1 - 1] = 0$$

4) Soit les fonctions suivantes: $(u, v) \rightarrow x(u, v) = ch(u) \cos(v)$ et $(u, v) \rightarrow y(u, v) = sh(u) \sin(v)$.

Montrons que les deux fonctions x et y sont harmoniques sur $\mathbf{R}^2$. Elles sont bien C^∞ sur $\mathbf{R}^2$. On a:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = sh u \cos v, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = ch u \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -ch u \sin v, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -ch u \cos v \quad \text{et} \quad \Delta x = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = ch u \sin v, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = sh u \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = sh u \cos v, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -sh u \sin v \quad \text{et} \quad \Delta y = 0$$

x et y sont harmoniques sur $\mathbf{R}^2$.

Soit $H: (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$. La matrice jacobienne de H est:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sh u \cos v & -ch u \sin v \\ ch u \sin v & sh u \cos v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Jac(H) = sh^2 u \cos^2 v + ch^2 u \sin^2 v = ch^2 u - \cos^2 v$$

$Jac(H) = ch^2 u - \cos^2 v$ s'annule en les points $(u, v) = (0, k\pi)$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

5) Image par H de la droite $u = u_0$.

C'est la courbe paramétrée par: $\begin{cases} x = ch u_0 \cos v \\ y = sh u_0 \sin v \end{cases}$ d'où les deux cas:

$u_0 = 0$ ($x = \cos v$, $y = 0$) correspond au segment $[-1, 1]$ de l'axe Ox.

$u_0 \neq 0$ l'équation cartésienne de la courbe est alors: $\frac{x^2}{ch^2 u_0} + \frac{y^2}{sh^2 u_0} = 1$ soit $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ avec

$\alpha = ch^2 u_0 > 1$ ce qui fournit une ellipse de la famille F.

Image par H de la droite $v = v_0$.

C'est la courbe paramétrée par: $\begin{cases} x = \cos v_0 chu \\ y = \sin v_0 shu \end{cases}$ d'où les quatre cas:

$v_0 = 2k\pi$ ($x = chu$, $y = 0$) correspond à la demi-droite $[1, +\infty[$ de l'axe Ox.

$v_0 = (2k+1)\pi$ ($x = -chu$, $y = 0$) correspond à la demi-droite $]-\infty, -1]$ de l'axe Ox.

$v_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($x = 0$, $y = (-1)^k shu$) correspond à l'axe Oy.

$v_0 \neq k\frac{\pi}{2}$ l'équation cartésienne de la courbe est alors: $\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1$ soit $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$

avec $\alpha = \cos^2 v_0 \in]0, 1[$ ce qui fournit une moitié d'hyperbole de la famille F, partie de l'hyperbole où x a le signe de $\cos v_0$.

Etude de la réciproque.

Autrement dit: soit une conique de la famille F d'équation $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ avec $\alpha \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

est-elle l'image par H d'une droite $u = u_0$ ou $v = v_0$.

$\alpha \in]0, 1[$ il existe une infinité de valeurs v_0 telles que $\alpha = \cos^2 v_0$ et alors $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ s'écrit

$\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1$ et se paramètre par: $\begin{cases} x = \cos v_0 chu \\ y = \sin v_0 shu \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -\cos v_0 chu \\ y = -\sin v_0 shu \end{cases}$ et l'hyperbole

d'équation $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ est donc en fait l'image par H de la réunion des 2 droites $v = v_0$ et

$v = v_0 + \pi$

$\alpha \in]1, +\infty[$ il existe une unique valeur $u_0 > 0$ telle que $\alpha = ch^2 u_0$ et alors $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ s'écrit

$\frac{x^2}{ch^2 u_0} + \frac{y^2}{sh^2 u_0} = 1$ et se paramètre par: $\begin{cases} x = chu_0 \cos v \\ y = shu_0 \sin v \end{cases}$ donc est l'image par H de la droite $u = u_0$

H bijection de $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ sur P .

$(u, v) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\Rightarrow shu \sin v > 0$ donc $H(u, v) \in P$.

Réciproquement, soit $(x_0, y_0) \in P$:

1^{er} cas: $x_0 = 0$ alors $(0, y_0) = H(u, \frac{\pi}{2})$ où u est l'unique valeur telle que $shu = y_0$

$$(0, y_0) = H(\ln(y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}), \frac{\pi}{2})$$

2^{ème} cas: $x_0 \neq 0$ alors (x_0, y_0) est l'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole de F:

$$H: \frac{x^2}{\alpha_1} + \frac{y^2}{\alpha_1 - 1} - 1 = 0 \quad \alpha_1 \in]0, 1[\quad \text{et} \quad E: \frac{x^2}{\alpha_2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - 1} - 1 = 0 \quad \alpha_2 \in]1, +\infty[$$

Soit alors $u \in]0, +\infty[; \alpha_2 = ch^2 u$ u est unique

$v \in]0, \pi[; \alpha_1 = \cos^2 v$ $\cos v$ ayant le signe de x_0 , v est alors unique.

$(x_0, y_0) = H(u, v)$ et donc H réalise bien une bijection de $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ sur P .

3ème Partie.

Notations: pour $(a, b) \in P$ et $0 \leq r < b$ D_r = disque fermé de centre (a, b) et de rayon r donc $D_r \subset P$

$$m(a, b, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) d\theta$$

$$M(a, b, r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(u, v) du dv & \text{si } r \neq 0 \\ f(a, b) & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

1) Soit r tel que $0 < r < b$.

Pour $(u, v) \in D_r$, on peut poser $\begin{cases} u = a + \rho \cos \theta \\ v = b + \rho \sin \theta \end{cases}$ avec $(\rho, \theta) \in [0, r] \times [0, 2\pi]$ et le jacobien de ce changement de variable vaut ρ . On en déduit:

$$\iint_{D_r} f(u, v) du dv = \int_0^r \left[\int_0^{2\pi} \rho f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) d\theta \right] d\rho \quad \text{soit}$$

$$\iint_{D_r} f(u, v) du dv = 2\pi \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho$$

Pour la deuxième formule, utilisons la formule de Green-Riemann rappelée au début.

$$\iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv = \iint_{D_r} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] du dv = \int_{\Gamma^+} -\frac{\partial f}{\partial v} du + \frac{\partial f}{\partial u} dv$$

où Γ^+ est paramétrée par $\begin{cases} u = a + r \cos \theta \\ v = b + r \sin \theta \end{cases}$ de sorte que

$$\iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\partial f}{\partial v}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial u}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)(r \cos \theta) \right] d\theta$$

soit enfin:

$$\iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv = r \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial f}{\partial u}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial v}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \sin \theta \right] d\theta$$

2) Montrons que $r \rightarrow m(a, b, r)$ est continue sur $[0, b[$

f étant C^∞ sur P , $h(r, \theta) = f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ est continue sur $[0, b[\times [0, 2\pi]$ et par suite le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale simple dépendant d'un paramètre s'applique:

$$r \rightarrow m(a, b, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r, \theta) d\theta \quad \text{est continue sur } [0, b[.$$

3) Pour $r \in]0, b[$ on a $M(a, b, r) = \frac{1}{\pi r^2} 2\pi \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho$ et $M(a, b, r)$ apparait comme le

produit de 2 fonctions continues sur $]0, b[$ à savoir $\frac{2}{r^2}$ et $\int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho$. Ces 2 fonctions sont même

dérivables sur $]0, b[$ car $\rho \rightarrow \rho m(a, b, \rho)$ est continue sur $[0, b[$.

$r \rightarrow M(a, b, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho$ est continue sur $]0, b[$.

Continuité à droite en $r = 0$.

On calcule $\frac{2}{r^2} \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho - f(a, b)$ qui peut s'écrire $\frac{2}{r^2} \int_0^r \rho (m(a, b, \rho) - f(a, b)) d\rho$ car

$\frac{2}{r^2} \int_0^r \rho d\rho = 1$. Puis $m(a, b, \rho) - f(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) - f(a, b)] d\theta$ car

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1$. Mais alors la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne

$f(a + \rho \cos \theta, b + \rho \sin \theta) - f(a, b) = \rho \cos \theta \frac{\partial f}{\partial u}(a, b) + \rho \sin \theta \frac{\partial f}{\partial v}(a, b) + \rho \varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

avec $\varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rightarrow 0$ quand $\rho \rightarrow 0$. Et par conséquent on a:

$M(a, b, r) - f(a, b) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \frac{\rho^2}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta \right] d\rho$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, $\exists r_0 > 0$ tel que $\rho \leq r_0 \Rightarrow |\varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \leq \varepsilon$. D'où pour $r \leq r_0$ on a

$|M(a, b, r) - f(a, b)| \leq \frac{2}{r^2} \int_0^r \varepsilon \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \varepsilon r$ et donc $|M(a, b, r) - f(a, b)| \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0^+$

$r \rightarrow M(a, b, r)$ est continue sur $[0, b[$.

4) Montrons que $r \rightarrow m(a, b, r)$ est dérivable sur $]0, b[$.

$\frac{\partial h}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial u}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial v}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$ est continue sur

$[0, b[\times [0, 2\pi]$ et le théorème de dérivation sous le signe $\int$ s'applique, et on peut écrire

$\frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \frac{\partial f}{\partial u}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial v}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)) d\theta$ soit

$\frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv$ pour $r \in]0, b[$ d'après 1).

5) J'ai déjà indiqué à la question 3) que $r \rightarrow M(a, b, r)$ était le produit de 2 fonctions dérivables sur $]0, b[$.

On a: $\frac{\partial M}{\partial r}(a, b, r) = -\frac{4}{r^3} \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho + \frac{2}{r^2} r m(a, b, r)$ soit

$\frac{\partial M}{\partial r}(a, b, r) = \frac{2}{r} (m(a, b, r) - M(a, b, r))$

4ème Partie.

1) Supposons f harmonique sur P .

La formule de la question 4) de la 3^{ème} partie: $\frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv$ assure que $\frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = 0$ sur $]0, b[$ puisque $\Delta f(u, v) = 0$ en tout point de D_r , et donc que $m(a, b, r)$ est constant

sur $]0, b[$ et par continuité sur $[0, b[$. $m(a, b, r) = m(a, b, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a, b) d\theta = f(a, b)$.

$m(a, b, r) = f(a, b)$ pour tout $(a, b) \in P$ donc f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P .

2) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P .

Alors $\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(u, v) du dv = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho m(a, b, \rho) d\rho = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho f(a, b) d\rho = f(a, b)$ et donc

$$M(a, b, r) = \begin{cases} f(a, b) & \text{si } r \neq 0 \\ f(a, b) & \text{si } r = 0 \end{cases} \quad f \text{ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur } P.$$

3) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur P .

$$M(a, b, r) = f(a, b) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial r} = 0 \text{ pour } r \in]0, b[.$$

La formule de la question 5) de la 3^{ème} partie: $\frac{\partial M}{\partial r}(a, b, r) = \frac{2}{r}(m(a, b, r) - M(a, b, r))$ assure alors que $m(a, b, r) = M(a, b, r) = f(a, b)$ pour tout $(a, b) \in P$, et pour $r \in]0, b[$.
 f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P .

4) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne spatiale sur P , alors f vérifie aussi la propriété de moyenne circulaire sur P . On a donc, pour tout $(a, b) \in P$, et pour $r \in]0, b[$

$$f(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) d\theta \quad \text{et le théorème de dérivation sous le signe } \int \text{ s'applique}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial u}(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) d\theta \quad \text{ce qui prouve que } \frac{\partial f}{\partial u} \text{ vérifie aussi la propriété de}$$

moyenne circulaire sur P et donc aussi celle de moyenne spatiale sur P d'après 2). Même raisonnement pour

$\frac{\partial f}{\partial v}$. En appliquant le résultat 2 fois on a que $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ vérifient la propriété de moyenne spatiale sur P et donc par linéarité Δf aussi.

5) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P , alors $m(a, b, r) = f(a, b)$ et donc

$$\frac{\partial m}{\partial r}(a, b, r) = 0 \quad \text{d'où d'après la question 4) de la 3^{ème} partie } \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv = 0 \text{ soit}$$

$$\iint_{D_r} \Delta f(u, v) du dv = 0$$

Mais alors, puisque Δf vérifie la propriété de moyenne spacieale sur P ,

$$\Delta f(a,b) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} \Delta f(u,v) du dv = 0 \text{ pour } r \neq 0 \text{ et donc } \Delta f(a,b) = 0 \text{ pour tout } (a,b) \in P$$