

Première partie

1)  $F$  est la somme d'une série entière, donc définie en  $0$ .  $\forall x \neq 0$ ,  $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{x^2}{(n+1)^2} \rightarrow 0$  qd  $n \rightarrow +\infty$  donc la série converge pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . De plus  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  et  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{(n!)^2}$ ,  $F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(2n-1)x^{2n-2}}{(n!)^2}$ .  $F$  est paire,  $\forall x \geq 0$ ,  $F'(x) > 0$  donc  $F$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ ;  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $F''(x) > 0$  donc  $F$  est convexe.

2) a)  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \geq 1$ :  $(v_n)$  est croissante;  $v_0 = 1$  donc  $\forall n$ ,  $v_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}$

$$\forall x \geq 0, F(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!} = ch(2x) : \boxed{F(x) \leq ch(2x)}$$

b)  $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \leq 1$ :  $(w_n)$  est décroissante;  $w_0 = 1$  donc  $\forall n$ ,  $w_n \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{(n!)^2} \geq \frac{4^n}{(2n+1)!}$

$$\forall x > 0, F(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)!} x^{2n} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{2x(2n+1)!} \text{ d'où } \boxed{F(x) \geq \frac{sh(2x)}{2x}}$$

$$c) G(x) = \sqrt{ch(2x) \frac{sh(2x)}{2x}} = \sqrt{\frac{sh(4x)}{4x}}; x \rightarrow +\infty \Rightarrow G(x) \sim \sqrt{\frac{e^{4x}}{2 \times 4x}} \sim \frac{e^{2x}}{2\sqrt{2}\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \Phi(x)$$

Deuxième partie

1) a)  $t \mapsto t^k e^{-xt}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et de la forme  $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  qd  $t \rightarrow +\infty$  donc est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On intègre par parties:  $I_k = \frac{k!}{x^{k+1}}$

b)  $F$  est continue sur  $\mathbf{R}$  (somme de série entière de rayon de CV infini) donc  $t \mapsto F(t)e^{-xt}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .  $\forall t \geq 0$ ,  $0 \leq F(t)e^{-xt} \leq ch(2t)e^{-xt}$  et  $t \rightarrow +\infty \Rightarrow ch(2t)e^{-xt} \sim \frac{1}{2}e^{(2-x)t}$ . Si  $x > 2$ ,  $t \mapsto \frac{1}{2}e^{(2-x)t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , donc  $t \mapsto ch(2t)e^{-xt}$  aussi (théorème des équivalents) donc  $t \mapsto F(t)e^{-xt}$  aussi (théorème de comparaison).

$$\forall x > 2, L(F)(x) = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \right) e^{-xt} dt. \text{ Posons } v_n(t) = \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$$

La série de fonctions  $\sum v_n(t)$  CV sur  $[0, +\infty[$  et sa somme  $F(t)e^{-xt}$  est continue sur  $[0, +\infty[$

$$\forall n, v_n \in C^0([0, +\infty[) \text{ et } v_n(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ qd } t \rightarrow +\infty \text{ donc } v_n \in L^1([0, +\infty[)$$

$J_n = \int_0^{+\infty} |v_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} v_n(t) dt = \frac{1}{(n!)^2} I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$ . Utilisons le critère de D'Alembert  $\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 x^2} \rightarrow \frac{4}{x^2}$  qd  $n \rightarrow +\infty$ ;  $x > 2 \Rightarrow \frac{4}{x^2} < 1 \Rightarrow \sum \int_0^{+\infty} |v_n| CV$

On peut utiliser le théorème d'intégration terme à terme . Donc  $L(F)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} v_n(t) dt$  et en conclusion :  $\forall x > 2$  ,  $L(F)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$

$$c) \forall t \neq 0, \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n} > 0 \text{ et } \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} t^{2n+2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n}} = \frac{2(2n+1)t^2}{(n+1)} \rightarrow 4t^2; 4t^2 < 1 \Rightarrow \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n} \text{ CV}$$

Si  $4t^2 > 1$  , la suite  $\frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n}$  est positive , croissante à partir d'un certain rang , donc ne tend pas vers 0 , donc la série  $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} t^{2n}$  DV . En conclusion :  $\boxed{R = \frac{1}{2}}$

Rappelons que :  $\forall u \in ]-1, 1[$  ,  $(1+u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(-\frac{u}{4}\right)^n$  . On

pose  $-\frac{u}{4} = t^2$  d'où :  $\boxed{\forall t \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ , g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}}$

$$d) \forall x > 2, L(F)(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n} = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \boxed{L(F)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}}$$

e)  $t \mapsto \Phi(t)e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{(2-x)t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  , équivalent à  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  qd  $t \rightarrow 0$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  . Quand  $t \rightarrow +\infty$  : si  $2-x < 0$  alors  $\Phi(t)e^{-xt} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc intégrable sur  $[1, +\infty[$  ; si  $2-x \geq 0$  alors  $\Phi(t)e^{-xt} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$  donc n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$  .

Conclusion :  $L(\Phi)$  est définie sur  $]2, +\infty[$  . On fait le changement de variable :  $u = \sqrt{t(x-2)}$  d'où  $L(\Phi)(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \Rightarrow \boxed{L(\Phi)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-2}}}$

2) a) Par définition :  $g$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  si et seulement si  $|g|$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$

Soit  $x_0 \in I(f)$  :  $t \mapsto |f(t)e^{-x_0 t}|$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  .  $\forall x > x_0, \forall t > 0$  ,  $|f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-x_0 t}|$  donc  $t \mapsto |f(t)e^{-xt}|$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  , donc  $t \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et donc  $x \in I(f)$  . On a donc :

$$\boxed{x_0 \in I(f) \Rightarrow [x_0, +\infty[ \subset I(f)}$$

b)  $I(f) \neq \emptyset$  et  $I(f) \neq \mathbf{R}$  donc  $\exists y \in \mathbf{R} \text{ tq } y \notin I(f)$  .  $\forall x \in I(f)$  ,  $x > y$  sinon on aurait  $[x, +\infty[ \subset I(f)$  donc  $y \in I(f)$  . Donc  $y$  est un minorant de  $I(f)$  .  $I(f)$

est une partie non vide et minorée de  $\mathbf{R}$  donc  $I(f)$  admet une borne inférieure, qu'on note  $\alpha(f)$ . Par définition de la borne inférieure :  $y < \alpha(f) \Rightarrow y \notin I(f)$  et  $x > \alpha(f) \Rightarrow \exists x_0 \in I(f) \text{ tq } \alpha(f) < x_0 < x$ .  $[x_0, +\infty[ \subset I(f)$  donc  $x \in I(f)$ .  
En conclusion :  $I(f) = [\alpha(f), +\infty[$  ou  $I(f) = ]\alpha(f), +\infty[$

c) Soit  $\varphi(x, t) = f(t)e^{-xt}$ .  $\varphi$  est continue sur  $\mathbf{R} \times ]0, +\infty[$  donc sur  $] \alpha(f), +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Soit  $b > \alpha(f) : \forall x \geq b, \forall t > 0, |\varphi(x, t)| \leq |\varphi(b, t)|$  et  $b \in I(f)$  donc  $t \mapsto \varphi(b, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  (hypothèse de domination). On en déduit que  $L(f) \in C^0([b, +\infty[)$ . Or  $\forall x_0 > \alpha(f), \exists b \text{ tq } \alpha(f) < b < x_0$ , donc  $L(f)$  est continue au point  $x_0$ . Donc  $L(f) \in C^0(] \alpha(f), +\infty[)$

Si  $f$  est positive :  $\alpha(f) < x < x' \Rightarrow \forall t > 0, f(t)e^{-x't} \leq f(t)e^{-xt} \Rightarrow L(f)(x') \leq L(f)(x)$  donc  $L(f)$  est décroissante ; et positive. Si  $\alpha(f) \in I(f) : \forall x \in I(f), 0 \leq L(f)(x) \leq L(f)[\alpha(f)]$

d) i) D'après les hypothèses :  $\exists M > 0 \text{ tq } \forall x \in ] \alpha(g), +\infty[, 0 \leq L(g)(x) \leq M$ . Or  $\forall A > 0, \int_0^A g(t)e^{-xt} dt \leq L(g)(x)$  (car  $g$  est positive) d'où  $\int_0^A g(t)e^{-xt} dt \leq M$

ii)  $(x, t) \mapsto g(t)e^{-xt}$  est continue sur  $[ \alpha(g), +\infty[ \times ]0, A]$  ;  $\alpha(g) < x \Rightarrow g(t)e^{-xt} \leq g(t)e^{-\alpha(g)t}$  ;  $t \mapsto g(t)e^{-\alpha(g)t}$  est intégrable sur  $]0, A]$  car continue et équivalent en 0 à  $g(t)$  qui est intégrable sur  $]0, A]$  par hypothèse. Donc  $x \mapsto \int_0^A g(t)e^{-xt} dt$  est continue sur  $[ \alpha(g), +\infty[$  et donc  $x \rightarrow \alpha(g) \Rightarrow \int_0^A g(t)e^{-xt} dt \rightarrow \int_0^A g(t)e^{-\alpha(g)t} dt$ . D'après i) :  $\int_0^A g(t)e^{-\alpha(g)t} dt \leq M$

Par définition de l'intégrabilité d'une fonction positive, on peut conclure que  $t \mapsto g(t)e^{-\alpha(g)t}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  donc que :  $\alpha(g) \in I(g)$

3) a)  $g(t) \sim h(t)$  en  $+\infty$  donc  $\exists t_1 \text{ tq } t \geq t_1 \Rightarrow \frac{1}{2}h(t) \leq g(t) \leq \frac{3}{2}h(t) \Rightarrow \frac{1}{2}h(t)e^{-xt} \leq g(t)e^{-xt} \leq \frac{3}{2}h(t)e^{-xt}$  donc  $x \in I(g) \Leftrightarrow x \in I(h)$  donc  $I(g) = I(h)$  et  $\alpha(g) = \alpha(h)$

b) D'après 2) d) si  $\alpha(h) \notin I(h)$  alors  $L(h)$  n'est pas bornée et comme elle est décroissante  $x \rightarrow \alpha(h)^+ \Rightarrow L(h)(x) \rightarrow +\infty$

Par ailleurs  $g(t) \sim h(t)$  en  $+\infty$  donc  $g - h = o(h)$  en  $+\infty : \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tq } t \geq A \Rightarrow |g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}h(t)$  (par hypothèse,  $h$  est positive).  $|L(g)(x) - L(h)(x)| =$

$$\left| \int_0^{+\infty} [g(t) - h(t)]e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} h(t) e^{-xt} dt$$

Posons  $C = \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-\alpha(g)t} dt$  (existence justifiée par :  $g - h$  intégrable sur  $]0, A[$ ) .  $|L(g)(x) - L(h)(x)| \leq C + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} h(t) e^{-xt} dt \leq C + \frac{\varepsilon}{2} L(h)(x)$  . Or  $x \rightarrow \alpha(h)^+ \Rightarrow L(h)(x) \rightarrow +\infty$  donc  $\exists \delta > 0$  tq  $\alpha(h) < x < \alpha(h) + \delta \Rightarrow L(h)(x) > 0 \Rightarrow \left| \frac{L(g)(x)}{L(h)(x)} - 1 \right| \leq \frac{C}{L(h)(x)} + \frac{\varepsilon}{2}$

Enfin  $\frac{C}{L(h)(x)} \rightarrow 0$  qd  $x \rightarrow \alpha(h)^+$  donc  $\exists \beta > 0$  ,  $\beta \leq \delta$  tq  $\alpha(h) < x < \alpha(h) + \beta \Rightarrow \frac{C}{L(h)(x)} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{L(g)(x)}{L(h)(x)} - 1 \right| < \varepsilon$  . Ceci prouve que  $\left| \frac{L(g)(x)}{L(h)(x)} - 1 \right| \rightarrow 0$  qd  $x \rightarrow \alpha(h)^+$

En conclusion :  $\boxed{x \rightarrow \alpha(h)^+ \Rightarrow L(g)(x) \sim L(h)(x)}$

4)  $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow L(F)(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} L(\Phi)(x)$  . On peut conjecturer que  $F(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Phi(x)$  en  $+\infty$

### Troisième partie

1) a)  $\forall t \in \mathbf{R}$  ,  $\left| \frac{x^n}{n!} e^{int} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}$  et  $\sum \frac{|x|^n}{n!}$  CV donc  $\sum \frac{x^n}{n!} e^{int}$  CV .  $k$  est donc définie sur  $\mathbf{R}$  , de plus  $\sup_{\mathbf{R}} \left| \frac{x^n}{n!} e^{int} \right| = \frac{|x|^n}{n!}$  série CV donc la convergence est normale donc uniforme sur  $\mathbf{R}$  ,  $\forall n$  ,  $t \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{int}$  est continue sur  $\mathbf{R}$  et  $2\pi$ -périodique donc  $k \in C^0(\mathbf{R})$  et est  $2\pi$ -périodique .

On peut appliquer le théorème de Parseval . Coefficients de Fourier de  $k$  :  $\forall p \in \mathbf{Z}$  ,  $c_p(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(t) e^{-ipt} dt$  . La CV est uniforme , on peut intégrer terme à terme :

$$c_p(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{int} e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ 2\pi & \text{si } n = p \end{cases}$$

Si  $p < 0$  :  $c_p(k) = 0$  ; si  $p \geq 0$  ,  $c_p(k) = \frac{x^p}{p!}$  donc  $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(k)|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(p!)^2} =$

$F(x)$  et  $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |k(t)|^2 dt$  . Conclusion :  $\boxed{\int_0^{2\pi} |k(t)|^2 dt = 2\pi F(x)}$

b)  $k(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xe^{it})^n}{n!} = \exp[xe^{it}] = \exp[x(\cos t + i \sin t)] \Rightarrow |k(t)|^2 = e^{2x \cos t}$

c)  $\int_0^{2\pi} |k(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} e^{2x \cos t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x \cos t} dt = 2 \int_0^{\pi} e^{2x \cos t} dt$  (par périodicité et parité)

Conclusion :  $\boxed{F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{2x \cos t} dt}$

2) a)  $t \mapsto \exp(x \cos t)$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  donc intégrable .  $t \mapsto x \exp(xt) \sqrt{1-t}$  est continue sur  $[0, 1[$  ;  $t \mapsto \frac{\exp(xt)}{\sqrt{1-t}}$  est continue sur  $[0, 1[$  ;  $t \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\exp(xt)}{\sqrt{1-t}} \sim \frac{e^x}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$  ,  $\frac{1}{2} < 1$  donc  $t \mapsto \frac{\exp(xt)}{\sqrt{1-t}}$  est intégrable sur  $[0, 1[$  .

b)  $h_2(x) = 2 \int_0^1 \exp[x(1-u^2)] du = 2e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\theta^2} \frac{1}{\sqrt{x}} d\theta$  en posant  $\theta = u\sqrt{x}$  .  $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\theta^2} d\theta \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  qd  $x \rightarrow +\infty$  donc  $\boxed{h_2(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^x \text{ qd } x \rightarrow +\infty}$

c) Intégrons par parties :  $h_3(x) = \left[ \frac{e^{xt}}{x} \sqrt{1-t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{xt}}{x} \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} dt = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} h_2(x)$  et  $h_2(x) \rightarrow +\infty$  qd  $x \rightarrow +\infty$  donc  $h_3(x) \sim \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^x$  qd  $x \rightarrow +\infty$

d)  $\forall t \in [0, 1[$ ,  $\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right] = \frac{1}{1-u} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = \frac{2-(1+u)}{(1-u)\sqrt{2}\sqrt{1+u}[\sqrt{2}+\sqrt{1+u}]} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+u}[\sqrt{2}+\sqrt{1+u}]} \leq \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right] \leq C\sqrt{1-u}$   
 ( $C = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ )

e) Faisons le changement de variable  $u = \cos t$  :  $h_1(x) = \int_0^1 \exp(xu) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$   
 d'où en utilisant d) :  $\left| h_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2(x) \right| \leq \int_0^1 e^{xt} C \sqrt{1-t} dt \leq C h_3(x) \Rightarrow \left| \frac{h_1(x)}{\frac{1}{\sqrt{2}} h_2(x)} - 1 \right| \leq C \sqrt{2} \frac{h_3(x)}{h_2(x)}$  car  $h_2(x) > 0$  Qd  $x \rightarrow +\infty$  :  $\frac{h_3(x)}{h_2(x)} \sim \frac{1}{2x} \rightarrow 0 \Rightarrow h_1(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} h_2(x)$  :  $h_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x$  qd  $x \rightarrow +\infty$

3)  $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos t} dt = \frac{1}{\pi} h_1(2x) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \exp(2x \cos t) dt$  .  $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $\cos t \leq 0$ ,  $x > 0$

donc  $0 \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \exp(2x \cos t) dt \leq \frac{\pi}{2}$  ;  $h_1(2x) \rightarrow +\infty$  qd  $x \rightarrow +\infty$  donc  $F(x) \sim \frac{1}{\pi} h_1(2x)$  et finalement :  $F(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$  qd  $x \rightarrow +\infty$  (résultat conjecturé en II)